# 論文の内容の要旨

論文題目: Stability of anti-canonically balanced metrics
(反標準的平衡化計量の安定性)
氏　　名: 斎藤 俊輔

本論文は 2 つの独立な部分から成る．いずれも Fano 多様体を微分幾何学の観点から研究したものである．

## 1　Part 1 (論文 [10])

Part 1 では Kähler-Einstein 計量の有限次元類似である，反標準的平衡化計量について扱う．以下では $X$ を $n$ 次元 Fano 多様体とし，$-kK_X$ は非常に豊富であるとする．$\mathcal{H}(X, -K_X)$ を $-K_X$ 上の滑らかな Hermite 計量 $\phi$ で曲率 $\omega_\phi := (\sqrt{-1}/2\pi)\partial\bar{\partial}\phi$ が正であるようなもの全体とし，$\mathcal{B}_k$ を有限次元ベクトル空間 $H^0(X, -kK_X)$ 上の Hermite 計量全体とする．

Donaldson [3], [5] に従って，(単位体積を持つ) 体積要素 $\nu$ に関する量子化写像 $Hilb_{k,\nu} \colon \mathcal{H}(X, -K_X) \to \mathcal{B}_k$ 及び脱量子化写像 $FS_k \colon \mathcal{B}_k \to \mathcal{H}(X, -K_X)$ を

$$\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle_{Hilb_{k,\nu}(\phi)} := \int_X \langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle_{k\phi}\,\nu, \quad FS_k(H) := \frac{1}{k}\log\left(\frac{1}{N_k}\sum_{\alpha=1}^{N_k}|s_\alpha|^2\right),$$

で定義する．ここで $N_k$ は $H^0(X, -kK_X)$ の次元であり，$(s_\alpha)$ は $H$ に関する正規直交基底である．$H \in \mathcal{B}_k$ が

$$(Hilb_{k,\nu} \circ FS_k)(H) = H$$

を満たすとき，$H$ を $\nu$ に関する $k$ 次平衡化計量という．

平衡化計量の中で最もよく理解されているものは，ファイバー計量 $\phi$ から自然に定まる Monge-Ampère 測度 $MA(\phi) := \omega_\phi^n/(-K_X)^n$ に関する平衡化計量であり，これを単に平衡化計量という．[2] によれば $k$ 次平衡化計量はスカラー曲率一定 Kähler 計量の近似列である．Phong-Sturm [9] は $k$ 次平衡化計量の存在と $(X, -K_X)$ のレベル $k$ での Chow 準安定性が同値であることを示した．これは標準計量の存在と GIT 安定性の同値性に関する Yau-Tian-Doanldson 予想の有限次元版だと考えることができる．以上は Fano 多様体に限らない一般の偏極多様体においても意味を持つことに注意する．

Fano 多様体においてはファイバー計量 $\phi$ は Monge-Ampère 測度とは異なる体積要素 $e^{-\phi}$ を定める．これは $-K_X$ のファイバー計量と $X$ 上の体積要素の同一視により誘導されるものである．$e^{-\phi}$ を正規化し

$$\mu_\phi := \frac{e^{-\phi}}{\displaystyle\int_X e^{-\phi}}$$

とする．$\mu_\phi$ に関する平衡化計量を Donaldson は反標準的平衡化計量と定義した [5]．これは Fano 多様体の特殊性を用いて定義したものであるから Kähler-Einstein 計量の近似列として単なる平衡化計量より相応しいと考えられる．

Phong-Sturm の定理を動機として, 反標準的平衡化計量の存在と関係する代数幾何的な安定性を定義することを考える. このために, 反標準的平衡化計量を臨界点に持つ汎関数である, 量子化された Ding の汎関数

$$D^{(k)}(H) := \frac{1}{kN_k}\log\det H - \log\int_X e^{-FS_k(H)}, \quad H \in \mathcal{B}_k$$

の測地線に沿った微分を考察する.

