論文の内容の要旨

論文題目

Analysis for Viscosity Solutions with Special Emphasis on Anomalous Effects

(不規則効果を強調した粘性解析)

氏名　難波 時永

本論文では，古典的な場合と根本的に異なる効果を生む因子を有する時間発展型の非線形偏微分方程式，特にハミルトン・ヤコビ方程式及び２階退化楕円型作用素を主要部に持つ方程式に対して均質化問題の考察や適切性の調査を行う．扱われる方程式は最適制御，結晶成長，異常拡散などの実現象論と深い関わりを持っている．粘性解理論の枠組みで，問題の内包する諸課題を精密に解析または粘性解の概念を拡張することにより，根本的な違いを生む原因を明らかにし古典的な結果との比較を行う．

第１章では，結晶成長の現象を動機とする強圧的でないハミルトニアンを持つハミルトン・ヤコビ方程式に対して均質化問題を考察する．均質化とは，対象の微視的な様相から巨視的な様相を推定する手法の一つであり，数学的には一種の特異極限問題として記述される．強圧的なハミルトニアンに対しては均質化極限の存在結果がよく知られているが，強圧的でない場合は同様の議論が機能せず，現在のところ統一的な解法はない．

もっとも議論を要するのはセル問題である．これは固有値問題に似ており，与えられたベクトル (以降，P と同一視する) に対して，(定常) ハミルトン・ヤコビ方程式が連続な

粘性解を持つような一意的な定数を見つける問題である．この時，各 P に対応する一意定数は P についての関数として見ることができ，これは対応する均質化問題における極限方程式のハミルトニアンを決定する．このハミルトニアンは実効ハミルトニアンと呼ばれる．ハミルトニアンが強圧的である場合は，任意のベクトル P に対してセル問題は可解，すなわちセル問題を解く一意的な定数が存在するという古典的事実に基づき，本研究では，元のハミルトニアンを近似するある強圧な近似ハミルトニアンを持つセル問題を考えることで近似実効ハミルトニアンを得る．そして，その極限として一般化実効ハミルトニアンを導入することにより，セル問題が可解となる P の集合を特徴付ける．特に，1次元の場合には，この集合が $\mathbb{R}$，有界開区間，空集合となる場合があることを明示的に示す．

セル問題の可解性の結果及び一般化実効ハミルトニアンの概念を用いて，対応する均質化問題の均質化極限が存在する場合の十分条件を与える．また，均質化極限が存在しない場合があることも示し，そうなるための十分条件を与える．

第2章では，Caputo の意味での非整数階時間微分 (以降，Caputo 時間微分) を持つハミルトン・ヤコビ方程式の初期値問題に対する適切性を調べる．ただし，本章を通して Caputo 時間微分の階数 α は $0 < \alpha < 1$ の場合のみ考える．Caputo 時間微分を持つ偏微分方程式は幅広い実現象への応用を持っており，近年急激に注目を集めている．中でも，通常の拡散方程式の時間微分を Caputo 時間微分で置き換えた anomalous diffusion equations の研究は盛んで，[Sakamoto-Yamamoto, '11] において超関数の意味の弱解を用いた研究が開始された．[Allen, preprint] により，ある Caputo 時間微分を持つ方程式の正則性が粘性解を用いて考察されたが，そこでは適切性は述べられなかった．本研究は，以上の研究で考えられているような方程式に対する粘性解理論を構築することを目指している．2階の方程式に対しては技術的な問題を含んでいるため，本章ではまず1階の方程式に対して考察し，2階への拡張は次章で行う．なお，1階の方程式に対しても本研究結果は全く新しいものである．

関数 u の Caputo 時間微分 $\partial_t^\alpha u$ は u の時間微分と関数 $t^{-\alpha}$ との畳み込み積で定義される非局所な関数であるため，従来の粘性解の定義は直接適用できない．また，分数冪ラプラシアンなどの空間非局所な方程式に対してはすでに粘性解理論は構築されているが，微分の定義が異なるために同様の定義が適用できるかどうかは明らかではない．したがって，本研究の主要な課題は一意可解性を確証する (粘性) 解を定義することである．粘性解理論の考えに基づき，[Luchko, 2009] において確立された Caputo 微分に対する最大値原理と空間方向に関する古典的な最大値原理を利用することによって一種の弱い解の概念

