論文審査の結果の要旨

氏　名　大　矢　浩　徳

Twist map（捻り写像）とは，半単純代数群 G の座標環（正確にはベキ単胞体と呼ばれる G の部分多様体の座標環）のある自己同型写像で, 2000 年代初めに cluster algebra（団代数）の研究を一つの契機として，Berenstein-Fomin-Zelevinsky によって導入された．大矢さんの業績は，捻り写像の量子化を定式化し，期待される性質を証明したことである．以下，研究の背景を含め，大矢さんの業績について説明する．

団代数とは, 表現論や可積分系に付随して現れる種々の可換環に共通に現れる組み合せ論的構造で，2000 年前後，Fomin-Zelevinsky によって導入された．現在ではその適応範囲を 3 次元双曲幾何や微分方程式等にも広げ，活発に研究が行われている．上述のベキ単胞体の座標環は団代数構造を持つ可換環の一例になっているが, 団代数構造を定義する際に中心的役割を果たすのが捻り写像の概念である．

他方，上述の捻り写像は，Geiss-Leclerc-Scheoer（以下 GLS と略記）によって再発見されることになる．GLS は，前射影代数と呼ばれる多元環の表現論を通じて捻り写像の幾何学的な再解釈を与え，さらに一歩進んで，量子ベキ単部分群上の量子団代数構造（非可換環上の団代数構造）も導出した．ここに現れた『量子ベキ単部分群上の量子団代数構造』は，量子アフィン代数の有限次元表現のなす圏の構造と密接な関係があることが知られている．量子アフィン代数の有限次元表現は完全可約ではないため，その全体のなす圏の構造を解析することは非常に難しく, 当該分野の重要な課題の一つとなっている．さらに，量子アフィン代数の有限次元表現論は，Drinfeld-神保による量子包絡環の導入のそもそもの目的であった可解格子模型の解析に, 欠かせない道具であることも付記しておきたい．

以上の理由から，量子団代数構造の解析は，多元環や量子群の表現論のみならず，可積分系の研究にも関連する重要なテーマであると考えられる．しかしながら，量子化されたバージョン（量子団代数構造）においては，オリジナルの団代数の理論において捻り写像が果たしたような，適切な自己同型の存在が保証されておらず，その定式化において技術的な困難が生じる状態になっていた．

このような状況下にあって，『捻り写像の量子化を，期待される性質が満たされるように正しく定義せよ』というのは，自然な問いである．実際，Berenstein-Rupel (2015) は，量子ベキ単胞体の量子団代数構造に着目し，そこから期待される“捻り写像”の性

質を列挙することによって，それらを満たす自己同型（量子捻り写像）の存在を示した．

ただし，これには注意が必要である．彼らの手法は直接的で，意味の良くわかる方法ではあるが，その反面計算があまりに複雑になってしまうため，ごく限られた限定的な場合にしか量子捻り写像の存在を証明出来ず，ほとんどの場合を予想として提出するレベルに止まっていた．

大矢さんの業績の卓越した点は，量子捻り写像を量子ベキ単胞体の量子団代数構造とは独立に定義し，量子団代数構造との整合性を，全てが正しく定義された後に得られる一つの系とみなすという，いわば逆転の発想にある．大矢さんが量子捻り写像を定義する際に着目したのは，量子ベキ単胞体の（双対）標準基底である．これは，Lusztig・柏原によって導入された量子包絡環の標準基底の双対概念で，その構造を詳しく解析することが，元来の Fomin-Zelevinsky による団代数構造の導入の動機の一つとなっていた．団代数構造の理解が進んだ現在にあって，話を標準基底の理論にまで戻すという方法は一見遠回りのようにも思えるが，大矢さんは事の本質がどこにあるかを的確に見抜き，想定される最も一般的な形で量子捻り写像を正しく定式化し，量子団代数構造との整合性を最も一般的な形で証明した．この結果は評価に値する．同時に，この成果により，量子アフィン代数の有限次元表現の圏を調べるための，新たな手法が確立されたことにもなっている．

さらに，大矢さんは自身が定義した一般的な量子捻り写像の，前射影代数の表現論を用いた解釈を与え，GLS が導入した量子団代数構造の，多元環の表現論的意味付けを明らかにした．この成果は，量子群の表現論と多元環の表現論という，２つの異なる表現論を結ぶ新たな橋わたしの役割を果たすものであり，今後の進展が期待される．

以上のように，大矢さんの業績は今後の当該分野の発展に，重要な基礎付けを与えるものであると考えられる．よって，論文提出者大矢浩徳さんは，博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める．