論文内容の要旨

論文題目　Sharp interface limit for the stochastic Allen-Cahn equation
(確率アレン・カーン方程式に対する鋭敏な界面極限)

氏名　李　嘉衣

アレン・カーン方程式とは、双安定な反応項 f を持つ反応拡散方程式のことである。この方程式は、2 種類の鉄合金、水と油などの境界面（界面）が形成され、それが時間発展する様子を表現する。特に相分離の過程、界面ダイナミクスならびに相転移現象と密接に関わるモデルであり、物理的な背景を基礎に数多くの研究がなされてきた。確率アレン・カーン方程式とは、このアレン・カーン方程式に外的ノイズ項を付加した確率偏微分方程式のことである。本博士論文では十分小さい $\varepsilon > 0$ でパラメータ付けされた確率アレン・カーン方程式

$$\partial_t u^\varepsilon(t,x) = \Delta u^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} f(u^\varepsilon) + \dot{W}^\varepsilon(t,x),\ t > 0,\ x \in D,$$

について考察する。ここで $D \subset \mathbb{R}^d$ $(d \geq 1)$ は適当な領域とし、何かしらの境界条件を持つ。本博士論文では $\int_{-1}^{1} f(u)du = 0$ を仮定し、更に簡単のため f の安定点は ± 1 とする。まずはノイズのない場合（$W^\varepsilon \equiv 0$）を考えよう。初期値では拡散項の影響が非常に弱いため、双安定な反応項 f により、解は ± 1 の二つの相に分離される。その境界を界面と呼び、界面が形作られる過程を界面の生成という。その後、界面の近傍では反応項と拡散項が釣り合い、適当な時間のスケール変換をとると $O(1)$ の速度で運動することが知られている。このスケール変換のオーダーは $\varepsilon > 0$ に依存し、空間次元や反応項 f の条件によって変化させる必要がある。界面の形状も ε で特徴付けられており、特にその幅は $O(\varepsilon^{\frac{1}{2}})$ である。そのため $\varepsilon \to 0$ という極限を取った時、極限では鋭敏な形状の界面が一瞬で生成され、更にそれが運動するような挙動が観察される。このことから、この極限のことを鋭敏な界面極限と呼ぶ。本研究の目的は、確率アレン・カーン方程式の解に対する鋭敏な界面極限を与え、界面の生成、界面が運動するための時間スケール、極限で導出される界面運動を記述する方程式について考察を行うことである。

先行結果と背景

空間 1 次元、つまり $D = \mathbb{R}$ で外的ノイズ項がない場合については Chen[2] などによって研究された。Chen[2] は $\partial_t u^\varepsilon(t,x) = \partial_{xx} u^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} f(u^\varepsilon)$ なる 1 次元アレン・カーン方程式の鋭敏な界面極限について考察を行い、界面の挙動を (1) 二相への分離 (2) 準安定パターンの生成 (3) 界面の超微速運動 (4) 界面同士の消滅、の 4 段階に分類した。特に本博士論文では (1) から (3) の段階について論ずる。また (3) で言及した超微速運動に対しては、$O(1)$ の速度で界面運動するための時間スケールが

$O(\exp(\frac{C}{\varepsilon}))$ と言った非常に長いものとなることに注意されたい。一方で、舟木 [3] では、外的ノイズ項として $\dot{W}^\varepsilon(t,x) := \varepsilon^\gamma a(x)\dot{W}(t,x)$ を採用した 1 次元確率アレン・カーン方程式に対して界面の挙動の考察を行なっている。ここで $a \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ かつ $\dot{W}(t,x)$ は $\mathbb{R}$ 上の時空ホワイトノイズである。この結果では $\bar{u}^\varepsilon(t,x) = u^\varepsilon(\varepsilon^{-2\gamma-\frac{1}{2}}t,x)$ とした時に、$x<\xi$ の時に -1、$x>\xi$ の時に 1 をとる関数 χ_ξ と確率過程 ξ_t を用いて $\bar{u}^\varepsilon \Rightarrow \chi_{\xi_t}$ が示された。この ξ_t を時間発展する界面の位置と見做すことが出来る。更に界面 $\xi_t \in \mathbb{R}$ は、α_1 と α_2 を f による定数、B_t を 1 次元ブラウン運動として

