論文の内容の要旨

論文題目　On the existence of infinitely many non-contractible periodic trajectories in Hamiltonian dynamics on closed symplectic manifolds

（閉シンプレクティック多様体上のハミルトン力学系における無限個の非可縮周期軌道の存在について）

氏　　名　　折田　龍馬

1．背景

本論文では，連結な閉シンプレクティック多様体上のハミルトニアン $H\colon S^1 \times M \to \mathbb{R}$ が生成するハミルトン・イソトピー $\{\varphi_H^t\}_{t\in\mathbb{R}}$ の周期軌道や，その周期について考察する．

シンプレクティック幾何学において，ハミルトン系の周期解を求めることは重要な問題である．1984 年に Conley [Co] は，トーラス T^{2n} の任意のハミルトン微分同相写像は無限に多くの単純周期軌道を持つことを予想した．様々な段階を経てこの予想は肯定的に解決されたが [Hi, Ma], 現在ではトーラスの他に, negative monotone であるか第一チャーン類 c_1 が aspherical（定義は 3.1 節参照）であるような閉シンプレクティック多様体を含む多くの閉シンプレクティック多様体に対しても，Conley 予想が成り立つことが証明されている[GG16b].

Conley 予想が成り立たない例として，球面 S^2 が挙げられる．実際に，自然に $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ とみなし，ある 1 つの座標軸に関する無理数回転を考えると，固定点が 2 つだけであるようなハミルトン微分同相写像が得られる．しかしながら Franks [Fr92, Fr96] は，S^2 の固定点を 2 つより多く持つ任意のハミルトン微分同相写像は無限に多くの単純周期軌道を持つことを示した．この現象を踏まえ Hofer と Zehnder [HZ] は，非退化な固定点を「必要以上に」持つ任意のハミルトン微分同相写像は無限に多くの単純周期軌道を持つことを予想した. ここで「必要以上に」とは, ある種のアーノルド予想に由来する固定点の数の下限と考えられている. 例えば, 複素射影空間 $\mathbb{C}P^n$ の場合は $n+1$ である．

一方 Gurel [Gu13] は，この「必要以上に」という条件を「少なくとも 1 つの非退化な非可縮周期 1 軌道の存在」と考えた．なぜならば，閉シンプレクティック多様体上の任意のハミルトニアン H に対して，自由ホモトピー類 $\alpha \neq 0$ を代表する非可縮周期軌道に対するフレアーホモロジー $\mathrm{HF}(H;\alpha)$ は常に消滅し，この意味で非可縮周期軌道は「不必要」であるからである．すなわち Gurel は，連結な閉シンプレクティック多様体 (M,ω) 上の任意のハミルトニアン $H\colon S^1 \times M \to \mathbb{R}$ は，非退化な非可縮周期 1 軌道を少なくとも 1 つ持てば，無限に多くの（非可縮）単純周期軌道を持つことを予想した. 実際に Gurel はシンプレクティック形式 ω が atoroidal である

ときに証明を与えた．ここで Gurel の定理は，周期軌道が可縮か非可縮かを問わない Conley 予想と違い，無限に多くの非可縮周期軌道の存在を主張していることに注意する．そこで，非可縮周期軌道の存在に関して Ginzburg と Gurel [GG16a] は，(M,ω) が toroidally monotone であるか toroidally negative monotone であっても，同様の結論が成り立つことを証明した．ここで，atoroidal や toroidally monotone という条件はそれぞれ，aspherical や monotone という条件よりも強いことに注意する（これらの定義は全て 3.1 節参照）．その後，著者によりトーラス T^{2n} に対しても同様の結論が成り立つことが証明された[Or]．トーラス T^{2n} は atoroidal でない aspherical なシンプレクティック形式を持ち，toroidally (negative) monotone には成り得ないことに注意する．

2. 主結果

本論文では，上述の Ginzburg や Gurel らによる結果の拡張を行う．具体的には (M,ω) を連結な閉シンプレクティック多様体としたときに，シンプレクティック形式 ω が aspherical でありかつ，基本群 $\pi_1(M)$ が virtually abelian 群であるか R 群（定義 4.8 参照）であるときに，M 上の任意のハミルトニアン $H\colon S^1 \times M \to \mathbb{R}$ は，非退化な非可縮周期 1 軌道を少なくとも 1 つ持てば，無限に多くの非可縮単純周期軌道を持つことを証明する（定理 2.1）．また，同じ条件を満たす基本群を持つ (M,ω) が monotone であるか negative monotone であるときも，同様の結論が成り立つことを証明する（定理 2.2 及び 2.3）．

定理 2.1 の重要な例としてトーラス T^{2n} が挙げられる．また，有限生成アーベル群 G に対して，G が $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ と同型であるか G の階数が 4 以上であることと，G を基本群として持つような aspherical なシンプレクティック形式を持つ閉シンプレクティック多様体が存在することが同値であることが知られているため[KRT]，基本群の仮定を有限生成アーベル群まで制限してもなお，豊富な例が存在する．また，小平・サーストン多様体も興味深い例の 1 つである．小平・サーストン多様体の基本群は捩れのない冪零群，特に R 群であり，aspherical なシンプレクティック形式を自然に許容する．定理 2.2 及び 2.3 の例としては，同様の条件を満たす基本群を持つ symplectically aspherical（つまり ω と c_1 が aspherical）な閉シンプレクティック多様体 (M,ω) と複素射影空間 $(\mathbb{C}P^n, \omega_{\mathrm{FS}})$ の直積 $(M \times \mathbb{C}P^n, \omega \oplus \omega_{\mathrm{FS}})$ が挙げられる．

本論文の主結果の証明には，非可縮周期軌道に対するフレアー・ノビコフホモロジーを用いる（3.2 節）．フレアー・ノビコフホモロジーを用いる上での主要な困難は，その生成元として周期軌道の全てのノビコフ作用によるリフトを考えなければならない点にある．しかしながら，シンプレクティック形式が aspherical であってかつ，基本群が virtually abelian 群であるか R 群である場合は，それらのリフトを明瞭に記述することができる（補題 4.6 及び 4.10）．また，閉シンプレクティック多様体が monotone であるか negative monotone である場合は，ある実数 λ が存在してコホモロジー類 $[\omega] - \lambda c_1$ が aspherical となるため，補題 4.6 及び 4.10 を適用することにより同様の困難を回避することができる．