

論文審査の結果の要旨

氏名 徐路

論文提出者 徐路 は、提出論文において、ランダムな環境内にある確率熱方程式、および古典的ハミルトン系の一種である 1 次元鎖模型に運動量とエネルギーの保存則を壊さないように確率的摂動を加えたモデルに対して、それぞれスケール極限の問題を考察した。まず、連続な空間である 1 次元単位区間上で定義された確率偏微分方程式にランダム環境を表すランダムな非線形項を加え、無限次元拡散過程の観点から均質化問題を論じた。主結果は中心極限定理として定式化されるが、その証明の主要な点は、着目粒子から見た環境過程や解のパスに対するマルチンゲール分解を用いてランダム環境内の粒子の挙動を論ずる Kipnis-Varadhan 理論を無限次元化することにある。次に、離散的な 1 次元格子上のある種のハミルトニアンから定まる振動子鎖模型に、ランダムな摂動を加え、平衡状態にある系に対して揺動場のスケール極限の問題を論じている。その主要なステップは、ミクロな系の関数を線形な関数で置き換える、いわゆる Boltzmann-Gibbs 原理を示すことにある。この手法を用いる際に不可欠なスペクトルの跳びについても最良の評価を得ている。

論文提出者は、ランダム環境における確率偏微分方程式として、Neumann 境界条件を持ち時空ホワイトノイズで揺動された単位区間上の熱方程式に、さらにホワイトノイズとは別のランダムさを持つ非線形項を加えた方程式を考えた。この方程式の解について、時間 t を大きくするとき、 \sqrt{t} で割ったものの分布が、環境変数のランダムさについて L^1 の意味で、単位区間上の定数関数にガウス分布を持つ確率変数をかけたものに弱収束することを示し、極限分布の拡散係数の表示を導き、その非退化性を示した。さらに、非線形項が周期的なときに、解に対する不変原理を証明した。論文提出者が考察したランダム環境内の確率熱方程式は、ランダム環境における無限次元拡散過程の典型例である。ランダム環境内の有限次元拡散過程の均質化問題は、Kozlov や Papanicolaou-Varadhan による研究以来、多くの結果が得られているが、無限次元拡散過程に対する同様の研究はこれまでほとんどなされていない。ランダム環境内の確率過程を研究する際に、着目粒子から環境を観察する環境過程を考えるのが、基本的なアプローチである。論文提出者は、この手法をランダム環境内の確率熱方程式の場合に拡張し、無限次元拡散過程の理論を用いて環境過程の定常分布ならびにエルゴード性について調べた。その上で

Kipnis-Varadhan 理論の無限次元化を行い、主定理の証明を環境過程に対する汎関数中心極限定理に帰着した。その際、セクター条件とよばれる無限次元ディリクレ形式に対する条件を示すことが重要である。なお、このモデルの特別な例として周期ポテンシャルを持つ確率熱方程式があり、それは数理物理では sine-Gordon 模型とよばれ、自然な研究対象となっている。

続いて、ある種のハミルトニアンから定まる 1 次元格子上的振動子鎖模型に、運動量とエネルギーを保存するノイズを加え、系は大域的な平衡状態にあるとして、その揺動場に対する双曲型スケール極限を論じた。巨大なサイズの鎖模型に対して平衡揺動極限の考察を行うには、同じ相互作用を持つ有限鎖の生成作用素に対して、系のサイズに応じたスペクトルの跳びの評価を導くことが不可欠である。提出論文では、まず対応する有限鎖のスペクトルの跳びの一樣評価を仮定して、平衡揺動を記述する場が、系のサイズを大きくするときに、初期状態は空間的なホワイトノイズで、時間発展はランダムさのない線形オイラー系で記述される定常ガウス場の分布に弱収束することを示している。その後、調和、さらにその微小摂動である非調和なポテンシャルに対して、Caputo の帰納的な議論を巧妙に応用し、スペクトルの跳びの一樣評価が成り立つための条件を導いている。

このように論文提出者が得たランダム環境内の確率熱方程式および確率鎖模型に関する一連の結果は、スケール極限の研究において新たな視点を開くものとして大変興味深い。

以上のような理由により、論文提出者 徐路 は博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい十分な資格があると認める。