論文審査の結果の要旨

氏　名　　　　　　折　田　龍　馬

論文提出者折田龍馬の研究対象はシンプレクティク多様体のハミルトン微分同相である。シンプレクティク多様体の研究の源流の一つは古典力学で、そこではハミルトン系の軌道の性質の研究が主題であった。それでハミルトン系の閉軌道の存在やハミルトン微分同相の固定点の存在が研究されてきた。

シンプレクティク多様体 M のハミルトン微分同相は、$(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})\times M$ 上の関数 H をハミルトン関数とするハミルトン・アイソトピー ϕ_H^t の時刻 1 写像 ϕ_H^1 として定まる。このハミルトン・アイソトピーの $(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})\times M$ 上の閉軌道を調べることは、ハミルトン微分同相の固定点や周期点を調べることと同値になる。さらに、このハミルトン・アイソトピーの閉軌道のシンプレクティク多様体への射影のホモトピー類を考えることができる。逆に、ひとつのホモトピー類の中に、ハミルトン・アイソトピーの閉軌道が存在するかどうかを、閉軌道を生成元とするホモロジー理論を構築して研究する Fleor の仕事が生まれた。これについては、Arnold, Banyaga, Fleor, Hofer, Fukaya, Oh, Ohta, Ono, Mcduff, Polterovich, ... など多くの数学者により研究され、沢山の興味深い結果を生んできた。

論文提出者折田龍馬は、論文の中で以下のことを示した。

連結閉シンプレクティク多様体 M のシンプレクティク形式 ω が 2 次元ホモトピー群上で零であるとする。多様体の基本群は有限指数のアーベル群を含むか、または群の元の累乗根は存在すれば一意である (R 群である) とする。さらにホモロジー群においてねじれ元とならない閉曲線の自由ホモトピー類 α について、α の基本群上でシンプレクティク形式 ω の値は離散的であるとする。基本群における α の代表元の ℓ 乗がアーベル群の元となるような ℓ を定める（R 群のときは任意に取る）。ℓ を公差とする等差数列上の i 番目の素数を p_i とする。このとき次が成立する。

定理。ハミルトニアン $H:(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})\times M \longrightarrow \boldsymbol{R}$ が α に属する周期 1 の閉軌道でハミルトニアン微分同相の微分が 1 を固有値にもたないものを持つとし、ねじれ元を法として α と同じホモロジー類に属する周期 1 の閉軌道は有限個とする。このとき、十分大きな p_i に対し、α^{p_i} に属する周期 p_i または p_{i+1} の単純閉軌道が存在する。

また、基本群について同じ仮定の下、2 次元ホモトピー群上でシンプレクティク形式がチャーン類に比例しており、α の基本群上では、ω の値が離散的である場合に、ある区間の縮小列 I 上で α についての Floer-Novikov 複体のオイラー数 $\chi(H,I;\alpha)$ が消えていないという条件の下で、定理と同様の主張の成立も示している。

この結果は、Ginzburg や Gürel によって得られていた、ループ空間の各成分の基本群上でシンプレクティク形式 ω が零となっている場合やループ空間の各成分の基本群上でシンプレクティク形式がチャーン類に比例しいる場合の同様の主張の拡張となっている。上の定理は、標準的シンプレクティク・トーラスや小平 Thurston 多様体、それらと複素射影空間の直積などの標準的なシンプレクティク多様体に対して、1 つ非可縮な周期軌道が存在すれば、無限個非可縮な周期軌道が存在することを示しているもので、その部分でも新しい結果である。

証明には通常は可縮な軌道をもつ固定点を用いる Floer 理論を少し一般化したものを使う。非可縮周期軌道を扱うためには、軌道の自由ホモトピー類に基点となる軌道をとる必要があり、さらにループ空間の適切な被覆空間上で Floer の複体を定義する必要がある。この理論は対象ごとに構築する必要があり、論文提出者折田龍馬はこれらを準備して、定理のの仮定のもとで Ginzburg-Gürel の議論が適用できることを示した。

このように論文提出者の結果は、シンプレクティク多様体のハミルトン力学系の非可縮軌道のふるまいについての多くの知見を与え、今後のシンプレクティク多様体の研究において重要な意味を持つものであり、この分野のこれからの研究の基礎となるものである。よって論文提出者 折田龍馬 は、博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める。