論文の内容の要旨

論文題目　Fukaya categories, surface Lefschetz fibrations, and Koszul duality theory
（ Fukaya 圏、曲面 Lefschetz 束、Koszul 双対について ）

氏　　名　杉山　聡

この論文の結果は、シンプレクティック幾何学の、特に Fukaya 圏の理論と関わるものである。Fukaya 圏はシンプレクティック多様体に対して定義されるA_∞-圏[FOOO10]であり、ホモロジカルミラー対称性の文脈でよく研究されている概念である。ホモロジカルミラー対称性は、Kontsevich によって提唱された予想で、ミラー対と呼ばれる Calabi-Yau 多様体の組(M,X)について、Fukaya 圏の導来圏$D^\pi Fuk(M)$と連接層の導来圏$D^b coh(X)$の圏同値を予言する[Ko94]。実際、多くのミラー対に対して、この同値性が証明されている[PZ01]。
Fukaya 圏の変種である Fukaya-Seidel 圏は、Lefschetz 束に適合する完全シンプレクティック構造が入った完全 Lefschetz 束に対して定義される[Se08]。ホモロジカルミラー対称性の文脈において Fukaya-Seidel 圏は、Xが Fano 多様体である時に現れる。この場合、ミラーは Landau-Ginzburg モデルWとなり[HV00]、Fukaya-Seidel 圏の導来圏$DF(W)^\to$が、$D^b\ coh(X)$と圏同値になることが期待されるものである。
Fukaya 圏の理論も例に漏れず、他の様々な分野と関連しながら発展してきた。この論文の関係のある分野は次の 2 つである。1 つ目が、4 次元トポロジー、特に PALF と呼ばれる概念周辺である。PALF とは、positive、allowable という条件を満たす Lefscheta 束である。シンプレクティック幾何学と PALF の理論をつなげる 2 つの重要な定理がある。1 つ目は Donaldson によって示された、4 次元閉シンプレクティック多様体は、十分な回数 blow-up すれば positive な Lefschetz 束の構造を持つという定理である。2 つ目は、Gompf によって示された、positive な Lefschetz 束の全空間にはシンプレクティック構造が入るという定理である。以降、シンプレクティック幾何学を用いて PALF を調べる研究や、その逆が盛んに行われるようになった[DS03]、[Au06]。
2 章の結果は、この流れに乗るものであり、PALF を Fukaya-Seidel 圏の導来圏を用いて調べる方法を与える。まず、PALF に完全 Lefschetz 束の構造が入ることを示す。全空間の Chern 類の 2 倍が 0 の場合、これには Fukaya-Seidel 圏が定義できる。次に、この導来圏が与えた完全シンプレクティック構造に依らないことを示す（定理 2.2.2)。つまり、

$2c_1(E)=0$なる PALF $\pi\colon E\to D$に対し、Fukaya-Seidel 圏の導来圏が well-defined に定まることを示した。
ところで、Fukaya-Seidel 圏は Milnor 格子の圏化であることが知られている。よって、Fukaya-Seidel 圏は、Milnor 格子より詳細な情報を持っていることが期待できる。実際にそれが正しいことを、例を通して確認する（定理 2.3.2)。つまり、互いに同型な Milnor 格子を持つが、Fukaya-Seidel 圏の導来圏が異なる例を構成する。
シンプレクティック幾何学と深い関わりをもつ 2 つ目の分野が、Koszul 双対性である。
Koszul 双対性とは、Koszul 代数という 2 次の代数の間にある双対性である。これは、次の意味で、積と関係式の双対性と思うことができる。$A_0 = k$を体とし、A_1を k 上の有限次元ベクトル空間、Iを$A_1\otimes A_1$の部分空間とする。この時、テンソル代数の商$A := T(A_1)/I$は Koszul 代数になる。このAに対し、Koszul 双対Eを$E := \mathrm{Ext}_A\,(k,k)$によって定義する。すると、$E\cong T(A_1^*)/I^{\perp}$となる[Lo86]。$A_1$と$A_1^*$の同型を固定すれば、$I$と$I^{\perp}$は互いに補空間となる。この意味で、$A$と$E$の間で、積と関係式が入れ替わっているといえる。また、この結果より、$\mathrm{Ext}_E(k,k)$がAと同型となることも分かる。加えて、ある種の導来圏が同値になることも知られている[BGS96]。
今日、Koszul 双対性にまつわる現象は広く観測されている。Koszul 代数に対する Koszul 双対性に始まり[Pr70]、[BGS96]、augmented A_∞-代数への拡張[LPWZ04]、Koszul operad への一般化[GK94]、[LV12]、そしてミラー対称性との関連[AKO08]である。Fukaya 圏が Koszul 双対性の文脈に姿を表したのは、Blumberg、Cohen、Teleman による[BCT09]と Etgue、Lekili による[EL16]である。両論文では、Fukaya 圏の特定の対象の組の End A_∞-代数が互いに Koszul 双対になるということが証明されている。
本論文の後半では、代数Aが 2 次でない場合、つまり、高次の関係式をもつ場合について調べる。この場合、Eの簡潔な表式はなく、また、$\mathrm{Ext}_E(k,k)$もAと同型にならない。このような場合の Koszul 双対（A_∞-Koszul 双対）の定義は、[LPWZ04]に与えられている。彼らは、Koszul 双対を augmented A_∞-代数にまで拡張しているが、この定義は具体例について具体的に計算するには向いておらず、Koszul 双対を積と関係式の双対性として解釈することはそのままでは不可能である。
本論文の 3 章では、A_∞-Koszul 双対の新しい定義と、有向A_n箙上の関係式付き道代数のA_∞-Koszul 双対の公式を与える（定理 3.1.5)。
具体的には以下のようになる。まず、$A=k(\Delta_{\mathrm{n}},\rho)$を有向$A_n$型箙の上の関係式付き道代数とする。ここで、$\rho=(\rho_1,\rho_2,\dots,\rho_m)$は関係式の列で、$\rho_j=\alpha_{t_j}\alpha_{t_j-1}\cdots\alpha_{s_j+1}$とする。ここで、$\mathrm{t_j}-s_j\geq 2$、$\mathrm{s}_1<s_2<\cdots<s_m$、$\mathrm{t}_1<t_2<\cdots<t_m$としておく。また、$S=\{s_1,s_2,\dots,s_m\}$、$T=\{t_1,t_2,\dots,t_m\}$とかく。