**定理 1.** $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ を $(X, -K_X)$ の指数 $k$ の正規テスト配位とし, これから定まる $\mathcal{B}_k$ の測地線を $(H_t)_t$ とする. このとき

$$\lim_{t\to\infty}\frac{d}{dt}D^{(k)}(H_t) + q = DF(\mathcal{X}, \mathcal{L}) + Chow_k(\mathcal{X}, \mathcal{L}) \tag{1}$$

が成り立つ. ただし $DF(\mathcal{X}, \mathcal{L})$, $Chow_k(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ は各々 $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ の Donaldson-二木不変量, Chow ウェイトであり, $q$ は $(X, -K_X)$ の中心ファイバーの特異性を反映した非負有理数である.

そこでレベル $k$ で量子化された二木不変量を

$$Fut_k(\mathcal{X}, \mathcal{L}) := kN_k(DF(\mathcal{X}, \mathcal{L}) + Chow_k(\mathcal{X}, \mathcal{L}))$$

で定義し, その符号を用いて新しい安定性を定義する:

**定義 2.**
1. $X$ がレベル $k$ で F 半安定であるとは, 任意の指数 $k$ のテスト配位 $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ に対して $Fut_k(\mathcal{X}, \mathcal{L}) \geq 0$ であること;
2. $X$ がレベル $k$ で F 準安定であるとは, $X$ はレベル $k$ で F 半安定でかつ $Fut_k(\mathcal{X}, \mathcal{L}) = 0$ となるのは $\mathcal{X} \cong X \times \mathbb{C}$ のときに限ること;
3. $X$ がレベル $k$ で F 安定であるとは, $X$ はレベル $k$ で F 半安定でかつ $Fut_k(\mathcal{X}, \mathcal{L}) = 0$ となるのは ($\mathbb{C}^*$ 作用を込めて) $\mathcal{X} \cong X \times \mathbb{C}$ のときに限ること;
4. $X$ が漸近的 F (半/準) 安定であるとは, 十分大きい任意の $k$ に対して $X$ がレベル $k$ で F (半/準) 安定であること.

定理 1 より次を得る:

**定理 3.** $k$ 次反標準的平衡化計量を持つ Fano 多様体はレベル $k$ で F 準安定である.

これは Phong-Sturm [9] の反標準的類似である. また F 安定性は他の安定性と次のような関係にある:

**定理 4.**
1. 漸近的 Chow (半/準) 安定ならば漸近的 F (半/準) 安定である.
2. 一様 K 安定ならば漸近的 F 安定である.
3. 漸近的 F 半安定ならば K 半安定である.

定理 1 を Donaldson [4] の議論と組み合わせることで Donaldson の不等式の Fano 多様体における類似物を得る.

**定理 5.** $p, q$ を, $1/p + 1/q = 1$ を満たす任意の正の偶数とする. 任意の Hermite 計量 $\phi \in \mathcal{H}(X, -K_X)$ と $p$ ノルムが 0 でない正規テスト配位 $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ に対して, 不等式

$$\left(\int_X \left|\frac{n!\mu_\phi}{\omega_\phi} - \frac{n!}{(-K_X)^n}\right|^q \frac{\omega_\phi^n}{n!}\right)^{1/q} \geq -\frac{DF(\mathcal{X}, \mathcal{L})}{||(\mathcal{X}, \mathcal{L})||_p},$$

が成り立つ.

この不等式は既に [8] において得られているが, アプローチが異なる. 我々は定理 1 を用いて各レベル $k$ で対応する不等式を証明し, その後 $k$ に関する極限を取る.

以上の内容は高橋良輔氏との共同研究に基づく.

## 2 Part 2 (論文 [7])

Part 2 では Ricci 曲率が下に有界な Fano 多様体の列 $(X_i, \omega_i)$ の Gromov-Hausdorff 極限—Fano-Ricci 極限空間—を扱う.