を得る．しかしながら，この意味の解に対しては比較定理を示す際に使われる変数倍化法が思うように機能しない．この解決策として，Caputo 時間微分を部分積分した関数 (これは未知関数の微分を含まない) を Caputo 時間微分の代替物として粘性解を定義する．この意味での粘性解に対しては変数倍化法が機能するため，比較定理 (一意性) が得られる．また，従来と同様にペロンの方法による (連続) 解の存在も得られるため，初期値問題の一意可解性が示される．本章では以上に加えて，解の安定性と解の正則性の問題も考察する．安定性については従来のものに加えて，時間微分の階数をパラメータとみた場合の極限操作の下での安定性を示す．正則性は，ハミルトニアン及び初期値を少し制限することで，時間について時間微分階数と同じ次数のヘルダー連続かつ空間についてリプシッツ連続であることを示す．

本章でのハミルトニアンや初期値への仮定は整数階の場合でも標準的なものであり，特にいずれの結果も Caputo 時間微分を持つ移流方程式

$$\partial_t^\alpha u + \nu(t,x) \cdot Du = 0$$

に適用可能であることを強調しておく．(ここで，Du は未知関数 u の空間勾配を表している)．

第 3 章では，第 2 章での考察を基に，Caputo 微分を持つ 2 階完全非線形偏微分方程式の初期値問題に対する適切性を調べる．ただし本研究では，Caputo 時間微分は単項に限らず正の係数を持つ Caputo 時間微分の有限和である場合も含む．このような状況は，より込み入った現象に対応するモデルとして応用分野ではしばしば扱われている．

粘性解の定義は第 2 章でのアイデアを基に与える．したがって，ペロンの方法による解の存在と安定性は少し証明を修正することで示される．ただし，ペロンの方法で必要なバリアは，単項の場合は第 2 章または整数階の時の類似によって構成できるが，多項の Caputo 時間微分を扱う場合は明らかではない．これは単項の場合と近い形で与えられることを示す．残る比較定理の確立が本章の主要な課題である．比較定理の証明における重要なステップは半連続関数の最大値原理の適用であるが，従来の結果 (Crandall-石井の補題，石井の補題) は Caputo 微分の非局所性により直接適用できない．そこで，Caputo 微分をもつ方程式に対する semijet の関係 (整数階の場合は石井の補題と呼ばれる) を示し比較定理を確立する．

第 4 章では，非斉次ノイマン境界条件下での Caputo 時間微分を持つハミルトン・ヤコビ方程式に対する適切性を調べる．時間微分が整数階の場合，初期境界値問題に対して粘

性解の一意存在を確立するためには境界条件をある特別な意味で解釈しなければならない．しかし，Caputo 時間微分を持つ方程式の解の空間形状は整数階の場合とは異なるため，そのような方程式に対しては粘性解を境界値でどのように解釈すれば良いかは全く明らかではない．本研究では非斉次ノイマン境界条件に焦点を絞り，整数階の時と同様の解釈をした場合に比較定理 (一意性) とペロンの方法による解の存在定理が得られることを示す.

第 5 章では，最適制御の問題に由来する状態拘束境界条件下での時間発展ハミルトン・ヤコビ方程式の均質化問題を考察する．ここでのハミルトニアンは強圧的であり，時間微分は 1 階であることを注意する．これまでの状態拘束境界条件付き方程式の均質化問題の研究は，微視的に見て領域に周期的に小さな穴が空いている場合や，発散型の方程式に対するものに限られる．そこで，本研究では穴のない領域に対して考察する．困難な点はセル問題が単純な漸近展開では決定できないことである．本研究では，解の収束の議論においては境界がない場合の (通常の) セル問題しか使わないことに着目することでセル問題を決定する．そのようなセル問題が解けることはすでに知られているため，結果として収束 (均質化) の結果が得られる．