論文の内容の要旨

論文題目

Mathematical analysis of the method of fundamental solutions with its application to fluid mechanics and complex analysis
（基本解近似解法の数学解析およびその流体力学，複素解析への応用）

氏名

榊原 航也

基本解近似解法 (Method of Fundamental Solutions, MFS) は線型同次偏微分方程式に対するメッシュフリー解法である．そのアイディアを説明するために，次の問題を考えよう：

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = 0 & \text{in } \Omega, \\ \mathcal{B}u = f & \text{in } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

ただし, Ω は滑らかな境界を持つ平面内の有界領域, $\mathcal{L}$ は線型偏微分作用素, $\mathcal{B}$ は Dirichlet, Neumann, Robin 条件のような境界条件である．この問題に対して，MFS は以下の手順で近似解を与える．

(i) Ω の外部から "適当に" 特異点 $\{y_k\}_{k=1}^{N}$ を取る．
(ii) 近似解 $u^{(N)}$ を次で構成する：

$$u^{(N)}(x) = \sum_{k=1}^{N} Q_k E(x - y_k).$$

ただし，E は作用素 $\mathcal{L}$ の基本解である．よって，$u^{(N)}$ は (1) の第 1 式を厳密に満たすことを注意しておく．

(iii) 係数 $\{Q_k\}_{k=1}^N$ は選点法により定められる．すなわち，$\partial\Omega$ 上に “適当に” 選点 $\{x_j\}_{j=1}^N$ を取り，次の “近似” 境界条件を課す：

$$\mathcal{B}u^{(N)}(x_j) = f(x_j), \quad j = 1, 2, \ldots, N.$$

これが MFS のアルゴリズムである．つまり，有限要素法 (Finite Element Method, FEM) や差分法 (Finite Difference Method, FDM) と異なり，メッシュ分割を必要としない数値計算手法である．さらに，特異点や選点が “適当に” 選ばれれば，近似誤差が N に関して指数的に減衰することも知られている．これは，近似誤差が代数的に減衰する FEM や FDM との大きな違いである．さらに，MFS の実装は非常に容易であることも相俟って，MFS は工学の分野などで積極的に用いられている．その一方で，FEM や FDM とは異なり，MFS に対する数学理論は完成には程遠い．それは，MFS は数値計算手法であるにもかかわらず，FEM や FDM の解析で用いられる，領域のメッシュ分割に基づいた議論を用いることができないからである．つまり，MFS は数値解析の立場というよりは，むしろ純粋数学の立場から調べる必要性が高く，本論文で示されるように，複素解析，ポテンシャル論（偏微分方程式論），超函数論，函数解析の結果などをうまく組み合わせながら用いることで，数学解析を行っている．数学的な支持がない状態で MFS は様々な問題に適用されてきているが，それらの結果を数学的に保証する理論が必要なのは言うまでもない．本論文では，そのような背景の下で以下に問題を絞った．

- ポテンシャル問題ならびに重調和問題に対する MFS の理論構築.
- MFS 流体力学ならびに複素解析の問題に対する信頼できる数値計算スキームの構築.

以下，本論文の構成をまとめる．

第 I 部では，MFS の数学解析を行った．第 1 章に，必要とされる数学の道具をまとめておいた．具体的には，通常の Sobolev 空間を含む Hilbert 空間の族，領域の境界近傍で定義された等角写像 (peripheral conformal mapping)，ポテンシャル論における基本理論，領域の大きさを測る容量の概念，離散 Fourier 変換の同型性，2 つの円環領域の直積上で定義された函数の Fourier 係数の評価，を述べている．

第 2 章では，2 重連結領域におけるポテンシャル問題に対する MFS の数学解析を行った．問題を正確に述べよう．Ω を複素平面内の非退化な 2 重連結領域とする．すなわち，互いに素な連結成分 K_1, K_2 が存在して，$\hat{\mathbb{C}} = K_1 \sqcup K_2$，$K_1$ は $\infty \in \mathring{K}_1$ の意味で非有界であり，K_1, K_2 のどちらも 1 点に縮退しないとする．ここで，$\hat{\mathbb{C}}$ は拡張された複素平面，$\mathring{K}_\nu$ は K_ν の内部を表す．そして，次のポテンシャル問題を考える：

$$\begin{cases} \triangle u = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = f_\mu & \text{on } \Gamma^\mu,\ \mu = 1, 2. \end{cases}$$