$\omega$ を $2\pi c_1(X)$ を代表する $X$ 上の Kähler 計量とし, $F \in C^\infty(X, \mathbb{R})$ を $\omega$ の Ricci ポテンシャル, すなわち $\mathrm{Ric}(\omega) - \omega = \sqrt{-1}\partial\overline{\partial}F$ で定まる関数とする. 重み付き $\overline{\partial}$ ラプラシアン $\Delta^F_{\overline{\partial}}$ とは

$$\Delta^F_{\overline{\partial}} u := e^{-F}\overline{\partial}^*(e^F\overline{\partial}u), \quad u \in C^\infty(X, \mathbb{R})$$

で定義される, 重み付き $e^F\omega^n$ に関して自己随伴な楕円型微分作用素である. 二木 [6] は Weitzenböck 公式

$$\int_X |\Delta^F_{\overline{\partial}} f|^2\, e^F\omega^n = \int_X |\nabla''\mathrm{grad}' f|^2\, e^F\omega^n + \int_X |\overline{\partial}f|^2\, e^F\omega^n \tag{2}$$

を用いて $\Delta^F_{\overline{\partial}}$ の第一固有値が 1 以上であること, およびその 1 固有空間 $\Lambda_1$ と正則ベクトル場のなす Lie 代数 $\mathfrak{h}(X)$ が Lie 代数として同型であることを示した. さらに Tian-Zhu [12] は二木の定理を用いて, $X$ が Kähler-Ricci soliton を許容するとき, すなわち $-\mathrm{grad}'F$ が $X$ 上の正則ベクトル場を定めるとき,

$$\mathfrak{h}(X) = \mathfrak{h}_0(X) \oplus \bigoplus_{\alpha>0} \mathfrak{h}_\alpha(X) \tag{3}$$

が成り立つことを示した. ここで $\mathfrak{h}_\alpha(X)$ は $-\mathrm{grad}'F$ の随伴作用の $\alpha$ 固有空間であり, $\mathfrak{h}_0(X)$ は極大簡約部分 Lie 代数である. これは Kähler-Einstein 計量に対する松島の定理の拡張である. このように Fano 多様体では重み付き $\overline{\partial}$ ラプラシアンと正則ベクトル場は深い関係にある.

一方で Chen-Donaldson-Sun [1], Tian [11] による Kähler-Einstein 計量の存在証明において, 正則ベクトル場のなす Lie 代数が重要な役割を果たした. Kähler-Einstein 計量の存在を証明しようとすると自然に Ricci 曲率が上下に有界な Fano 多様体の列が現れる. この列の Gromov-Hausdorff 極限 $X_\infty$ は $\mathbb{Q}$-Fano variety になり, 特異点集合を除いた部分は (錘特異点を持つ) Kähler-Einstein 計量を許容する. このとき $X_\infty$ の正則ベクトル場のなす Lie 代数は簡約的であることが成り立つ. これは松島の定理の特異空間への拡張である. この事実と代数幾何的な議論により K 安定性から Kähler-Einstein 計量の存在が示される. 松島の定理を示す際, Chen-Donaldson-Sun は Ding の汎関数の凸性を用いたのに対し, Tian は測度付き Gromov-Hausdorff 位相に関する $\overline{\partial}$ ラプラシアンの固有値の連続性を用いた. 前者の方法では簡約的であること以上のことはわからないが, 後者の方法をより洗練させることで一般の Fano 多様体の列の Gromov-Hausdorff 極限においても二木の定理, 及び Tian-Zhu の定理が成り立つと期待できる.

Fano 多様体の列 $(X_i, \omega_i)$ で, Ricci 曲率の下からの一様な評価 $\mathrm{Ric}(\omega_i) \geq K\omega_i$, 直径の上からの一様な評価, $||F_i||_{L^\infty}$ の上からの一様な評価, 及び $F_i$ と複素構造 $J_i$ が $L^2$ 強収束することを仮定し, その非崩壊 Gromov-Hausdorff 極限 $(X_\infty, d_\infty)$ を考える. Ricci 曲率の上からの評価は仮定されていないため, $X_\infty$ は弱い意味での $C^{1,1}$ 構造しか持たないことに注意する.