$$d\xi_t = \alpha_1 a(\xi_t)dB_t + \alpha_2 a(\xi_t)a'(\xi_t)dt, \tag{0.1}$$

なる確率微分方程式に従う。このことから、適切な時間スケールは $O(\varepsilon^{-2\gamma-\frac{1}{2}})$ であり、上で述べた (3) の超微速運動のものに比べて非常に短い時間スケールとなることが分かる。この差異はノイズの寄与に他ならず、以上のように界面運動は確率微分方程式によって記述される。舟木の結果では初期値においてすでに界面が生成されているが、李 [6] ではその初期値を更に一般のものに取り、$O(\varepsilon|\log\varepsilon|)$ のオーダーの時刻までに界面が生成されることを示した。界面の生成の後には、上で述べた確率微分方程式により界面の挙動が記述される（本博士論文第 2 章参照）。

また空間多次元、すなわち $d \geq 2$ の場合の先行研究についても触れておく。空間が多次元かつノイズ項がない偏微分方程式の場合は、例えば de Mottoni-Schatzman [7] などによって考察された。多次元の場合、界面の形状は領域内の閉曲面（2 次元であれば閉曲線）として表せる。彼らは時間スケールを変化させずとも界面運動が $O(1)$ で観察でき、界面の形状の時間発展は平均曲率流 $V_t = \kappa$ として導出されることを示した。更に外力項のある特別な場合として Alfaro 達の結果 [1] が挙げられる。彼らの結果では、界面は $O(\varepsilon|\log\varepsilon|)$ のオーダーの時間までに、つまり一瞬のうちに生成され、界面の挙動は平均曲率流に外力項の寄与が残るというものである。また、彼らの証明の方法である優解と劣解の構成は、本博士論文第 3 章における議論に際して特筆すべき鍵となる。ノイズ項を持つ場合は舟木 [4] によって考察されている。ノイズ項は $\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\dot{w}_t^\varepsilon$ と取り w_t^ε は a.s. で滑らかかつ 1 次元ブラウン運動に収束するような確率過程である。彼は特に 2 次元の場合について解析し、偏微分方程式の時と同様、時間スケールに変化はなく界面の挙動はノイズの寄与が残った平均曲率流 $V_t = \kappa + \alpha w_t$, で記述されることを示した。ここで V_t は外向きの界面の速度であり w_t は 1 次元ブラウン運動、α は f による定数である。

以下、本博士論文の概要について説明する。第 1 章は序章である。

1 次元アレン・カーン方程式に対する界面の生成

第 2 章では、1 次元の場合の結果について述べる。設定は舟木 [3] と同じであるが、初期値は

$$\begin{cases} \text{(i)}\|u_0^\varepsilon\|_\infty + \|u_0^{\varepsilon\prime}\|_\infty + \|u_0^{\varepsilon\prime\prime}\|_\infty \leq C_0, \\ \text{(ii)}\varepsilon > 0 \text{ と独立な}\xi_0 \in [-1,1] \text{ が唯一つ存在し、}u_0^\varepsilon(\xi_0) = 0, \\ \text{(iii)}|u_0^\varepsilon(x)| \geq C\varepsilon^{\frac{1}{2}} \ (|x-\xi_0| \geq C'\varepsilon^{\frac{1}{2}}), \\ \text{(iv)}|u_0^\varepsilon(x)-1| + |u_0^{\varepsilon\prime}(x)| + |u_0^{\varepsilon\prime\prime}(x)| \leq \varepsilon^\kappa C_\mu \exp(-\frac{\sqrt{\mu}x}{2}) \ (x \geq 1), \\ \text{(v)}|u_0^\varepsilon(x)+1| + |u_0^{\varepsilon\prime}(x)| + |u_0^{\varepsilon\prime\prime}(x)| \leq \varepsilon^\kappa C_\mu \exp(\frac{\sqrt{\mu}x}{2}) \ (x \leq -1), \end{cases} \tag{0.2}$$

