論文の内容の要旨

論文題目　Applications of Fraïssé theory to operator algebras
（Fraïssé 理論の作用素環への応用）

氏　名　増本　周平

本論文では距離構造と距離構造間の埋め込みとのなす圏に対する Fraïssé 理論を構築する．また，この理論に基づき UHF 環及び Jiang–Su 環を Fraïssé 極限として実現する．

Fraïssé 理論はモデル理論の一トピックであり，均質性の高い可算構造を有限生成構造の貼り合わせとして把握する理論である．構成材料となる有限生成構造全体のなすクラス $\mathcal{K}$ はこの文脈において Fraïssé クラスと呼ばれ，古典的なモデル理論の範疇では以下の公理を満たすことが要請される．

- $\mathcal{K}$ は同型を除きたかだか可算個の構造しか含まない
- HP: $\mathcal{A}$ が $\mathcal{K}$ の元で $\mathcal{B}$ が $\mathcal{A}$ の部分構造ならば，$\mathcal{B}$ も $\mathcal{K}$ の元である．
- JEP: $\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ が $\mathcal{K}$ の元ならば，両者を部分構造として含む $\mathcal{K}$ の元 $\mathcal{C}$ が存在する．
- AP: $\iota_1 \colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}_1$ と $\iota_2 \colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}_2$ とが $\mathcal{K}$ の元の間の埋め込みであるとき，$\mathcal{K}$ の元 $\mathcal{C}$ と埋め込み $\eta_1 \colon \mathcal{B}_1 \to \mathcal{C}$ 及び $\eta_2 \colon \mathcal{B}_2 \to \mathcal{C}$ とが存在して，$\eta_1 \circ \iota_1 = \eta_2 \circ \iota_2$ となる．

Fraïssé の定理は，Fraïssé クラスの元の包含列 $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2 \subseteq \cdots$ と $\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}_2 \subseteq \cdots$ とが与えられたとき，ジェネリックにはこれらの極限構造 $\bigcup \mathcal{A}_i$ と $\bigcup \mathcal{B}_j$ とが互いに同型であり，しかも次の意味で超均質であることを主張する：$\mathcal{C}$ と $\mathcal{D}$ とが極限 $\bigcup \mathcal{A}_i$ の有限生成部分構造で，$\varphi \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ が同型写像であるとき，$\bigcup \mathcal{A}_i$ の自己同型 α で $\alpha|_{\mathcal{C}} = \varphi$ となるものがとれる．

この理論は Ben Yaacov によって古典的なモデル理論で用いる離散構造から関数解析と相性の良い距離構造へと扱える対象を拡張された．さらに Ben Yaacov の拡張は Eagle らによって一般化され，UHF 環や Jiang–Su 環を含む作用素環へと応用された．

本論文の最初の結果は，Ben Yaacov や Eagle らにより一般化された Fraïssé 理論の圏へのさらなる一般化である．すなわち，Fraïssé クラスの一般化として Fraïssé 圏の定義を与え，ジェネリックな極限の存在と一意性を示したうえでその極限が持つべき均質性について明らかにした．

本論文の第二の結果は，この理論の UHF 環及び Jiang–Su 環への応用である．これらの作用素環は先に述べたように Eagle らによっても扱われているが，本論文での取り扱いは彼らとは大きく異なるものである．具体的には，まず UHF 環については，Eagle らが有限次元単純 C*環のからなるクラスを用いたのに対し，本論文では有限次元立方体上の行列値連続関数のなす忠実トレース付き C*環とそれらの間の対角化可能な準同型のなす圏を用いた．また Jiang–Su 環については，Eagle らが Jiang–Su 環の非自明な性質を仮定したのに対し，本論文では Jiang–Su 環については何も仮定せず，Fraïssé 理論を応用するための一切を極めて初等的な議論によって証明し，さらに Fraïssé 極限として構成から Jiang–Su 環の性質の一部について別証明を与えた．

本論文は二章で構成されている．第一章では Fraïssé 圏とその極限についての理論を構築する．この章では最初の二節で基本的な道具である近似等距離写像及び近似埋め込みを導入し，その基本的な性質を述べる．続く第三節で Fraïssé 圏の定義を与え，ジェネリックな極限についての諸結果を証明する．第二章では第一章で構築した Fraïssé 理論の作用素環への応用を行う．最初の節では UHF 環，第二節では Jiang–Su 環について取り扱う．