論文の内容の要旨

論文題目　Partially ordered sets, order complexes and CAT(0) properties
(半順序集合, 順序複体, 及び CAT(0) 性)

氏名　藤内 翔太

本論文では, 半順序集合の組合せ構造とその順序複体の幾何構造の関係について考察を行う. 半順序集合 P の順序複体とは, P の元を頂点, P の有限鎖を面とする抽象単体的複体として定義される. その幾何学的実現 $|P|$ は P の分類空間とも呼ばれる. P の組合せ論的な性質と $|P|$ の幾何学的性質の関係を調べるのが本研究の目的である. この論文では 2 つのテーマについて考察を行う. 第 1 章で基本的な概念や用語の準備を行い, 第 2 章, 第 3 章でそれぞれのテーマについて議論する.

第 2 章ではフロベニウス複体のホモトピー型について考察する. Λ を加法的モノイドとし, 次の 2 条件を仮定する:

- Λ は消約的である. つまり $\lambda + \mu = \lambda + \mu'$ ならば $\mu = \mu'$ である.
- Λ は非自明な可逆元を持たない. つまり $\lambda + \mu = 0$ ならば $\lambda = \mu = 0$ である.

このような Λ を半順序集合的であるという. 実際, Λ 上の二項関係を $\lambda \leq \lambda + \mu$ で定めると半順序となる. Λ の非零元 λ に対し, フロベニウス複体 $\mathcal{F}(\lambda; \Lambda)$ を Λ の開区間の順序複体の幾何学的実現 $|(0, \lambda)_\Lambda|$ として定義する.

フロベニウス複体は, 体 k 上のモノイド代数 $k[\Lambda]$ のねじれ加群 $\mathrm{Tor}_*^{k[\Lambda]}(k, k)$ を決定するために Laudal と Sletsjøe によって導入された. 彼らは同型

$$\mathrm{Tor}_{i,\lambda}^{k[\Lambda]}(k, k) \cong \widetilde{H}_{i-2}(\mathcal{F}(\lambda; \Lambda); k)$$

を示した. さらに彼らは Λ が $\mathbb{N}^2$ の saturated rational submonoid であるときに, 上の同型を用いてねじれ加群 $\mathrm{Tor}_*^{k[\Lambda]}(k, k)$ のポワンカレ級数を計算した.

Clark と Ehlenberg はフロベニウスの硬貨交換問題のホモトピー論的な精密化としてフロベニウス複体のホモトピー型に注目した. 彼らは次の 2 つの場合に Λ のフロベニウス複体のホモトピー型を決定した.

- Λ が互いに素な 2 つの正整数で生成される場合.
- Λ が等差数列 $a, a+d, \dots, a+(a-1)d$ で生成される場合. 但し, a と d は互いに素な正整数とする.

彼らは証明に離散モース理論を用いた.

第 2.4 節では Clark と Ehlenberg の 2 元生成の場合の結果を広く一般化した次の定理を示す.

Theorem 2.4.2. Λ_1 と Λ_2 を有限生成半順序集合的加法的モノイドとする. ρ_1 と ρ_2 をそれぞれ Λ_1 と Λ_2 の可約元とする. 直和 $\Lambda_1 \oplus \Lambda_2$ から ρ_1 と ρ_2 を同一視して得られる加法的モノイドを Λ とする. ρ_1 と ρ_2 の同値類を ρ で表わす. このとき, 次のホモトピー同値が成り立つ.

$$\mathcal{F}(\lambda; \Lambda) \simeq \bigvee_{\ell\rho+\lambda_1+\lambda_2=\lambda} S^{2\ell} * \mathcal{F}(\lambda_1; \Lambda_1) * \mathcal{F}(\lambda_2; \Lambda_2).$$

但し, $\ell, \lambda_1, \lambda_2$ はそれぞれ $\mathbb{N}, \Lambda_1, \Lambda_2$ を走る.

証明には半順序集合上の位相空間の図式のホモトピー余極限に関する理論を用いる. ホモトピー余極限については第 2.3 節で導入し, 必要となる性質を示す. また上の定理から上記 Λ に付随する多次ポワンカレ級数に関する公式

$$P_k^{k[\Lambda]}(t, \mathbf{z}) = \frac{P_k^{k[\Lambda_1]}(t, \mathbf{z}) \cdot P_k^{k[\Lambda_2]}(t, \mathbf{z})}{1 - t^2\mathbf{z}^\rho}$$

を得る. 第 2.5 節では, この定理の応用としていくつかの例についてフロベニウス複体のホモトピー型を決定する.

第 3 章ではオーソスキーム複体の CAT(0) 性について考察する. CAT(0) 性は曲率の非正性を一般の測地距離空間に拡張した概念である. Gromov は立方体的複体が CAT(0) 空間であるための組合せ論的な簡潔な必要十分条件を与えた. Brady と McCammond は組みひも群が CAT(0) 群であることを示すために階層的半順序集合 P の順序複体の幾何学的実現 $|P|$ の上にオーソスキーム距離を定義した. $|P|$ をオーソスキーム距離によって距離空間とみなしたものをオーソスキーム複体と呼ぶ. オーソスキーム複体は立方体的複体の一般化とみなすことができる. 実際, 立方体的複体 X の face poset のオーソスキーム複体は X と等長である. 彼らは最大元と最小元をもつランクが 4 以下の階層的半順序集合に対して, そのオーソスキーム複体が CAT(0) 空間であるための組合せ論的な必要十分条件を与え, 5 以下の n に対し n 本糸の組みひも群が CAT(0) 群であることを示した.

P のオーソスキーム複体が CAT(0) 空間であるための十分条件はいくつか見つかっているが, 必要十分条件は一般的な状況ではあまり知られていない. 第 3.5 節では, Gromov による立方体的複体の CAT(0) 性の特徴付けを拡張する形で, オーソスキーム複体の CAT(0) 性に関する特徴付けについて議論する. まず, いくつかの考察の下で Gromov の特徴付けと等価な次の定理を示す.

Theorem 3.5.3. S を半束とし, S の任意の単項イデアル $S^{\leq x}$ はブール束であるとする. このとき, S のオーソスキーム複体 $|S|$ が CAT(0) 空間であることと, S がフラグ半束であることは同値である.

半束 S がフラグ半束であるとは, S の有限部分集合が対ごとに有界ならば全体として有界であることをいう. さらに, 上の定理の仮定は次のように弱められる.

Theorem 3.5.4. S を半束とし, S の任意の単項イデアル $S^{\leq x}$ は分配束であるとする. このとき, S のオーソスキーム複体 $|S|$ が CAT(0) 空間であることと, S がフラグ半束であることは同値である.

証明の鍵となるのは, 定理の仮定をみたすような半束 S に対する表現定理である. Birkhoff の表現定理として知られる分配束に対する表現定理を拡張する形で第 3.3 節で示す (Theorem 3.3.4). もうひとつの鍵は立方体的錐の構成である. 一般の錐のアナロジーとして第 3.4 節で導入し基本性質を示す. 特に, この構成は立方体的複体のリンクをとる操作の部分的な逆とみなすことができる.