を満たすものと仮定する。

定理 1. 初期値 u_0^ε が *(0.2)* を満たし, $\bar{u}^\varepsilon(t,x) := u^\varepsilon(\varepsilon^{-2\gamma-\frac{1}{2}}t, x)$ とおく。この時、確率変数 $C(\omega) \in L^\infty(\Omega)$ と確率過程 $\{\xi_t^\varepsilon\}$ が存在し、

$$P\left(\text{任意の } t \in [C(\omega)\varepsilon^{2\gamma+\frac{3}{2}}|\log\varepsilon|, T] \text{ に対し } \|\bar{u}^\varepsilon(t,\cdot) - \chi_{\xi_t^\varepsilon}(\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})} \le \delta\right) \to 1 \quad (\varepsilon \to 0),$$

が任意の $\delta > 0$ と $T > 0$ について成立する。 さらに確率過程 ξ_t^ε の $C([0,T],\mathbb{R})$ 上での分布は ξ_t の分布に弱収束し、ξ_t は確率微分方程式 *(0.1)* に従う。

定理 1 により、界面はノイズがない場合と同じ $O(\varepsilon|\log\varepsilon|)$ の時間までに生成され、界面運動に移行することがわかる。この結果は解のエネルギー評価により、解 u^ε の、アレン・カーン方程式に対応するギンツブルグ・ランダウ自由エネルギー汎関数のミニマイザーへの収束により証明される。

多次元アレン・カーン方程式に対する界面の生成

第 3 章では多次元アレン・カーン方程式に対して界面の生成を証明する。多次元の場合は、ノイズが解の正則性に影響を与えるため、時空ホワイトノイズのような、特異なノイズを採用することは容易ではない。そのため、空間方向に滑らかな Q-ブラウン運動 $W^Q(t,x)$ を用意し、$\varepsilon^\gamma \dot{W}^Q(t,x)$ をノイズ項とした。

定理 2. 解 u^ε の初期値が $\|u_0\|_\infty + \|u_0'\|_\infty + \|u_0''\|_\infty \le C_0$ を満たす時、以下の収束を得る。

(i) $\lim_{\varepsilon\to 0} P(\text{全ての } x \in D \text{ に対して } -1-\varepsilon^\kappa \le u^\varepsilon(x, C_1\varepsilon|\log\varepsilon|) \le 1+\varepsilon^\kappa) = 1$

(ii) $\lim_{\varepsilon\to 0} P(\text{全ての } u_0(x) \ge \varepsilon^{1-C_1\mu} \text{を満たす } x \in D \text{ に対して } u^\varepsilon(x, C_1\varepsilon|\log\varepsilon|) \ge 1-\varepsilon^\kappa) = 1$

(iii) $\lim_{\varepsilon\to 0} P(\text{全ての } u_0(x) \le \varepsilon^{1-C_1\mu} \text{を満たす } x \in D \text{ に対して } u^\varepsilon(x, C_1\varepsilon|\log\varepsilon|) \le -1+\varepsilon^\kappa) = 1.$

この場合も $O(\varepsilon|\log\varepsilon|)$ の非常に早い時刻において界面が生成されていることを示した。定理 2 を示す過程において、偏微分方程式の最大値原理を応用し、確率偏微分方程式の比較定理を示した。このことにより、第 2 章の結果と比べてより具体的な界面生成の評価ならびに形状が得られるのである。また同様の方法が空間 1 次元の場合にも応用可能である。特別なノイズ項を取ることによって第 2 章と類似の結果が成り立つことにも触れる。

ディリクレ境界条件を持つ場合

第 4 章では再び空間 1 次元の場合を考察する。領域は $D = [-1,1]$ なる区間を考え、ディリクレ境界条件 $u^\varepsilon(\pm 1) = \pm 1$ を持つような場合を扱う。外的ノイズ項は $\dot{W}^\varepsilon(t,x) := \sqrt{2}\varepsilon^\gamma \dot{W}(t,x)$ とし、$\dot{W}(t,x)$ は区間 $[-1,1]$ 上の時空ホワイトノイズとする。今、確率微分方程式 (0.1) に形式的に $a \equiv 1$ を代入すると、$\xi_t = \alpha_1 B_t$ となる。更に、発見的な議論ではあるが、ディリクレ境界条件のため極限における界面の運動は反射壁を持つブラウン運動になることが期待される。