まず $X_\infty$ における重み付き $\overline{\partial}$ ラプラシアンが定義されることを示す．これは部分積分の公式を定義として採用してしまうことで成される．次に示すべきは (2) に対応する Weitzenböck 公式であるが，これは各 $X_i$ における (2) を考えて $i \to \infty$ とすることで得られる:

**定理 6.**

$$\int_X |\Delta^F_{\overline{\partial}} f|^2 \, e^F \omega^n \geq \int_X |\nabla'' \mathrm{grad}' f|^2 \, e^F \omega^n + \int_X |\overline{\partial} f|^2 \, e^F \omega^n. \tag{4}$$

特に $\Delta^F_{\overline{\partial}}$ の第一固有値について $\lambda_1(\Delta^F_{\overline{\partial}}, X) \geq 1$ が成り立つ．

後半については重み付き $\overline{\partial}$ ラプラシアンの固有値の連続性を用いても証明できる．いずれも Gromov-Hausdorff 位相に関する Rellich のコンパクト性定理を用いる．

$\Delta^F_{\overline{\partial}}$ の 1 固有空間 $\Lambda_1$ の構造を考える．$X_\infty$ においても滑らかな場合と同様に Poisson 構造を定義することはできるが，$\Lambda_1$ が Poisson ブラケットで閉じているかは不明である．また $X_\infty$ は非常に弱い構造しか持たないため，正則ベクトル場という概念は形式的にしか意味を持たない．そこで $X_\infty$ の正則点集合が滑らかな Kähler 多様体となる場合を考える．例えば各 $(X_i, \omega_i)$ が Kähler-Ricci soliton のとき，極限 $X_\infty$ は Kähler-Ricci soliton を許容する $\mathbb{Q}$-Fano variety となる．

**定理 7.** $X_\infty$ が Kähler-Ricci soliton を持つ $\mathbb{Q}$-Fano variety であり，$X_\infty$ 上の任意の正則ベクトル場が $L^2$ であるとき，$\mathfrak{h}(X)$ は (3) と同じ分解を持つ．

以上の内容は二木昭人氏，本多正平氏との共同研究である．

## 参考文献


[1] X. X. Chen, S. K. Donaldson and S. Sun, *Kähler-Einstein metrics on Fano manifolds, III: limits as cone angle approaches* $2\pi$ *and completion of the main proof*, J. Amer. Math. Soc., **28**(2015), 235–278.

[2] S. Donaldson, *Scalar curvature and projective embeddings, I*, J. Diff. Geom. **59** (2001), 479–522.

[3] S. Donaldson, *Scalar curvature and projective embeddings, II*, Quart. J. Math., **56** (2005), 345-356.

[4] S. K. Donaldson, *Lower bounds on the Calabi functional*, J. Diff. Geom., **70** (2005), 453–472.

[5] S. K. Donaldson, *Some numerical results in complex differential geometry*, Pure Appl. Math., **5** (2009), 571–618.

[6] A. Futaki, *Kähler-Einstein metrics and integral invariants*, Lecture Notes in Mathematics, 1314. Springer-Verlag, Berlin, 1988.

[7] A. Futaki, S. Honda and S. Saito, *Fano-Ricci limit spaces and spectral convergence*, To appear in Asian J. Math., arXiv:1509.03862.

[8] T. Hisamoto, *On the limit of spectral measures associated to a test configuration of a polarized Kähler manifold*, J. reine angew. Math., **713** (2016), 129-148

[9] D. H. Phong and J. Sturm, *Stability, Energy Functionals, and Kähler-Einstein Metrics*, Commun. Anal. Geom., **11** (2003), no. 3, 565–597.

[10] S. Saito and R. Takahashi, *Stability of anti-canonically balanced metrics*, preprint. arXiv:1607.05534.

[11] G. Tian, *K-stability and Kähler-Einstein metrics*, Commun. Pure Appl. Math., **68** (2015), 1085–1156.

[12] G. Tian and X. Zhu, *A new holomorphic invariant and uniqueness of Kähler-Ricci solitons*, Comment. Math. Helv. **77** (2002), no. 2, 297-325.