$$\underset{0}{\bullet}\xrightarrow{\alpha_1}\underset{1}{\bullet}\xrightarrow{\alpha_2}\underset{2}{\bullet}\xrightarrow{\alpha_3}\underset{\cdots}{\cdots}\xrightarrow{\alpha_n}\underset{n}{\bullet}$$

これに対し、対応する有向A_∞-圏$A_{S,T}$を、$\mathrm{Ob}(A_{S,T})=\{0,1,\dots,n\}$、$\mathrm{hom}^0_{A_{S,T}}(i,j)=e_jAe_i$、

$\hom^d_{A_{S,T}}(i,j)=0\quad(d\neq 0)$、$A_\infty$-構造は$\mu^2$を$A$の積から誘導されるものとし、$\mu^d=0$（$d\neq 2$）として定める。主結果は、この有向$A_\infty$-圏$A_{S,T}$の$A_\infty$-Koszul双対$B_{S,T}$を以下のように計算したことである。

$B_{S,T}$を記す前に、いくらか記号を準備する。まず、$d:\{0,1,\dots,n\}\to\{0,1,\dots,n\}\sqcup\{-\infty\}$を、

$d(p)=\max\{s\,|\,\hom_{A_{S,T}}(s,p)=0\}$で定める。次に、数列$\left\{a_i^{(p)}\right\}_{0\le i\le l_p}$を以下のように定める。

まず、$p=0$については、$l_0=0$、$a_0^{(0)}=0$と定める。$p\geq 1$については、$a_0^{(p)}=p$、$a_1^{(p)}=p-1$とする。$a_q^{(p)}$が$q<i$について定まったとする。このとき、$d\left(a_{i-1}^{(p)}\right)=d\left(a_{i-2}^{(p)}\right)$なら、$l_p=i-1$として数列の定義を終える。$d\left(a_{i-1}^{(p)}\right)<d\left(a_{i-2}^{(p)}\right)$なら、$a_i^{(p)}=d\left(a_{i-2}^{(p)}\right)$と定め、定義を継続することにする。こうして定まった数列$\left\{a_i^{(p)}\right\}_{0\le i\le l_p}$を用いて、$B_{S,T}$は以下のようになる。

$\mathrm{Ob}(B_{S,T})=\{B(n),B(n-1),\dots,B(0)\}$、$\hom^i_{B_{S,T}}(B(p),B(a_i^{(p)}))=k\cdot\tilde{\eta}_{p,a_i^{(p)}}$、他は0、$A_\infty$-構造は、

$$\mu^d\left(\tilde{\eta}_{j_{d-1},j_d},\tilde{\eta}_{j_{d-2},j_{d-1}},\dots,\tilde{\eta}_{j_0,j_1}\right)=\begin{cases}(-1)^{\left(\left|\tilde{\eta}_{j_{d-1},j_d}\right|+1\right)\left|\tilde{\eta}_{j_0,j_d}\right|}\tilde{\eta}_{j_0,j_d} & (\text{degreeの条件を満たす})\\ 0 & (\text{oterwise})\end{cases}$$

ここで、degreeの条件とは、$\left|\tilde{\eta}_{j_{d-1},j_d}\right|+\left|\tilde{\eta}_{j_{d-2},j_{d-1}}\right|+\cdots+\left|\tilde{\eta}_{j_0,j_1}\right|+(2-d)=\left|\tilde{\eta}_{j_0,j_d}\right|$である。

まとめると、本論文の主結果は、$A_{S,T}$のA_∞-Koszul双対は$B_{S,T}$である（定理3.1.5）、$B_{S,T}$のA_∞-Koszul双対は$A_{S,T}$である（系3.1.3）、2つの導来圏$DA_{S,T}$と$DB_{S,T}$は三角圏同値である、の3つである。

