論文の内容の要旨

論文題目　Scaling limits in stochastic heat equation and stochastic chain model
(確率熱方程式および確率鎖模型に対するスケール極限)

氏　　名　徐　路

自然界における流体の運動やエネルギーの拡散などの巨視的な物理現象は, その背後にある微視的な粒子の運動によって決定される. 非線形偏微分方程式などで記述されるマクロなダイナミクスを, ミクロな原子や分子の状態の時間発展から導出する際に使用する重要な手法として時空スケール極限があり, それは数学物理の幅広い分野に応用されている. ミクロなレベルで考察される系は膨大な粒子数と自由度を持ち, 粒子の間ではランダムな相互作用が発生することが想定され, その時間発展は一般的に確率過程で記述される. ミクロな確率過程に対し, 時間と空間について適切なオーダーの比でスケール変換を行い, その均質化現象からマクロなダイナミクスを数学的に特徴付けることは, スケール極限と呼ばれている. とくに平衡揺動とは, ミクロな系が平衡状態にあるとき, その揺らぎのスケール極限を扱う研究テーマであり, 古典的な中心極限定理の拡張でもある.

本博士論文では, 物理的に興味深い二つのモデルに対し, それぞれのスケール極限を調べた. 第一章では, 連続な空間で定義される確率偏微分方程式にランダムな非線形項（ランダム環境）を与え, 無限次元拡散過程の視点から均質化問題を論じた. 第一章で用いるアプローチは, 主に粒子の位置から観察された「環境過程」, 解のパスに対するマルチンゲール分解とランダム環境内の粒子の挙動を扱う Kipnis-Varadhan 理論である. 第二章では, 離散的な格子空間上のハミルトン系によって定義される振動子鎖モデルに適切なランダム作用を加え, 平衡揺動のスケール極限を調べた. 第二章で使用した手法は, 主に局所関数の時空分散 (space-time variance) を線型関数を用いて近似する Boltzmann-Gibbs 原理である. このアプローチに不可欠であるスペクトルの跳びの評価についても深く議論した.

本博士論文の構成は以下の通りである. 第一章では, ランダム環境における確率熱方程式の軟解に対する中心極限定理を示した. 第二章では, 運動量とエネルギーを保存する確率的摂動を加えた古典的ハミルトン系の平衡揺動に対するスケール極限定理を示した.

1　ランダム環境における確率熱方程式に対する中心極限定理

第一章ではランダム環境における確率熱方程式の均質化問題を調べ, 解に対する中心極限定理を示した. 本章では, 0-Neumann 境界条件を持つ [0, 1] 区間上の確率熱方程式にさらにランダム

な非線形項を加え, 次の方程式を考えた:

$$\begin{cases} \partial_t u^\sigma(t,x) = \dfrac{1}{2}\partial_x^2 u^\sigma(t,x) - DV(\sigma, u^\sigma(t)) - B(\sigma, u^\sigma(t)) + \dot{W}(t,x),\ x \in (0,1), \\ \partial_x u^\sigma(t,x)|_{x=0} = \partial_x u^\sigma(t,x)|_{x=1} = 0, \\ u^\sigma(0,x) = v(x). \end{cases} \tag{1}$$

但し $\dot{W}$ は時空ワイトノイズであり, $\sigma \in \Sigma$ はある確率空間の元で「環境のランダムさ」を表現する変数である. $(V,B) : \Sigma \times L^2([0,1]) \to \mathbb{R} \times L^2([0,1])$ は滑らかなパスを持つランダム場であり, その分布に対し以下の二つ条件を仮定する.

(i) (V,B) の分布はパス空間 $\Sigma_{path} = C(L^2([0,1]); \mathbb{R} \times L^2([0,1]))$ の上で次のように定義される変換群 $\{\tau_c; c \in \mathbb{R}\}$ に対し定常かつエルゴード的である:

$$\tau_c \circ \phi \triangleq \phi(\cdot + c\mathbf{1}),\ \forall \phi \in \Sigma_{path}.$$

但し $\mathbf{1}$ は $[0,1]$ 上で $\mathbf{1}(x) = 1$ を満たす定数関数を表す.

