

論文の内容の要旨

論文題目 Semigroups generated by higher order elliptic operators and the Stokes operators in end point spaces

(端点型空間上の高階楕円型作用素や
ストークス作用素により生成される半群)

氏名 鈴木 拓也

本博士論文では有界関数型空間や有界平均振動関数空間 BMO などの端点型空間での、高階楕円型作用素やストークス作用素が生成する半群について考察する。高階楕円型作用素が生成する半群とは、非等方的な媒質での拡散現象を表す高階放物型方程式の解作用素であり、ストークス半群とは流体の流速の挙動を記述するナビエ・ストークス方程式の線形化であるストークス方程式の解作用素である。

本研究の目的は様々な非有界領域が与えられたときに流体力学の偏微分方程式を取り扱うための基礎となる線形理論の構築であり、これら二つの偏微分方程式の解作用素を研究対象としている。発展方程式の解は初期値からある時刻の解を対応させる解作用素がなす半群として扱うことができ、作用素の半群論により解析される。解作用素がなす半群の重要な性質として熱方程式の解の平滑化作用を数学的に定式化した解析的半群性があげられる。 L^p 空間においては、高階楕円型作用素により生成される半群の解析性について (宮崎 (2006)) により一様 C^1 級領域上で示され、ストークス半群においては (ガイサート-ヘック-ヒーバー-澤田 (2012)) により L^p ヘルムホルツ分解がある領域でソレノイダルな L^p 空間で最大正則性まで示されておりナビエ・ストークス方程式の解の挙動の考察にも応用されている。しかし、 L^∞ 空間のような端点型空間においては領域が滑らかではない場合や L^p ヘルムホルツ分解が無い領域などの場合に線形の問題であってもいまだに数学的な困難があり未解決の問題が数多く存在する。本博士論文では次の問題に取り組んだ。

1. 一様 C^1 級領域上の有界関数空間での発散型高階放物型方程式の解作用素の解析性
2. L^p -ヘルムホルツ分解がない扇状領域上の有界関数空間でのストークス半群の解析性
3. 許容領域上のストークスレゾルベント評価と筒状領域上の有界関数空間でのストークス半群の解析性
4. 許容領域上の BMO 空間でのストークス半群の解析性
5. ヘルムホルツ分解がない扇形領域におけるストークス半群の L^p 空間での解析性
6. 熱方程式の BMO 型空間での解作用素の解析性への応用を共同研究により行った
7. ストークス半群やナビエ・ストークス方程式解の BMO 空間での時間大域挙動
8. 発散型高階楕円型作用素により生成される半群の L^p 空間でのガウス評価、最大正則性

発展方程式の解作用素の解析性について先行研究は膨大であるが、(増田 (1972))、(スチュワート (1974)) により十分滑らかな領域上の L^∞ 空間で高階の非発散型楕円型作用素により生成される半群の解析性が証明されこの方法は広く用いられている。しかし、リップシッツ領域においては (ジェリソン-ケーニッヒ (1995)) によりラプラシアン Δ の定常問題を考えた場合でも評価が成立しないような例が知られている。また、(ペロウ (2014)) により 3 次元以上の層状領域において有界関数空間上のストークス解作用素の解析性が成立しないという結果が示されている。また (デーリング (2001)) により角型領域において p が大きい場合に L^p ストークスレゾルベント評価が成立しないことが示されており、境界が滑らかな場合や数学的に扱いやすい形状の場合とは本質的に異なる数学理論の構築やどこまでが正しいのかという見極めが必要不可欠である。

次に本研究の研究手法の概要について述べる。

1. 一様 C^1 級領域上の L^∞ 空間での発散型高階放物型方程式の解作用素の解析性
非線形解析の手法であるふくらまし法と背理法を組み合わせた弱解の L^∞ レゾルベント評価を考察することで問題の解決を図った。増田-スチュワートの方法では関数解析的手法によるためその分境界が十分な滑らかさを持つことが必要になってしまう。そこでふくらまし法と背理法を組み合わせた L^∞ レゾルベント評価を行う際に弱解を考えて変分法的な解析手法を導入することで一様 C^1 級領域において結果を得た。
2. L^p -ヘルムホルツ分解がない扇状領域上の有界関数空間でのストークス半群の解析性
(阿部-儀我 (2013)(2014)) により有界領域や外部領域、摂動半空間上の有界関数型空間でストークス半群の解析性は示されたが L^p -ヘルムホルツ分解がない領域においては不明であった。無限遠での減衰に注意が必要だが適切な関数空間で解を考え、ノイマン境界値問題の評価を座標変換などを駆使して空間局所的に導出し極限を考えることで圧力項を制御し問題を考察した。本共同研究により L^p -ヘルムホルツ分解がストークス方程式の解作用素の解析性を得るためにこれまで必要不可欠と信じられていたが必ずしもそうとは限らないことが判明した。