ただし，Γ^μ は K_μ の境界 ∂K_μ を表し，f_μ は Γ^μ 上で与えられた函数である．先行研究では，Jordan 領域においては詳細な研究があるが，多重連結領域に目を向けてみると，Murota [74] を除いて満足すべき結果は得られていない．そこで，本章では，多重連結領域におけるポテンシャル問題に対する MFS の数学理論の構築の第一歩として，2 重連結領域におけるポテンシャル問題を詳しく調べることにした．結果とすれば，特異点ならびに選点を 2 つの peripheral conformal mapping を用いて配置することで，近似解が一意に存在し，かつ誤差が N に関して指数的に減衰することが示された．第一に円環領域で詳しく MFS を解析し，第二に一般の領域の問題を円環領域の問題のコンパクトな摂動と捉えることで，上記の結果を得ることができた．

第 3 章では，MFS の派生版の 1 つである，双極子法 (Dipole Simulation Method, DSM) を Jordan 領域で調べた．ポテンシャル問題に対する MFS による近似解は，解の一重層ポテンシャル表現の離散化であると解釈することができるが，一般に，ポテンシャル問題の解は二重層ポテンシャル表現で与えられることが知ら

れている．そこで，MFS における基底関数（対数ポテンシャル）を双極子ポテンシャルに置き換えることで得られる近似のことを，DSM と呼ぶのである．本章では，MFS と比べてまだ理論の発達が十分でない DSM を，Jordan 領域におけるポテンシャル問題に適用し，近似解の一意存在ならびに誤差の指数的減衰を示すことに成功した．

第 4 章では，対象とする問題を重調和問題に拡張した．つまり，Ω を滑らかな境界を持つ平面内の Jordan 領域とした時，次の問題を考える：

$$\begin{cases} \triangle^2 u = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = f & \text{on } \partial\Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = g & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2}$$

通常の MFS のスキームでは，重調和作用素に対する基本解 $F(x) = (8\pi)^{-1}|x|^2 \log|x|$ と，Laplace 作用素に対する基本解 $E(x) = (2\pi)^{-1}\log|x|$ を用いて，次の形の近似解を与える：

$$u^{(N)}(x) = \sum_{k=1}^{N} \left(Q_k^{(1)} E(x - y_k) + Q_k^{(2)} F(x - y_k) \right).$$

ところで，この形の近似式は実は解析しづらく，今までに数学的な結果はほとんど示されいない．一方で，重調和函数 u は，2 つの調和函数 p, q を用いて，次の形に分解できることが知られている：

$$u(x) = p(x) + |x|^2 q(x).$$

この分解は Almansi 型分割として知られているものである．この分割によれば，(2) に対する近似解は次の形で求められることになる：

$$u^{(N)}(x) = \sum_{k=1}^{N} \left(Q_k^p + |x|^2 Q_k^q \right) \log|x - y_k|.$$

本章では，この Almansi 型分割に基づいた MFS の理論構築の第一歩として，Ω が円板領域である場合を考え，近似解の一意存在ならびに誤差の指数的減衰を証明した．

第 5 章では，ポテンシャル問題に対する MFS のスキームの改良を行った．第 2 章で示されることであるが，通常の MFS のスキームは，本来ポテンシャルの解が満たすべき不変性を満たさない．そこで，Murota [73] は，不変性を満たすように MFS のスキームを次のように改良した：

$$u^{(N)}(x) = Q_0 \sum_{k=1}^{N} Q_k E(x - y_k), \quad \sum_{k=1}^{N} Q_k = 0.$$

つまり，基底函数に定数函数を加え，それにより 1 つ増えた自由度を，$\{Q_k\}_{k=1}^N$ の平均が 0 という条件を付加することで処理している．この近似解 $u^{(N)}$ は不変性の性質を満たすことがわかり，数学理論の観点から見ても，通常スキームと遜色ない結果をもたらしてくれる．その一方で，平均 0 の条件は非常に強いものであり，より一般的な条件を付け加えた場合を扱いたいことがある．その点から，本章では，次の形の近似解を導入した：

$$u^{(N)}(x) = Q_0 + \sum_{k=1}^{N} E_k(x), \quad E_k(x) = E(x - y_k) - E(x - z_k), \quad \sum_{k=1}^{N} Q_k H_k = 0.$$

ここで，$\{z_k\}_{k=1}^N \subset \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$ は特異点とは異なる仮想点であり，$\{H_k\}_{k=1}^N$ は重みである．このようにして定義された近似解 $u^{(N)}$ は，平均 0 の条件なしに不変性を満たすため，従来課されていた条件の代わりに，より一