A_∞-Koszul 双対の計算には、Fukaya 圏の理論と Dehn ツイストを用いる。本論文の手法は、抽象論に新たな視点を与えるものではない。一方、Fukaya 圏を純代数的な問題の実際の計算に役立てる事ができるということ、Fukaya 圏を通して得られた計算結果によると、Koszul 双対性が高次の積と高次の関係式の双対性として理解できることを示すものである。

実際には以下のことを行う。まず。有向A_∞-圏に対して、A_∞-Koszul 双対を定義する。そして、先に述べた代数について、A_∞-Koszul 双対の計算を実行する。そして、その表式から、Koszul 双対性は高次の積と高次の関係式の双対性であることを見る。

Fukaya 圏でのA_∞-Koszul 双対の計算は概ね以下のように行なわれる。まず、$A_{S,T}$と同型な Fukaya 圏の有向部分A_∞-圏を構成する。一般に、A_∞-Koszul 双対は、A_∞-導来圏のツイストという操作によって定義されるが、このツイストは Fukaya 圏の導来圏の中では Dehn ツイストと擬同値であることが知られている[Se08]。よって、先の有向部分A_∞-圏の対象の Dehn ツイストを計算し、その交点や、それらが囲む多角形を数えてA_∞-Koszul 双対を計算する。実際、長さ dの関係式に対して、Riemann 面のなかで対応する$(d+1)$角形が 1 つでき、それが高次の積μ^d を生むという仕組みになっている。具体例として、典型的な場合が系 3.1.7 と 3.4.6 小節に記されている。

参考文献

[Au06] **Auroux, Denis.** Mapping class group factorizations and symplectic 4-manifolds: some open problems. *Problems on mapping class groups and related topics*, 123–132, Proc. Sympos. Pure Math., 74, *Amer. Math. Soc., Providence, RI*, 2006.

[BGS96] **Beilinson, Alexander; Ginzburg, Victor; Soergel,Wolfgang.** Koszul duality patterns in representation theory. *J. Amer. Math. Soc.* **9** (1996), no. 2, 473–527.

[BCT09] **Blumberg, Andrew J.; Cohen, Ralph L.; Teleman, Constantin.** Openclosed field theories, string topology, and Hochschild homology. *Alpine perspectives on algebraic topology*, 53–76, Contemp. Math., 504, *Amer. Math. Soc., Providence, RI*, 2009.

[DS03] **Donaldson, Simon; Smith, Ivan**. Lefschetz pencils and the canonical class for symplectic four-manifolds. *Topology* **42** (2003), no. 4, 743–785.

[EL16] **Etgu, Tolga; Yanki Lekili.** Koszul duality patterns in Floer theory. *arXiv preprint arXiv:1502.07922* (2015).

[FOOO10] **Fukaya, Kenji; Oh, Yong-Geun; Ohta, Hiroshi; Ono, Kaoru**. Lagrangian intersection Floer theory: anomaly and obstruction. Part I. AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, 46.1. *American Mathematical Society, Providence, RI; International Press, Somerville, MA*, 2009. xii+396 pp. ISBN: 978-0-8218- 4836-4

[GK94] **Ginzburg, Victor; Mikhail Kapranov**. Koszul duality for operads. *Duke Math. J.* 76.1 (1994): 203-272.

[HV00] **Hori, Kentaro,; Cumrun Vafa**. Mirror symmetry. *arXiv preprint hepth/0002222* (2000).

[Ko94] **Kontsevich, Maxim**. Homological algebra of mirror symmetry. *arXiv preprint alg-geom/9411018* (1994).

[LV12] **Loday, Jean-Louis; Bruno Vallette**. Algebraic operads. Vol. 346. *Springer Science* & *Business Media*, 2012. x+636 pp. ISBN: 978-3642303616

[LPWZ04] **Lu, D. M.; Palmieri, J. H.; Wu, Q. S.; Zhang, J. J.** A_∞-algebras for ring theorists. Proceedings of the International Conference on Algebra. *Algebra Colloq.* **11** (2004), no. 1, 91–128.

[PZ01] **Polishchuk, Alexander; Zaslow, Eric**. Categorical mirror symmetry in the elliptic curve [MR1633036 (99j:14034)]. *Winter School on Mirror Symmetry, Vector Bundles and Lagrangian Submanifolds (Cambridge, MA, 1999)*, 275–295, AMS/IP Stud. Adv. Math., 23, *Amer. Math. Soc., Providence, RI*, 2001.

[Pr70] **Priddy, Stewart B**. Koszul resolutions. *Transactions of the American Mathematical Society* 152.1 (1970): 39-60.

[Se08] **Seidel, Paul**. Fukaya categories and Picard-Lefschetz theory. Zurich Lectures in Advanced Mathematics. *European Mathematical Society (EMS), Zurich*, 2008. viii+326 pp. ISBN: 978-3-03719-063-0