論文内容の要旨

論文題目　Representation theory of Drinfeld doubles (ドリンフェルトダブルの表現論)

氏名　荒野 悠輝

Kazhdan によって導入された性質 (T) は，もともとのモチベーションであった格子の有限生成性のみならず，今日では，幾何群論を始めとした多くの分野において重要な帰結を持つ．特に，作用素環論においては，もとの群の性質 (T) だけでなく，von Neumann 環や C*-環，部分因子環やその standard invariant，量子群など多くの対象への拡張が知られており，そのそれぞれが重要である．一方で，性質 (T) を持つようなそれぞれの対象の例というのは，すべて性質 (T) をもつ群から構成されるものしか知られていなかった．

作用素環論的な量子群とは，一般には非可換な作用素環の上に Hopf 環の構造が入るものである．性質 (T) は群の上の正定値関数による定数関数の近似に関する剛性であるが，量子群においては，その上の関数（すなわち Hopf 環の元) は非可換であるから，普通の性質 (T) のほかに，単なる正定値関数ではなく，関数環の中心に入る関数による近似を考えることができる．このような，コンパクト量子群上の中心的正定値関数，およびそれによる近似性は，モノイダル同値によってうつりあう良い関数のクラス，および性質として，De Commer-Freslon-Yamashita によって導入された．さらに，このような中心的正定値関数は Drinfeld double 上の正定値関数と思うことができ，したがって，Drinfeld double の (上記のような) ユニタリ表現論を通して理解される．実際，De Commer-Freslon-Yamashita においては，Pusz や Voigt らによって研究されてきた $SU_q(2)$ の Drinfeld double のユニタリ表現論との関連を通して，$SU_q(2)$ の中心的 Haagerup 性や中心的 CBAP などの性質が調べられてきた．

一般に，コンパクト Lie 群の q-変形の Drinfeld double は，元の Lie 群の複素化の量子化と思うことができることが知られている．本論文では，この類似を用いて，Drinfeld double のユニタリ表現論を複素半単純 Lie 群のユニタリ表現論での手法を用いて研究した．主定理は以下である．

定理 1. K を連結単連結コンパクト Lie 群，$0 < q < 1$ とし，その q-変形 K_q をとる．$Q^\vee$，P をそれぞれ余ルート格子，ウェイト格子とし，W を Weyl 群とする．このとき，

1. K_q の Drinfeld double G_q のユニタリ既約表現 (の K-有限部分) は認容である．
2. G_q の既約認容表現は $(P \times X)/W$ でパラメトライズされる．ただし，$X = \mathfrak{h}^*/2\pi i \log(q)^{-1} Q^\vee$ で，W は $P \times X$ に対角に作用するものとする．
3. パラメータ $(\lambda, \nu) \in P \times \mathfrak{h}^*$ であって，$\mathrm{Im}(\nu)$ が十分小さいとき，G_q の対応する既約認容表現がユニタリであるのは，同じパラメータに対応する複素 Lie 群 G の既約認容表現がユニタリであるとき，かつそのときに限る．

この定理は特に以下を導く．

- 複素半単純 Lie 群の既約ユニタリ表現の分類の言葉による，Drinfeld double のほとんどの既約ユニタリ表現の分類．
- ランク 2 以上のコンパクト単純 Lie 群の q-変形の中心的性質 (T)．
- $SU_q(n)$ の Drinfeld double $SL_q(n, \mathbb{C})$ のすべての既約ユニタリ表現の分類．

このような中心的近似性は部分因子環論とも深く関係していることが知られている．Popa による部分因子環の分類において，分類の可能/不能性を standard invariant の近似性という言葉で特徴づけられていた．Popa-Vaes，Neshveyev-Yamashita，Ghosh-Jones らの独立したグループは，テンソル圏上の正定値関数の概念を導入し，テンソル圏がコンパクト量子群の表現圏である場合には，その上の中心的正定値関数，またテンソル圏が部分因子環の表現圏である場合には，standard invariant の正定値関数であることを示した．これと本論文で示した中心的性質 (T) を組み合わせることにより，性質 (T) standard invariant を持つ部分因子環であって，群作用からこないようなものを構成できる．これはそのような部分因子環の初めての例であり，特に性質 (T) が principal graph の性質であるという予想を否定的に解決した．