論文の内容の要旨

論文題目

Numerical Analysis for Interface and
Nonlinear Boundary Value Problems
for the Stokes Equations

（ストークス方程式に対するインターフェース
および非線形境界値問題の数値解析）

氏名　　杉谷　宣紀

流体の数値シミュレーションは理工医学の分野で広く応用されており, 基本的には Navier-Stokes 方程式の初期値境界値問題が考えられる事になるが, 現実の複雑な現象を数理モデル化する要求に応じて, 非標準的な境界条件や特異な外力を持つ数理モデルが採用されている．例えば, 胸部大動脈血流のシミュレーションにおいては人工的に導入した流出側境界で, 様々な要求に応じた境界条件が必要になる．また, 心臓弁と血流との相互作用を数理モデル化する埋め込み境界法においては, 弁を血中に配置された薄膜 (インターフェース) とみなし, そこから結果としてデルタ関数を用いた特異な外力を持つ方程式を解く事になる．本論文では, そのような数理モデルを数値的に取り扱う為に, Stokes 方程式を対象に片側境界条件と埋め込み境界法に対する数値解析の研究を行う．論文は全 4 章からなり, 最初の第 1 章は全体を総括するイントロダクションにあてられている．

第 2 章では次のような Stokes 方程式に対する片側境界値問題を考察する:

$$
\begin{aligned}
&-\nu\Delta u + \nabla p = f, \quad \nabla\cdot u = 0 && \text{in } \Omega, && \text{(1a)}\\
&u = 0 && \text{on } S_1\cup S_2, && \text{(1b)}\\
&u_n + g_n \geq 0, && \text{on } \Gamma, && \text{(1c)}\\
&\tau_n(u,p) + \alpha_n \geq 0 && \text{on } \Gamma, && \text{(1d)}\\
&(u_n + g_n)(\tau_n(u,p) + \alpha_n) = 0 && \text{on } \Gamma, && \text{(1e)}\\
&\tau_T(u) + \alpha_T = 0 && \text{on } \Gamma. && \text{(1f)}
\end{aligned}
$$

ここで, Ω は $\partial\Omega = S_1\cup S_2\cup\Gamma$ をみたす $\mathbb{R}^d(d=2,3)$ 内の Lipschitz または多角形領域とし, ν, u, p, f はそれぞれ動粘性係数, 流速, 圧力, 外力である．g, α は流入データ b に由来する既知

関数とする．$\tau(u,p)$ は流体の応力を表し, 添字 n, T よって法線成分, 接線成分を表す．(1) は胸部大動脈の血流シミュレーションに対する新しいモデル問題に基づいており, [5] で新たに提案された片側境界条件 (1c)-(1f) を流出境界 Γ 上に課した Stokes 方程式である．片側境界条件 (1c)-(1f) は流出境界上で逆流の可能性を排除する事で非定常問題に対してエネルギー不等式を担保する境界条件として提案され, それにより安定的な数値シミュレーションが期待される．本章の目的は, (1) の解の存在と一意性を証明し, 有限要素法による計算手法の提案と誤差解析を行う事にある．その際に, 不等式条件 (1c)-(1f) は数値的な扱いが難しいので, 処罰法による近似を導入する:

$$-\nu\Delta u + \nabla p = f, \quad \nabla\cdot u = 0 \qquad \text{in } \Omega, \tag{2a}$$

$$u = 0 \qquad \text{on } S_1 \cup S_2, \tag{2b}$$

$$\tau_n(u,p) + \alpha_n = \frac{1}{\varepsilon}[u_n + g_n]_- \qquad \text{on } \Gamma, \tag{2c}$$

$$\tau_T(u) + \alpha_T = 0 \qquad \text{on } \Gamma. \tag{2d}$$

ここで $[s]_- = \max\{0, -s\}$ は negative part を取る関数で ε は処罰パラメータである．

本章の主結果について述べる．まず境界値問題 (1) の弱形式が, 次の変分不等式問題として定式化される事を導いてそこから解の存在と一意性を示す (定理 2.3.2):
Find $(u,p) \in K \times Q$ such that

$$a(u, v-u) + b(p, v-u) \geq (f, v-u) - [[\alpha, v-u]] \qquad (\forall v \in K), \tag{3a}$$

$$b(q,u) = 0 \qquad (\forall q \in Q). \tag{3b}$$

ここで $K = \{v \in H^1(\Omega)^n \mid v = 0 \text{ on } S_1 \cup S_2, v_n + g_n \geq 0 \text{ on } \Gamma\}$, $Q = L^2(\Omega)$ が target となる関数空間で, $a(u,v) = \frac{\nu}{2}\int_\Omega (\nabla u + (\nabla u)^{\mathbf{T}}) : (\nabla v + (\nabla v)^{\mathbf{T}})\ dx$, $b(q,v) = \int_\Omega (\mathrm{div} v) q\ dx$ は双線形形式で, $(\cdot,\cdot)$ は L^2 内積, $[[\cdot,\cdot]]$ は Γ 上の関数空間 $H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^d$ に対する双対積である．一方で (2) の弱形式は次のような非線形項をもつ変分等式となる:
Find $(u,p) \in V \times Q$ such that

