論文内容の要旨

論文題目: Study of the Kähler-Ricci Flow and its Application in Algebraic Geometry
（ケーラー・リッチ流の研究とその代数幾何学における応用）

氏　　名: 野 村 亮 介

本論文は，以下の 3 つについて述べたものである．

- 定値正則断面曲率をもつコンパクト Kähler 多様体への Kähler-Ricci flow の応用 [Nom16a]
- conical Kähler 計量に対する Schwarz の補題 [Nom16b]
- 最大存在時間が有限な conical Kähler-Ricci flow のスカラー曲率の挙動 [Nom16c]

以下，各項目について得られた結果を述べる．

1　定値正則断面曲率をもつコンパクト Kähler 多様体への Kähler-Ricci flow の応用

コンパクト Kähler 多様体 (X,ω) に対し，その曲率として，Ricci 形式 $\mathrm{Ric}(\omega)$ と正則断面曲率 $H(\omega)$ が考えられる．この 2 つの曲率の間の直接的な関係は知られておらず，一方の曲率の正値性が他方の正値性を導く，という主張ですら未解決である．そこで，Ricci 形式が，コホモロジー類 $-2\pi c_1(K_X)$ を代表することに着目すると，X の標準束 K_X の正値性と正則断面曲率 $H(\omega)$ の負値性との関係性はどのようなものか，という問題を考えることができる．この問題自体は，Yau によるものである ([HLW16, Conjecture 1.2])．この問題について，近年 Wu-Yau および，Tosatti-Yang らが次の結果を得た．

Theorem 1 (Wu-Yau [WY16a], Tosatti-Yang [ToY15])**.** コンパクト Kähler 多様体 X が，$H(\widehat{\omega}) < 0$ なる Kähler 計量 $\widehat{\omega}$ をもつならば，その標準束 K_X は豊富 (ample) である．□

Theorem 2 (Tosatti-Yang [ToY15])**.** コンパクト Kähler 多様体 X が，$H(\widehat{\omega}) \leq 0$ なる Kähler 計量 $\widehat{\omega}$ をもつならば，その標準束 K_X は数値的半正 (nef) である．□

これらの定理の証明は，Wu-Yau による以下のアイディアに基づいている．つまり，$2\pi c_1(K_X)+\varepsilon[\widehat{\omega}]$ が Kähler 類となる正定数 $\varepsilon > 0$ に対し，$\mathrm{Ric}(\omega_\varepsilon) = -\omega_\varepsilon + \varepsilon\widehat{\omega}$ を満たす Kähler 計量 $\omega_\varepsilon \in 2\pi c_1(K_X)+\varepsilon[\widehat{\omega}]$ をとり，ε を 0 に近づけていくときの ω_ε 振る舞いを調べるのである．

本論文では，Theorem 1, 2 を Kähler-Ricci flow を用いた別証明を与えた [Nom16a]．証明においては，次の 2 点がキーとなる．つまり，Kähler-Ricci flow の最大存在時間 T のコホモロジー類を用いた特徴づけ [TZ06] を用いて，K_X の正値性と Kähler-Ricci flow とを関係づける点，そして，放物型 Schwarz の補題 [ST07] と正則断面曲率を結びつけて C^2-評価を得る点である．

2 Conical Kähler 計量に対する Schwarz の補題

一変数複素解析における基本的な結果の 1 つに，Schwarz の補題がある．これは，単位円盤の間の任意の正則写像は，Poincaré 距離を減少させる，というものであった．この定理は様々な形に一般化されているが，そのなかでも革新的であったのは，Yau [Yau78] による高次元化であろう．これは，Ricci 曲率が下から一様に有界な完備 Kähler 多様体から，正則双断面曲率が上から負の定数で抑えられる Hermite 多様体への任意の正則写像は，その距離を（定数倍を除いて）減少させる，というものであった．また，Yau は，同様の曲率の仮定のもとに，体積形式に関する Schwartz の補題も得ている．