般的な重み付き平均 0 の条件を課すことができる．この改良により，次章で考えられる Hele-Shaw 問題に対して，構造保存型の数値計算スキームを構築することができるようになった．本章では，このスキームを円板領域で調べ，近似解の一意存在，ならびに誤差の指数的減衰を示した．

第 II 部では，MFS の流体力学ならびに複素解析への応用を行った．第 6 章では，準 2 次元流れとして知られている，Hele-Shaw 問題に対する，構造保存型数値計算スキームを構築した．Hele-Shaw 問題とは，Henry Selby Hele-Shaw により 1898 年に Nature に発表された実験論文に端を発するものである．そこでは，粘性流体が，非常に狭い間隙を持つ 2 枚の平行平板の間に挟まれており，この装置は Hele-Shaw セルと呼ばれる．彼は，そのセル内で着色水を用いて流線を可視化することに成功した．その後の研究の発展でも，多相流体に見受けられる指状不安定性のメカニズムを調べるためのもっとも簡潔なモデルとして，今日に至るまで，非常に盛んに研究されてきた．もっとも古典的な Hele-Shaw 問題は，次のように定式化される：

$$\begin{cases} \triangle p(\cdot,t) = 0 & \text{in } \mathscr{D}(t),\, t \in (0,T], \\ p(\cdot,t) = \gamma k(\cdot,t) & \text{on } \mathscr{C}(t),\, t \in (0,T], \\ V(\cdot,t) = -\nabla p(\cdot,t)\cdot \boldsymbol{N}(\cdot,t) & \text{on } \mathscr{C}(t),\, t \in (0,T]. \end{cases}$$

ただし，$\mathscr{D}(t) \subset \mathbb{R}^2$ は流体が占める有界領域，$\mathscr{C}(t)$ は $\mathscr{D}(t)$ の（正に向き付けられた）境界，γ は表面張力係数，$k(\cdot,t)$ は曲率，$\boldsymbol{N}(\cdot,t)$ は $\mathscr{C}(t)$ 上の外向き単位法ベクトルである．この Hele-Shaw 問題の解は，周長減少 $(\partial_t|\mathscr{C}(t)| \leq 0)$，面積保存 $(\partial_t|\mathscr{D}(t)| = 0)$，重心不変という幾何学的変分構造を持つ．したがって，近似解もこれらの性質を何らかの意味で離散的に満たすのが自然であると考えられるが，この点に着目して構築された数値計算スキームは存在しない．そこで，本章では，前章で改良された MFS，ならびに点の一様配置法を組み合わせることで，上の性質を漸近的に保存するスキームを構築することに成功した．

第 7 章では，複素解析への応用として，等角写像の簡便な数値計算スキームを開発した．数学的には，Ω を複素平面内の Jordan 領域とした時，

(i) ポテンシャル問題
$$\triangle u = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad u(z) = -\log|z - z_0| \quad \text{on } \partial\Omega$$
の解として u を与え，

(ii) v を u の共役調和函数で $v(z_0) = 0$ を満たすものとして求め，

(iii) $f(z) = (z - z_0)\exp[u(z) + \mathrm{i}v(z)]$ により f を定める

ことで，Ω から単位円板の上への等角写像 f で，正規化条件 $f(z_0) = 0$, $f'(z_0) > 0$ を満たすものが求められたことになる．Amano [2] は，MFS に基づいて上の問題を解き，簡便な数値計算スキームを開発したのであるが，u の近似が対数ポテンシャルの近似で与えられることから，v の近似に偏角を与える函数 arg が現れてしまう．この函数の処理にはある程度の工夫が必要であり，その点で，実装がやや困難になってしまっているきらいがある．そこで，本章では，MFS を DSM に置き換えることで，より簡便な数値計算スキームが得られることを示し，さらに今までに考えられていなかった，誤差の振る舞いについても考察した．

第 8 章では，正則函数の補間を与える，複素双極子法 (Complex Dipole Simulation Method, CDSM) を提唱した．具体的には，DSM を正則函数の実部と考えることで，正則函数に対する次の近似式を導出した：

$$f^{(N)}(z) = \sum_{k=1}^{N} Q_k H(z,\zeta_k), \quad H(z,\zeta) = \frac{1}{z-\zeta}.$$

これは，Cauchy の積分表示の離散版であるとみなすことができる．この手法を円盤領域，ならびに円板の外部領域で解析し，近似函数が一意に存在すること，ならびに誤差が指数的に減衰することを証明した．