(ii) $\delta(e^{-2V}B) = 0$ がほとんどすべてのパスに対し成り立つ. 但し δ はウィーナー空間上の Malliavin 微分作用素に対応する発散作用素である.

これらの条件の下で, 定理 1.1 では $t \to \infty$ のときに $u^\sigma(t)/\sqrt{t}$ の分布が環境 σ のランダムさに対し L^1 の意味で一次元ガウス分布と $[0,1]$ での定数関数の積に弱収束することを示し, その極限分布の自己拡散係数を導出した. さらに定理 1.5 では, V が確定的かつ周期的, しかも $B = 0$ であるときに (例 1.4), $u(t)$ に対する不変原理 (invariance principle) を証明した. なお, 定理 1.1 では σ に対し L^1 の意味での収束 (annealed convergence) を論じたが, ほとんどすべてのパスに対する収束 (quenched convergence) にはまだ至っていない. 当結論をパスごとの収束に拡張するには, Weyl の分解と劣一次性の評価等, 多数の課題が残されている.

方程式 (1) はランダム環境における無限次元拡散過程の典型例である. ランダム環境における有限次元拡散過程の均質化問題は, 1970, 80 年代に Kozlov, Papanicolaou-Varadhan による研究をはじめ多くの結果が得られているが, 無限次元拡散過程に対する同様の研究は今までほとんどされていない. ランダム媒質内の確率過程を研究する際に, 粒子の視点から環境を観察する環境過程を考えるのは最も基本的なアプローチである. 本研究ではこの手法を非線形モデルに拡張し, 無限次元拡散過程の生成作用素理論を用いて環境過程の定常分布とエルゴード性を調べた. さらにランダム環境内の粒子の挙動に対するスケール極限等を扱う Kipnis-Varadhan 理論の無限次元化を行い, 定理 1.1 の証明を環境過程に対する汎関数中心極限定理に帰着した. なお, このモデルの特別な例として定理 1.5 で議論された周期的ポテンシャルを持つ確率熱方程式があり, それは物理では sine-Gordon 模型と呼ばれ, 自然な研究対象となっている.

2 確率鎖モデルに対する平衡揺動

第二章では, ハミルトン系で定まる一次元格子上の振動子鎖モデルに運動量とエネルギーを保存するノイズを加え, 平衡揺動の双曲型（hyperbolic）スケール極限を論じた. 具体的には, 質量 1 の振動子が構成する一次元無限鎖を考えた. 各粒子を $x \in \mathbb{Z}$ を用いて番号を付け, それぞれの運

動量を p_x, 位置を q_x で表す．連続する二つの粒子の間の距離を表すため, 変数 $r_x = q_x - q_{x-1}$ を導入し, ミクロな系の状態を $\{(p_x, r_x); x \in \mathbb{Z}\}$ で表す．粒子 x と $x+1$ の間ではポテンシャル関数 $V(r_x)$ が定める相互作用が発生する．但し V は滑らかな狭義凸関数であると仮定する．この振動子鎖に対し, 形式的に次のハミルトニアン $\mathscr{H}$ を考える:

$$\mathscr{H} = \sum_{x\in\mathbb{Z}} e_x, \text{ 但し } e_x \triangleq \frac{p_x^2}{2} + V(r_x), \ \forall x \in \mathbb{Z}.$$

このモデルにおいて, ミクロなダイナミックスは $\mathscr{H}$ に関するハミルトン方程式で表される．

$$\begin{cases} p_x'(t) = V'(r_{x+1}(t)) - V'(r_x(t)), \\ r_x'(t) = p_x(t) - p_{x-1}(t). \end{cases}$$