その後，Jeffres [Jef00] は，conical Kähler 計量に対し，体積形式に関する Schwartz の補題を証明した．ここで，conical Kähler 計量は完備でないため，最大値原理を用いるという Yau の手法を直接用いることができない，という点に注意する．この点を，Jeffres は，“バリア関数” を導入することにより克服したのであった．しかし，その議論を遂行するための conical Kähler 計量に関する regularity の仮定が不足していた．また，定理の主張には，cone angle に関する制限があるという不満もあった．

本論文では，Jeffres の証明におけるギャップを補い，また，任意の cone angle に対して適用できるように改良した．さらに，Jeffres の論文では扱っていなかった距離に関する Schwarz の補題も得た．本論文で得た距離に関する Schwarz の補題は，以下のものである．

Theorem 3 ([Nom16b])**.** (X, D, ω_X), (Y, E, ω_Y) をそれぞれコンパクト Kähler 多様体，多様体内のなめらかな因子，その因子にそった conical Kähler 計量の三つ組とする．また，ω_X, ω_Y の cone angle をそれぞれ $2\pi\alpha$, $2\pi\beta$ とする．さらに，曲率の仮定として，次のような定数 $A, B > 0$ が存在すると仮定する．

$$\mathrm{Ric}(\omega_X) \geq -A\omega_X,\ \mathrm{Bisec}(\omega_Y) \leq -B < 0.$$

このとき，$f^*E = kD$ $(k \in \mathbb{Z})$ を満たす任意の正則写像 $f\colon X \to Y$ に対し，次が成り立つ．

$$f^*\omega_Y \leq \begin{cases} \dfrac{A}{B}\omega_X & \text{if } \alpha \leq k\beta \\ \dfrac{A + (\alpha - k\beta)C}{B} \dfrac{\omega_X}{|s|_h^{2(\alpha-k\beta)}} & \text{if } \alpha > k\beta \end{cases}$$

ただし，$s \in H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$ は，その零因子が D となるものであり，h は，直線束 $\mathcal{O}_X(D)$ の Hermite 計量，$C > 0$ は，$\sqrt{-1}\,R_h \leq C\omega_X$ を満たす定数とした． □

先に述べたように，体積形式に関する主張も得たが，同様の主張であるので，詳細は論文参照されたい．

3　最大存在時間が有限な conical Kähler-Ricci flow のスカラー曲率の挙動

conical Kähler-Ricci flow は，Kähler-Ricci flow を conical Kähler 計量に拡張したものである．代数幾何学の観点では，Kähler-Ricci flow は，標準束 K_X を考えることに対応し，conical Kähler-Ricci flow は，対数的標準束 $K_X + (1-\beta)D$ を考えていることに対応する．

ここで，conical Kähler-Ricci flow の定義を振り返っておく．(X, D) をコンパクト Kähler 多様体と，滑らかな因子の組とし，β を $0 < \beta < 1$ とする．conical Kähler 計量の族 ω_t が（正規化された）conical Kähler-Ricci flow であるとは，次の発展方程式を満たすことをいう．

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\omega_t & = -\mathrm{Ric}(\omega_t) - \omega_t + 2\pi(1-\beta)[D], \\ \omega_t|_{t=0} & = \omega^*. \end{cases}$$

与えられた初期計量 ω^* に対し，conical Kähler-Ricci flow が存在する時間については Shen [She14a, She14b] による次の結果がある．初期計量 ω^* が，ある種の形をしているとき，conical Kähler-Ricci flow ω_t は存在し，さらにその最大存在時間 T は，以下のようにコホモロジー類の情報を使って特徴づけられる．

$$T = \sup\{t > 0 \mid [\omega_t] = e^{-t}[\omega_0] + (1-e^{-t})2\pi c_1(K_X + (1-\beta)D) \ \text{ is a Kähler class}\}.$$

この節では，conical Kähler-Ricci flow が有限時間しか存在しない時，スカラー曲率の発散度合いについて得られた結果に述べる．この定理は，Kähler-Ricci flow における Zhang [Zha10] の結果を conical Kähler-Ricci flow に拡張したものである．また，このような特異性の解析は，幾何解析における基本的な問題である．