$$a(u,v) + b(p,v) - \frac{1}{\varepsilon}\int_\Gamma \phi_\delta(u_n + g_n) v_n\ d\Gamma = (f,v) - [[\alpha, v]] \qquad (\forall v \in V), \tag{4a}$$

$$b(q,u) = 0 \qquad (\forall q \in Q). \tag{4b}$$

ここで $V = \{v \in H^1(\Omega)^n \mid v = 0 \text{ on } S_1 \cup S_2\}$ で, ϕ_δ は Newton 法による数値解法の為に導入された $[\cdot]_-$ の正則化関数である．定理 2.5.1, 定理 2.5.2 では, 問題 (4) に対して P1b/P1 有限要素近似に適用した離散化問題の解の存在と一意性を示す．この時に, 我々の問題においては $(q,\tau) \in L^2(\Omega) \times H^{\frac{-1}{2}}(\Gamma)$ に対して coupled Babuška-Brezzi 条件

$$C\left[\|q\|_{L^2(\Omega)} + \|\tau\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)}\right] \leq \sup_{v \in V} \frac{\int_\Omega q(\nabla\cdot v)\ dx + \int_\Gamma \tau v_n\ d\Gamma}{\|v\|_{H^1(\Omega)}} \tag{5}$$

が担保されない事が従来に比べて圧力解の取り扱いに工夫を必要とさせる．最後に (u,p) の高次の正則性などの仮定のもとで, 処罰パラメータ ε, 正則化パラメータ δ, 離散化パラメータ h をうまく選ぶ事によって $H^1 \times L^2$ 誤差評価を $O(h)$ の optimal order として得る (定理 2.6.1). 第 2.7 節では実際に数値計算した例を提示し, 理論的結果と合致する事を述べる．

第 3 章では Stokes 方程式に対する埋め込み境界有限要素法について考察する．埋め込み境界法とは [4] で提案された, 流体領域内に埋め込まれた厚みの無視できる弾性膜 Γ と流体との

相互作用による流体構造連成問題を解く為の手法であり, その定式化は Dirac デルタ関数を用いて膜の効果を流体全体へ働く外力として拡張する事で行われる. その数値的な取り扱いは適当な離散化手法に合わせてデルタ関数の正則化が同時に行われる. 本章では次のような特異な外力をもつ Stokes 方程式の Dirichlet 境界値問題を考察する:

$$-\nu\Delta u+\nabla\pi=f \quad \text{in } \Omega, \quad \nabla\cdot u=0 \quad \text{in } \Omega,\ u=0 \quad \text{on } \partial\Omega, \tag{6a}$$

$$f(x)=\int_\Theta F(\theta)\delta(x-X(\theta))\ d\theta \tag{6b}$$

ここで Ω は $\mathbb{R}^n (n=2,3)$ 内の (多角形) 有界領域とし, F を膜の効果を表す密度関数, X を膜 Γ の $\theta\in\mathbb{R}^{n-1}$ によるパラメータ表示における位置関数を表し, δ を Dirac デルタ関数とする. 本章の目的は, δ を正則化デルタ関数 δ^ε で置き換えた正則化問題

$$-\nu\Delta u^\varepsilon+\nabla\pi^\varepsilon=f^\varepsilon \quad \text{in } \Omega, \quad \nabla\cdot u^\varepsilon=0 \quad \text{in } \Omega,\ u^\varepsilon=0 \quad \text{on } \partial\Omega, \tag{7a}$$

$$f^\varepsilon(x)=\int_\Theta F(\theta)\delta^\varepsilon(x-X(\theta))\ d\theta \tag{7b}$$

に対して (P1b/P1 要素による) 有限要素法を適用し, 誤差解析を行う事である. 埋め込み境界法の数学的な研究は, 膨大な応用に反してほとんどされていない. 収束解析については, 例えば差分法による離散化の場合は [2,3] でされているが有限要素法のものはまだない. さらに [2,3] では周期境界条件を課す事で Green 関数法によって解を構成的に取り扱っている為に, 他の状況への応用に難点がある. 本研究ではより一般的に問題を取り扱う為に, Dirichlet 問題に対して有限要素法を適用し, さらに誤差評価を正則化誤差と離散化誤差に分けて独立に評価する.

主結果について述べる. まず (6b) で定義される f が $F\in L^p(\Theta)^n$ に応じて $W_0^{1,p}(\Omega)^n$ 上の有界線形汎関数となる事を示す (命題 3.2.2). それにより (6) の弱解を $W_0^{1,p}\times L^p$ のクラスで定義する. 正則化誤差評価で鍵となる補題は次の不等式評価である (補題 3.2.3):

$$\|f-f^\varepsilon\|_{W^{-1,p}}\le C_0\|F\|_{L^p(\Theta)}\left[\left|1-\int_{\mathbb{R}^n}\delta^\varepsilon(y)\ dy\right|+\||x|\delta^\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\right].$$