3. 許容領域上のストークスレゾルベント評価と筒状領域上の有界関数空間でのストークス半群の解析性
筒状領域の場合などのように流体の流れがポワズイユ流のような挙動をする可能性がある場合は許容領域であるが狭義許容領域ではない。このため有界関数空間でのストークスレゾルベント評価は (阿部-儀我-ヒーバー (2015)) においても増田-スチュワートの方法を元にして示されているが領域が狭義許容領域であることが必要で適用できないので、新たに許容領域の場合においてレゾルベント評価を導出し改良した。
4. 許容領域上の BMO 空間でのストークス半群の解析性
扇状領域上のストークス半群の L^p_σ 空間での解析性については、有界関数型空間での解析性と L^2_σ 空間での解析性に補間空間の議論では部分空間での解析性しか得られずさらに別のアプローチが必要であった。そこでまず L^∞ 空間と類似した空間である BMO 空間を一般領域で導入し、実解析的手法により境界付近のジョン・ニーレンベルグ型不等式の導出などの考察を行い、許容領域上のストークス半群の解析性を得た。
5. ヘルムホルツ分解がない扇形領域におけるストークス半群の L^p_σ 空間での解析性
ヘルムホルツ射影作用素に代わる新たな射影作用素の導入とスタンパキア-カンパナト型の補間定理により扇形領域におけるストークス半群の L^p_σ 空間での解析性を示した。
6. BMO 型空間の解作用素の解析性への応用
境界付き BMO 空間のパラメーターを変えた時の性質や同値性を調べて熱方程式の解作用素に応用し境界付き BMO 空間の解析性を得た。
7. ストークス半群やナビエ・ストークス方程式の解の BMO 空間での時間大域挙動
ストークス半群やナビエ・ストークス方程式の BMO 空間での時間大域的な挙動について、 L^p_σ 空間での先行研究と双対での議論を元に考察した。
8. 発散型高階楕円型作用素により生成される半群の L^p 空間でのガウス評価、最大正則性半群の時間大域的な挙動について、発散型高階楕円型作用素により生成される半群のガウス評価についてデービスの摂動の方法を関数解析的な摂動の手法と合わせて一般の場合にも適用できるように改良することで問題を解決した。

本博士論文は全 8 章により構成され第 1 章で全体の構成について述べ、第 2 章で高階楕円型作用素により生成される半群の一般 C^1 級領域上の L^∞ 空間での解析性の研究結果 (鈴木 (2016)) について述べた。レゾルベント方程式の評価を導出することで半群の解析性を得た。

$$\begin{cases} (\lambda - L)u = f & \text{in } \Omega \\ u = \partial_N u = \dots = \partial_N^{m-1} u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

ここで $L = \sum_{|\alpha|+|\beta|\leq 2m} (-1)^{|\beta|+1} \partial^\beta a_{\alpha,\beta} \partial^\alpha$ を $2m$ 階の発散型作用素とし ∂_N を法線微分、 $N(u_\lambda, \lambda) = \sup_{x \in \Omega} \left(\sum_{|\alpha|=k \leq m-1} |\lambda|^{1-\frac{k}{2m}} |\partial^\alpha u(x)| \right)$ として、 L のレゾルベント評価を示した。

$$N(u_\lambda, \lambda) \leq C \|f\|_\infty.$$

第3章から第6章では様々な非有界領域での端点型空間でのストークス半群の解析性について述べた。ストークス半群は次のストークス方程式のディリクレ問題の解作用素である。

$$\begin{cases} v_t - \Delta v + \nabla q = 0, \operatorname{div} v = 0 & \text{in } \Omega \times (0, T), \\ v = 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0, T), \\ v|_{t=0} = v_0 & \text{on } \Omega, \end{cases}$$

第3章は京都大学の阿部助教、東京大学の儀我教授、ダルムシュタット工科大学のシャーデ氏とのストークス半群の扇状領域、筒状領域上の有界関数空間での解析性の共同研究結果(阿部-儀我-シャーデ-鈴木 (2015)、(2016))に基づいている。特に論文内では詳しい述べられなかった双対問題の L^1 型存在定理について述べた。第4章はダルムシュタット工科大学のボルカート氏、東京大学の儀我教授との許容領域上の BMO 空間でのストークス半群の解析性の共同研究結果(ボルカート-儀我-鈴木 (2016))に基づいている。第5章はダルムシュタット工科大学のボルカート氏、東京大学の儀我教授、東京大学の三浦達彦氏、信州大学の筒井助教とのヘルムホルツ分解がない扇形領域におけるストークス半群の L^p_σ 空間での解析性の共同研究結果(ボルカート-儀我-三浦-鈴木-筒井 (2016))に基づいている。第6章はダルムシュタット工科大学のボルカート氏、東京大学の儀我教授、信州大学の筒井助教との BMO 空間の同値性と熱方程式の BMO 型空間での解作用素の解析性への応用の投稿中の共同研究成果(ボルカート-儀我-鈴木-筒井)に基づいている。

第7章はダルムシュタット工科大学のボルカート氏とのストークス半群やナビエ・ストークス方程式の解作用素の BMO 空間での時間大域的な挙動についての共同研究成果に基づいている。解の勾配 L^q ノルムを大域的に初期値のハーディー空間におけるノルムで評価し、そこから双対の議論により有界平均変動関数空間や有界関数空間での評価の導出を行った。

第8章はダルムシュタット工科大学のヒーバー教授、東京大学の剣持氏、ダルムシュタット工科大学のトークスドルフ氏との高階の発散型楕円型作用素により生成される半群のガウス評価についての共同研究成果に基づいている。デービスによる半群の摂動の方法を関数解析的な手法と組み合わせることで一般化しガウス評価を導出した。作用素が重調和作用素の場合にガウス評価を記述すると、領域を一様にリプシッツ定数が小さいリプシッツ領域とする。この時、 $r > 0, x, y \in \Omega, |x - y| \geq 2\sqrt{nr}$ とすると次の評価が成立する。

$$\|\chi_{B_r(x)} e^{-t\Delta^2} \chi_{B_r(y)}\|_{p \rightarrow q} \leq C|t|^{-\frac{n}{m}(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})} e^{-A \frac{|x-y|^{4/3}}{\operatorname{Re} t^{1/3}}}.$$

さらにこのガウス評価から R 有界性を用いた(クンストマン (2008))の定理を応用して最大正則性を得た。