論文審査の結果の要旨

氏　名　　杉谷 宜紀

現実の複雑な流体運動のコンピュータ・シミュレーションにおいては，基礎偏微分方程式（例えば Navier-Stokes 方程式）の計算だけでなく，非線形の境界条件や，界面条件の設定や計算も重要な問題になる．本学位論文は，以下の 4 章から成り，境界条件や界面条件の数値計算手法に対して数学的な基礎づけを行った結果をまとめている．

第1章 Introduction
第2章 Unilateral problem for the Stokes equations: the well-posedness and finite element approximation
第3章 Convergence of the immersed-boundary finite-element method for the Stokes problem
第4章 Numerical analysis of a Stokes interface problem based on formulation using the characteristic function

全体として，問題を端的に捉えるため，基礎方程式としては定常 Stokes 方程式を採用し，境界値問題，界面問題の変分法的定式化から，有限要素法による離散化，誤差評価，そして，誤差評価の妥当性を検証するための数値実験を報告している．

第 1 章で論文全体の内容を要約したのち， 第 2 章では，大動脈血流シミュレーションで利用される Signorini 型の流出境界条件の有限要素近似（気泡要素）を考察している．類似の境界条件は，固体力学では弾性体の Signorini 型接触条件としてよく知られるが，有限要素近似の誤差評価は準最適なものに留まっていた．本章では， Signorini 型の境界条件の有限要素近似について，数値実験から予想される最適誤差評価の導出に世界で初めて成功しており，価値は高い．

第 3 章は，Stokes 界面問題に対する埋め込み境界法（immersed boundary method，IB 法）の解析を行っている．IB 法は，界面の効果をデルタ関数を用いて外力項として取り入れ，Stokes 界面問題を特異な外力項を持った Stokes 問題として形式的に扱い, 数値解法を導出する手法である. これは, Peskin 1977 によって人工心臓弁のシミュレーションのため提案されて，現在に至るまで，流体（血液）構造（弾性膜）連成問題の数値解法として広く応用されている．収束性について唯一知られている論文である Mori 2008 では，流速についての最大値ノルムに関する（差分法の）準最適な誤差評価が証明されている．しかし，Mori 2008 では，境界条件として周期境界条件を採用し，厳密解の Green

関数表示を本質的に用いており，もっと標準的な Dirichlet 境界条件の場合などに，どうやって結果を応用するかは自明ではなかった．そもそも，Dirichlet 境界条件の場合には，数学的には適切性も自明ではない．また，先行研究では，一様格子上での差分近似の性質が本質的に多用されているので，他の離散化手法（有限要素法など）への拡張も明らかではなかった．本章では， Dirichlet 境界条件下での定常 Stokes 方程式を取り上げ，次の 3 つについて詳細な解析を行った：

1）デルタ関数を外力に持つ Stokes 方程式の適切性，
2）正則化デルタ関数を用いた正則化 Stokes 問題と Stokes 問題の解との誤差（正則化誤差），
3）正則化 Stokes 問題の離散化（離散化誤差）．

このように問題を分け，各段階での仮定と結論を整理することで，収束性の本質を明確化し，様々な問題設定（境界条件、離散化手法）に一般化をしやすくしている．まず，1)で，デルタ関数を含む外力項は、(R^n の）符号付の有限測度となっていることを証明している．さらに，より重要な系として，外力が L^1 関数にならないことを示した．この結果に基づいて，外力を $W_0^{1,p}$の双対空間の元として扱うという基本方針を立てている．次に，2)で，正則化デルタ関数を用いた正則化された外力と外力の誤差を $W_0^{1,p}$の双対ノルムで評価することに成功している．この評価に成功したことが，本章の最も大きなブレークスルーと言える．そして，この 3)において，IB 法の収束性が世界で初めてかなり一般的な条件下で端的に表現できたといえる. また, 2), 3)の議論において，正則化デルタ関数を導入する際の基本となる関数には，連続性とコンパクトサポートを持つことしか仮定していない．従来の研究では，より高い微分可能性や，様々なモーメント条件を課していた．これらの条件が，本質的なものでないことを示せたのは，大きな成果である．

第 4 章では，IB 法が，藤田・河原田の方法（Fujita et al. 1995）と呼ばれる特性関数の超関数的な微分を用いた数値解析手法と本質的には同等のものであることも見出し，藤田・河原田の方法の収束解析を行い，第 3 章に対応する結果を得ている．結論として，計算プログラムの実装や収束解析の容易さの立場からは，この藤田・河原田の方法が優れていることが述べられている．

本論文は，個々の結果の数学的な価値だけでなく，数値解析分野への応用性・実用性と，純粋な解析理論の端正さが統合されているという観点からも，大変優れたものであり，数理科学の論文として大変質の高いものである．

よって，論文提出者 杉谷宜紀 は，博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める．