ここで C_0 は $\delta, \|F\|_{L^p}$ によらない定数とする. この不等式は $1\le p<\frac{n}{n-1}$ に対して成り立ち, したがって特に $p<2$ なる p に対して $W^{1,p}\times L^p$ ノルムでの正則化誤差を求めることになる (命題 3.2.5). その際に具体的な δ^ε の構成についても言及する. 離散化誤差に関しては有限要素法の一般論に従い, 最終的に 2 つを合わせて誤差評価

$$\|u-u_h^\varepsilon\|_{W^{1,q}}+\|\pi-\pi_h^\varepsilon\|_{L^q}\le Ch^{1-\alpha} \quad \text{with any } 1\le q\le\frac{n}{n-\alpha} \tag{8}$$

および

$$\|u-u_h^\varepsilon\|_{L^r}\le Ch^{1-\alpha} \quad \text{with} \quad r=\frac{n}{n-\alpha-1}. \tag{9}$$

を得る (定理 3.3.1). ここで $(u_h^\varepsilon, p_h^\varepsilon)$ は (7) の有限要素解で $0<\alpha<1$ は任意である. 実際の応用を考慮してパラメータ空間の積分に数値積分 (中点則近似) を利用する場合についても考察し, パラメータをうまく選ぶ事で全く同じ order の誤差評価が得られる事を示す (定理 3.4.1). 結果は sub-optimal な誤差評価となっており, 第 3.4 節での数値実験を通して理論的結果との整合性を確認する.

第 4 章ではまず次のような Stokes インターフェース問題を導入する:

$$-\nu\Delta u_i+\nabla\pi_i=0, \quad \nabla\cdot u_i=0 \qquad \text{in } \Omega_i, \tag{10a}$$

$$u_i=0 \qquad \text{on } \partial\Omega_i\setminus\Gamma \quad (i=0,1), \tag{10b}$$

$$u_0=u_1, \quad \tau_0+\tau_1=g \qquad \text{on } \Gamma, \tag{10c}$$

ここに各領域 Ω_0, Ω_1 はインターフェース Γ で接しており, インターフェース条件 (10c) によって応力に g というジャンプが課されている. $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1 \cup \Gamma$ とおく. [1] によれば, インターフェース条件 (10c) は埋め込み境界法と同様にして, Ω 全体へ働く外力のように表す事ができ, Stokes インターフェース問題 (10) は次のように再定式化される:

$$-\nu\Delta u + \nabla\pi = f \quad \text{in } \Omega, \quad \nabla\cdot u = 0 \quad \text{in } \Omega,\ u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega, \tag{11a}$$

$$f(x) = \tilde{g}(\nabla\chi\cdot\tilde{n}). \tag{11b}$$

ここで, χ は Ω_0 に対する特性関数, n は Γ 上の法線ベクトルで, $\tilde{g}, \tilde{n}$ は Γ 上の関数を Ω 上への滑らかな拡張を表す. 実は問題 (11) と問題 (6) は本質的に同値な問題であり, 埋め込み境界法は (10) に対するデルタ関数を用いた場合の再定式化, 一方で (11) は代わりに特性関数 χ を使った再定式化として解釈できる. 実際に g と F がある関係を満たせば 2 つの問題は一致する. 本章では Stokes インターフェース問題を [1] による再定式化 (11) に基づいて考察する. ([1] では定式化の導出といくつかの数値実験が報告されているが, 収束解析はされていない). 本章の目的は (11) に対する P1b/P1 有限要素法の誤差評価を与える事である. $\nabla\chi$ はインターフェース Γ 上で特異性を持つのでやはり正則化が必要となり, 第 3 章にならって正則化誤差と離散化誤差を個別に評価する. 主結果は, 定理 4.4.1 にあるように全体の誤差評価は

$$\|u - u_h^\varepsilon\|_{H^1} + \|\pi - \pi_h^\varepsilon\|_{L^2} \le C\sqrt{h}. \tag{12}$$

および

$$\|u - u_h^\varepsilon\|_{L^2} \le Ch. \tag{13}$$

となる. ここで $(u_h^\varepsilon, p_h^\varepsilon)$ は (11) の正則化問題に対する有限要素解で, C は離散化パラメータ h によらない定数とする. 埋め込み境界法と比較すると $p = 2$ の場合に相当する $H^1 \times L^2$ ノルムで収束性の理論的結果を得る事に成功している. 結果は第 4.5 節による数値実験で確かめられる.

References

[1] H. Fujita, H. Kawahara, and H. Kawarada. Distribution theoretic approach to fictitious domain method for Neumann problems. *East-West J. Numer. Math.*, 3(2):111126, 1995.

[2] Z. Li. On convergence of the immersed boundary method for elliptic interface problems. *Math. Comp.*, 84(293):11691188, 2015.

[3] Y. Mori. Convergence proof of the velocity field for a Stokes flow immersed boundary method. *Comm. Pure Appl. Math.*, 61(9):12131263, 2008.

[4] C. S. Peskin. Numerical analysis of blood flow in the heart. *J. Computational Phys.*, 25(3):220252, 1977.

[5] G. Zhou and N. Saito. The navierstokes equations under a unilateral boundary condition of signorini's type. *Journal of Mathematical Fluid Mechanics*, pages 130, 2015.