上記のハミルトン方程式は局所的に三つの保存則（運動量 $\sum p_x$, 長さ $\sum r_x$ とエネルギー $\mathscr{H}$）を持つ．本章では, これらの保存則を保つ連続型ランダムノイズを上記の方程式に加え, マクロなダイナミックスを研究した．このとき, ミクロなダイナミクスは三つのパラメータ β（温度の逆数）, $\bar{p}$（平均運動量）と λ（張力）から決まる平衡 Gibbs 測度 $\pi^{\beta,\bar{p},\lambda}$ を持つ．ミクロな鎖が平衡状態 $\pi^{\beta,\bar{p},\lambda}$ にあるとき, 保存量たちの揺らぎに注目し, 双曲型時空間スケール変換の下で平衡揺動の経験測度を次のように定義する:

$$\mathbb{P}_N(dy) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{b\in\mathbb{Z}} \begin{bmatrix} p_x(Nt) - \bar{p} \\ r_x(Nt) - \bar{r} \\ e_x(Nt) - \bar{e} \end{bmatrix} \delta_{\frac{x}{N}}(dy)$$

但し, $(\bar{p}, \bar{r}, \bar{e})$ はローカル関数 (p_x, r_x, e_x) の $\pi^{\beta,\bar{p},\lambda}$ の下での期待値である．

無限鎖モデルに対する平衡揺動の考察には, 同じ相互作用を持つ有限鎖の生成作用素に対するスペクトルの跳びを評価することが不可欠である．本章の定理 2.2 では, 対応する有限鎖のスペクトルの跳びの一様評価を前提とし, $\mathbb{P}_N$ が $N \to \infty$ のときに確定的な（つまりランダムさの消えた）線形オイラー系で定まる定常ガウス過程の分布に弱収束することを示した．そして定理 2.4 では, 調和と非調和なポテンシャルに対し, スペクトルの跳びの一様評価が成り立つための条件を議論した．なお, 定理 2.2 では双曲型スケール極限を示したが, より長い時間のスケーリングの下でエネルギーの時間発展を解明するためには, 閉形式の構造の解明や生成作用素に対する sector 条件の証明など, 多数の課題が残されている．本章の内容は, Stefano Olla 氏との共同研究に基づいている．

ハミルトン系で定義される格子上のミクロな時間発展のマクロなダイナミクスを研究することは, 統計力学における基本的なテーマである．この問題に対し数学的な解析を厳密に行うため使用されている最も重要な手法は, ハミルトン系にランダムな摂動を加えスケール極限を証明することである．とくに Fermi-Pasta-Ulam 鎖等, 非線形な相互作用を有する確定的ハミルトン系ではエルゴード性が成り立たないことが計算機実験により検証され, 十分なエルゴード性を与えるため確率的ノイズが不可欠である．一方で, ハミルトン系には自然に運動量, 長さとエネルギーの三つの保存則があり, その内運動量の保存則をノイズが保つか否かは, スケール極限に大きく影響する．調和な相互作用を持つ振動子鎖に対し, ノイズが運動量を保存する場合にはエネルギーが超拡散型 (superdiffusive) の挙動を持つことが, 最近 Jara-Komorowski-Olla による研究で証明された．非調和振動子鎖に対しては, 2013 年の Olla-佐々田による研究があり, エネルギーのみを保存するノイズを採用し, エネルギーの拡散型スケール極限を示した．しかし, 運動量と長さも同時に

保存する非調和鎖モデルに対する研究は, その技術的な困難のためまだ十分に展開されていないのが実状である. 本章の研究は, Olla-佐々田のアプローチに啓発されたものであるが, 三つの保存則を持つ非調和鎖における平衡揺動のマクロなダイナミックスを解明する最初の試みである. なお, 定理 2.4 で議論されたスペクトルの跳びの評価は, 2003 年の Carlen-Carvalho-Loss の研究により解明された 3 次元 Kac ウォークに対する同様の問題等, ほかの多数の格子モデルに対する研究にも密接に関係している.