

論文審査の結果の要旨

氏名 李嘉衣

双安定な反応項を持つ反応拡散方程式をアレン・カーン方程式という。特に、反応項の影響が支配的になるとき、空間の各点で2つの安定解（物理的には相という）のいずれかが現れ、2相を分離する界面が形成される。これを鋭敏な界面極限とよび、相分離の進行過程、界面ダイナミクスならびに動的相転移現象などと密接に関連して、数多くの研究がなされてきた。論文提出者 李嘉衣 は、バランス条件を満たす反応項を持つアレン・カーン方程式に、外力としてのノイズ項を加えて得られる確率アレン・カーン方程式について考察した。すなわち、時空ホワイトノイズを持つ全直線上の1次元アレン・カーン方程式、および空間方向は滑らかで時間方向にのみホワイトノイズであるような確率項を持つ多次元アレン・カーン方程式について、界面生成の問題を論じ、さらに、時空ホワイトノイズを持つ有界区間上の1次元アレン・カーン方程式に、両端で異なる相から決まるディリクレ境界条件を課して得られる方程式に対して、極限の界面(1次元では界点)の運動を完全に決定した。関連する数値計算も行った。

確率項が時空ホワイトノイズである場合、確率アレン・カーン方程式が適切 (well-posed) であるためには、空間の次元は1に限られることが知られている。さらに、ノイズ項の影響が他の項と比べて十分弱ければ、適切な時間変更の下で界点の運動がブラウン運動に近づくことが、少なくとも初期時刻で界点が生成されている場合には、知られていた。論文提出者は、より一般の初期値について、極めて短時間で界点が生成され、いったん界点が生成されれば、それ以降の界点の運動は既知の結果と組み合わせで解明できることを示した。さらに、界点生成に要する時間の評価を与えている。証明には、リャプノフ関数に基づくエネルギー評価の手法が用いられているが、解の滑らかさはなく、平滑化などの操作が必要になる。

空間が多次元になると、時空ホワイトノイズを持つ確率アレン・カーン方程式は非適切 (ill-posed) になる。そこで、論文提出者はノイズ項を空間方向に滑らかな Q -ブラウン運動の (形式的な) 時間微分で置き換えて、界面生成の問題を論じた。証明は、確率偏微分方程式に対する比較定理、および拡散項を落として得られる確率微分方程式の解析を通して与えられる。上記の1次元の結果と比べて、より精密な界面生成の評価ならびに形状が得られている。

続いて、再び空間1次元の場合に、今度は有界区間上で、両端に異なる安定解から決まる値を持つディリクレ境界条件を課して考えた。ノイズ項は時空ホワイトノイズであるが、強さは十分弱いものとする。このとき、極限の界点の運動は反射壁を持つブラウン運動になることを示した。境界付近における界点の挙動の解析は、その特異性から容易でない。論文提出者は、解を L^2 空間に値をとるマルコフ過程と見なし、それに対応するディリクレ形式を用いて考察した。対応する不変測度の挙動については Otto-Weber-Westdickenberg の結果があり、それを用いて時間スケールの変更の下で得られるディリクレ形式が、反射壁ブラウン運動に対応するディリクレ形式へモスコ収束することを示した。モスコ収束とマルコフ半群の強収束の同値性は、桑江-塩谷によって示されており、マルコフ半群の強収束から確率アレン・カーン方程式の解の有限次元分布の弱収束が得られ、これとそのパス空間上の分布の緊密性とを組み合わせることにより、極限の界点の挙動を特定することに成功した。これは長年の未解決問題でもあった。

最後に、関連する数値計算を行っている。1次元で境界条件をつけた場合や複数の界点が衝突により消滅する様子、多次元では界面が境界に接する場合の挙動などを調べている。さらに、体積を保存するアレン・カーン方程式についても、境界に接する場合、あるいはノイズの影響により界面の破壊または適切な時間スケールの急激な変化が起きることなどの新たな現象を発見し、大変意義深い。

このように論文提出者が得た鋭敏な界面極限に関する種々の結果は、確率アレン・カーン方程式の研究において新たな視点を開くものとして大変興味深い。

以上のような理由により、論文提出者 李嘉衣 は博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい十分な資格があると認める。