定理 3. $C([0,T], L^2[-1,1])$ 上の確率測度 P^ε を $\bar{u}^\varepsilon(t,x) := u^\varepsilon(\varepsilon^{-2\gamma-\frac{1}{2}}t, x)$ の分布とし、P を確率過程 $\chi_{\sqrt{2}B(\alpha_1^2 t)}$ の分布とする。ここで $B(t)$ は区間 $[-1,1]$ 上の反射ブラウン運動であり、定数 α_1 は f によって定まる。このとき、$\varepsilon \to 0$ で P^ε は P に $C([0,T], L^2[-1,1])$ 上で弱収束する。

以上のように、ディリクレ境界条件を持つ場合であっても、適切な時間スケールのオーダーは $O(\varepsilon^{-2\gamma-\frac{1}{2}})$ であり、予想した通り界面の挙動は反射壁ブラウン運動となる。しかしながら境界付近における界面の挙動の解析は、その特異性から容易ではない。我々はこの解を $L^2[-1,1]$-値のマルコフ過程と見做し、この解に対応するディリクレ形式を調べた。ディリクレ形式とは閉の双線形形式の一種で、マルコフ過程にはこのディリクレ形式が対応することが知られている。我々は、時間スケールを変えた方程式の解 $\bar{u}^\varepsilon$ に対応するディリクレ形式を考え、$\chi_{\sqrt{2}B(\alpha_1^2 t)}$ に対応する別のディリクレ形式へのモスコ収束を示した。モスコ収束とマルコフ半群の強収束の同値性は、桑江-塩谷 [5] によって示されている。マルコフ半群の強収束から $\bar{u}^\varepsilon$ の有限次元分布の弱収束が得られ、これと確率測度 P^ε の緊密性から極限 $\varepsilon \to 0$ における界面の挙動を特定するのである。特に反射といった境界での挙動は、モスコ収束の極限におけるディリクレ形式の領域に対応する。この着想は、確率アレン・カーン方程式に対応するディリクレ形式が方程式の不変測度 μ^ε を用いて表現されることと、不変測度 μ^ε が区間 $[-1,1]$ 上の一様分布に弱収束するという Otto 達の結果 [8] が動機となっている。

シミュレーション

第 5 章では、一連の結果に深く関連するシミュレーションの結果について述べる。

参考文献

[1] M. Alfaro, D. Hilhorst, H. Matano, *The singular limit of the Allen-Cahn equation and the FitzHugh-Nagumo system*, J. Differential Equations, **245**, no. 2, 505-565 (2008).

[2] X. Chen, *Generation, propagation, and annihilation of metastable patterns*, J. Differential Equations, **206**, no. 2, 399-437 (2004).

[3] T. Funaki, *The scaling limit for a stochastic PDE and the separation of phases*, Probab. Theory Related Fields, **102**, no. 2, 221-288 (1995).

[4] T. Funaki, *Singular limit for stochastic reaction-diffusion equation and generation of random interfaces*, Acta Math. Sin. (Engl. Ser.) **15** (1999), no. 3, 407-438.

[5] K. Kuwae, T. Shioya, *Convergence of spectral structures: a functional analytic theory and its applications to spectral geometry*, Comm. Anal. Geom. **11** (2003), no. 4, 599-673.

[6] K. Lee, *Generation and motion of interfaces in one-dimensional stochastic Allen-Cahn equation*, To appear in Journal of Theoretical Probability.

[7] P. de Mottoni, M. Schatzman, *Geometrical evolution of developed interfaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **347** (1995), no. 5, 1533-1589.

[8] F. Otto, H. Weber, M. G. Westdickenberg, *Invariant measure of the stochastic Allen-Cahn equation: the regime of small noise and large system size*, Electron. J. Probab. **19** (2014), no. 23, 76 pp