論文の内容の要旨

論文題目

A Categorical Approach for Freeness of Group Actions on C*-algebras
（C*-環への群作用の自由性に対する圏論的アプローチ）

氏　　名　窪田　陽介

同変 KK 理論は，C*-環の位相的性質を調べる非可換トポロジーにおいて主要な道具である．通常の同変トポロジーにおいては自由性というのは群作用の性質のうち最も基本的なものの一つであるが，この自由性の定義を C*-環への作用に自然に一般化することは簡単ではない．アナロジーとしては，現在までに Phillips による K 理論的な定式化と，Izumi によって導入された有限群作用の Rokhlin 性が存在する．

この研究では，C*-環への群の作用の自由性について，三角圏のホモロジー代数的な見地から新しいアプローチを導入し，既存の研究との関係について研究した．また，群作用の Rokhlin 性の亜種である連続 Rokhlin 性がこの見地と相性がよいことを利用して，従ってホモロジー代数的な技術を分類理論に応用した．

第 I 部　自由性の圏論的側面

第 I 部では，同変 Kasparov 圏の相対ホモロジー代数によって C*-環へのコンパクト群作用の自由性を特徴づけ，Atiyah-Segal の完備化定理に圏論的な視点を与えた．

C*-環の K 理論を一般化した二変数の（コ）ホモロジー群である KK 群は，Kasparov 積と呼ばれる操作によってある圏の射の集合とみなすことができる．この圏は Kasparov 圏と呼ばれ，安定ホモトピー圏の C*-環論における類似物である．この圏に局所化や半直交分解などの三角圏の理論を適用することで C*-環のトポロジーを研究するという方針は Meyer–Nest らによって発展され，Baum–Connes 予想の圏論的な理解に応用された．

Meyer–Nest の研究では，群作用を忘れる制限関手の核を法とする“相対”ホモロジー代数を適用することで，相対的な射影分解から三角圏の半直交分解を与えた．このホモロジー代数を適用するための仮定として，群作用を開部分群へ制限するという Kasparopv 圏の間の関手が左随伴を持つことが本質的であった．一方で，作用を余コンパクト部分群へ制限す

る場合には，制限関手は右随伴を持つことが知られている．この事実から議論を始めると，Kasparov 圏に入射的対象と入射分解のホモロジー代数を展開することができる．

ここで，Kasparov 圏の相対入射分解から半直交分解を得るためには三角圏が加算無限直積を持つ必要があるが，通常の同変 Kasparov 圏はこれを満たさないという問題がある．これを避けるため，第 3 節では Bonkat の方法に倣って同変 KK 理論の定義を σ-C*-環（C*-環の可算逆極限）に拡張した．そして，それが通常の KK 理論の持つ様々な性質をやはり持ち，特に σ-C*-環の Kasparov 圏がやはり三角圏の構造を持つことを証明した．

ここで得られた半直交分解 $(\mathcal{TC}, \mathcal{TI}^{\mathrm{loc}})$ の左成分は，群作用を忘れると KK 可縮になる対象のなす部分圏として特徴づけられる．一方，右成分は相対入射次元が有限な対象を含むある部分圏で，自由作用のホモロジー代数的な定式化になっている．実際，入射分解から得られる半直交分解の構成が具体的にどのようなものなのかを精査することで，半直交分解の右側成分に普遍自由 G 空間 EG の関数環のテンソル積，その構成に現れる有限段階の対象が Milnor 構成 E_nG の関数環のテンソル積が自然に現れることが観察された．これは，位相空間 X への G-作用が自由であることと X と $X \times EG$ が同変ホモトピー同値であることの同値性と対応している．また，相対入射次元が有限な対象は，群作用の自由性の特徴づけとして Phillips によって与えられていた条件を満たすことも確認できる．

また，この半直交分解の構成は，一般コホモロジー理論にその同変版を与える Borel 構成を用いた自然な方法と同変 K 理論を比較する Atiyah–Segal の完備化定理の証明と平行している．この対応を観察することで，Atiyah–Segal の完備化定理の三角圏論的な対応物である「同変 KK 群の制限関手の核というイデアルを，より簡単で構造のよくわかっている表現環のイデアルと比較する」という形の定理を証明した．