Theorem 4 ([Nom16c])**.** ω_t を，ω^* を初期値とする conical Kähler-Ricci flow とし，最大存在時間 T が有限であるとする．さらに，あるコンパクト Kähler 多様体 (Z, ω_Z) への正則写像 $f\colon X \longrightarrow Z$ および，ある Z 内の因子 D_Z が存在し，$D = f^*D_Z$，$[f^*\omega_Z] = [\omega_T]$ を満たすと仮定する．このとき，スカラー曲率に関して次の評価が成り立つ．

$$R(\omega_t) \leq \frac{C}{(T-t)^2}$$

□

定義から，conical Kähler 計量は因子 D に沿って特異性をもつ．そこで，Campana-Guenancia-Păun [CGP13] が用いた，conical Kähler 計量を滑らかな計量で近似する技術が必要となる．

参考文献

[CGP13] F. Campana, H. Guenancia, and M. Păun, *Metrics with cone singularities along normal crossing divisors and holomorphic tensor fields*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) **46** (2013), no. 6, 879–916, MR: 3134683.

[HLW16] G. Heier, S. S. Y. Lu, and B. Wong, *Kähler manifolds of semi-negative holomorphic sectional curvature*, J. Differential Geom. **104** (2016), no. 3, 419–441, MR: 3568627.

[Jef00] T. D. Jeffres, *Schwarz lemma for Kähler cone metrics*, Internat. Math. Res. Notices (2000), no. 7, 371–382, DOI: 10.1155/S1073792800000210, MR: 1749739.

[Nom16a] R. Nomura, *Kähler manifolds with negative holomorphic sectional curvature, Kähler-Ricci flow approach*, `arXiv:1610.01976[math.DG]`, submitted to International Mathematics Research Notices.

[Nom16b] R. Nomura, *Schwarz lemma for conical Kähler metrics with general cone angles*, `arXiv:1610.01975[math.DG]`, submitted to Osaka Journal of Mathematics.

[Nom16c] R. Nomura, *Blow-up behavior of the scalar curvature along the conical Kähler-Ricci flow with finite time singularities*, `arXiv:1607.03004[math.DG]`, submitted to Differential Geometry and its Applications.

[She14a] L. Shen, *Unnormalize conical Kähler-Ricci flow*, `arXiv:1411.7284[math.DG]`.

[She14b] L. Shen, *$C^{2,\alpha}$-estimate for conical Kähler-Ricci flow*, `arXiv:1412.2420[math.DG]`.

[ST07] J. Song and G. Tian, *The Kähler-Ricci flow on surfaces of positive Kodaira dimension*, Invent. Math. **170** (2007), no. 3, 609–653, DOI: 10.1007/s00222-007-0076-8, MR: 2357504.

[ToY15] V. Tosatti and X. Yang, *An extension of a theorem of Wu-Yau*, `arXiv:1506.01145[math.DG]`.

[TZ06] G. Tian and Z. Zhang, *On the Kähler-Ricci flow on projective manifolds of general type*, Chinese Ann. Math. Ser. B **27** (2006), no. 2, 179–192, DOI: 10.1007/s11401-005-0533-x, MR: 2243679.

[WY16a] D. Wu and S.-T. Yau, *Negative holomorphic curvature and positive canonical bundle*, Invent. Math. **204** (2016), no. 2, 595–604, DOI: 10.1007/s00222-015-0621-9, MR: 3489705.

[Yau78] S.-T. Yau, *A general Schwarz lemma for Kähler manifolds*, Amer. J. Math. **100** (1978), no. 1, 197–203, MR: 0486659.

[Zha10] Z. Zhang, *Scalar curvature behavior for finite-time singularity of Kähler-Ricci flow*, Michigan Math. J. **59** (2010), no. 2, 419–433, DOI: 10.1307/mmj/1281531465, MR: 2677630.