論文中ではより一般に，与えられた G の部分群（の族）への制限関手から始めて議論を展開している．この場合に得られる Kasparov 圏の半直交分解の構成は，Atiyah–Segal の完備化定理の Adams-Haeberly-Jackowski-May による一般化の証明と平行であり，イデアルの比較定理もこの場合に証明している．Atiyah–Segal の完備化定理を KK 理論に一般化する同種の定理は Uuye によって与えられているが，ここでは定理を適用する仮定を弱めることに成功した．系として，K 群やその元の部分群への制限が十分な情報を持っているという Mclure の制限定理の KK 理論への一般化を得た．

また，応用として，この議論を Meyer-Nest の理論にフィードバックすることで，Baum–Connes 予想の群拡大に関する遺伝性についての先行研究を改良することに成功した．

第 II 部　コンパクト群作用の連続 Rokhlin 性

第 II 部では，第 I 部の理論を C*-力学系（C*-環とそこへの群作用の組）の分類理論に応用する研究を行った．

C*-力学系の分類は C*-環論において中心的な問題の一つである．これは一般には非常に困難であり，現在のところ C*-環に加えて作用のクラスにも制限をかける必要がある．有限群作用の Rokhlin 性は Izumi によって分類可能なクラスとして導入され，UCT-Kirchberg 環

（K 理論によって分類可能な C*-環のクラス）への Rokhlin 作用の分類は K 群とそこへの群 G の作用の組によって与えられた．近年では Rokhlin 次元やコンパクト群作用の Rokhlin 性などの一般化に対して同種の議論から分類などの結果を得ようという試みが続いている．

Rokhlin 性は，同変トポロジーにおける自由性の力学系的なアナロジーである．この変種である連続 Rokhlin 性は，Thomsen による KK 群の完全正漸近的準同型を用いた描像と非常に相性がよい．この自然な帰結として，連続 Rokhlin 性を持つ G-C*-環は相対入射性を持つことを観察した．より一般に，交換する塔を持つ Rokhlin 次元が有限ならば，第 I 部で考えた三角圏論的な意味で群作用が自由になることを証明した．この事実と第 I 部で議論したことを用いて，群作用のホモトピックな変形に関する KK 同値類（Kasparov 圏の中での同値類）の不変性などの結果を得た．

また，この相性の良さによって，KK 理論を連続 Rokhlin 性を持つ G-C*-環の分類理論に応用することができる．KK 理論は（コ）ホモロジー理論であるためホモトピー同値な C*-環を区別できないが，C*-環のクラスを適切に制限することで同型分類を与えることがある．この典型的な例が Kirchberg 環の Kirchberg-Phillips 分類である．ここでは，Kirchberg 環への Hodgkin 性（連結で，基本群がねじれを持たない）を持つ Lie 群の Rokhlin 作用の分類を行った．

まず，連続 Rokhlin 性を持つ G-C*-環が必ず連続関数環 $C(G)$ と不動点環のテンソル積と同変 KK 同値になる（したがって同変 KK 同値類は実質的に $C(G)$ 一種類しか存在しない）ことを証明した．これは有限群作用の場合には見られなかった現象で，ある C*-環が G の連続 Rokhlin 作用を許容するための調べやすい K 理論的な障害を与える．証明には G の Pontrjagin 双対である量子群の Baum–Connes 予想が本質的な役割を果たした．

更に，C*-環のクラスを Kirchberg 環に制限して分類に関する研究を行った．このクラスでは同変 KK 同値な G-C*-環は G-同変に同型になることが確認できる．また，Kirchberg 環への連続 Rokhlin 性を持つ群作用のうち $C(G)$ と同変 KK 同値となるようなモデル作用を具体的に構成することに成功した．従って，上の結果と併せることで，連続 Rokhlin 性を持つ Kirchberg 環の同型類の完全な分類を与えることができる．より正確には，このような C*-力学系が実質的に一種類しか存在しないことがわかる．これは Gardella による $\mathbb{T}^1$ の作用の研究や，Izumi-Matui による $\mathbb{T}^n$（の双対である $\mathbb{Z}^n$）の作用に関する結果を一般化したものになっている．