論文内容の要旨

論文題目　Automorphisms of positive entropy on some hyperKähler manifolds via derived automorphisms of K3 surfaces
(K3 曲面の導来自己同型を用いた超ケーラー多様体上の正エントロピー自己同型の構成について)
氏名　大内　元気

Adler, Konheim, McAndrew は, コンパクト位相空間 X とその上の全射連続写像 $f : X \to X$ に対して f の位相的エントロピー $h_{\mathrm{top}}(f) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ という量を定義した．位相的エントロピー $h_{\mathrm{top}}(f)$ は, $f : X \to X$ が定める離散力学系の複雑さを示す不変量である．例えば, $h_{\mathrm{top}}(f) > 0$ であるとき, 任意の $n > 0$ に対して $f^n \neq \mathrm{id}_X$ である．Dimitrov, Haiden, Katzarkov, Kontsevich は, 三角圏 $\mathcal{D}$ とその上の完全自己関手 $\Phi : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ に対して Φ の圏論的エントロピー $h_{\mathrm{cat}}(\Phi) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ を導入した．Φ の圏論的エントロピー $h_{\mathrm{cat}}(\Phi)$ も Φ の力学系的複雑さを示す不変量である．代数幾何学の文脈では位相的エントロピーと圏論的エントロピーは次の菊田, 高橋の定理の意味で整合的である．

X を非特異射影複素代数多様体とし, $f : X \to X$ をその上の全射正則写像とする．このとき

$$h_{\mathrm{cat}}(\mathbf{L}f^*) = h_{\mathrm{top}}(f)$$

である．ここで $\mathbf{L}f^* : D^b(X) \to D^b(X)$ は f の導来引き戻しである．

この定理のある意味での一般化である次の問題を考える．

Question 0.1. *$\mathcal{D}$ を三角圏, $\Phi \in \mathrm{Aut}\mathcal{D}$ を $\mathcal{D}$ の自己同値, M を $\mathcal{D}$ のある対象たちからなるモジュライ空間とする．もし, $\Phi : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ が対応 $E \mapsto \Phi(E)$ によって M の自己同型 $\overline{\Phi} \in \mathrm{Aut}M$ を定めるとき $h_{\mathrm{cat}}(\Phi)$ と $h_{\mathrm{top}}(\overline{\Phi})$ の間に関係はあるか？*

本論文では, $\mathcal{D}$ が K3 曲面の導来圏, M が K3 曲面上の安定層のモジュライ空間のときに Question 0.1 を考える．このとき, M は射影的超ケーラー多様体を与える．小木曽は, 射影的超ケーラー多様体が正の位相的エントロピーをもつ自己同型をもつ最小のピカール数は 2 であることを指摘した．Amerik と Vervitsky は, 2 次のベッチ数が 5 以上の超ケーラー多様体はその変形同値類の中に正の位相的エントロピーをもつ自己同型をもったピカール数 2 の射影的超ケーラー多様体をもつということを示した．しかし, 正の位相的エントロピーをもった自己同型をもつピカール数 2 の射影的超ケーラー多様体の具体例は小木曽による 2 次元, 4 次元の例しか知られていない．

Problem 0.2. 正の位相的エントロピーをもつ自己同型をもったピカール数 2 の射影的超ケーラー多様体を構成せよ．

射影的超ケーラー多様体 M のピカール数が 2 であっても正エントロピー自己同型をもつとは限らないことに注意する．例えば, ピカール数 1 の K3 曲面上の n 点のヒルベルトスキームの (双有理）自己同型群は有限

群であり, 正の位相的エントロピーをもつ自己同型をもたない本稿論文の主定理は Question 0.1 と Problem 0.2 について部分的な解答を与える. 主定理の主張を述べる前に言葉を少し準備する. X を K3 曲面とする. このとき, $H^*(X,\mathbb{Z})$ は次の二次形式によって指数 $(4,20)$ の偶ユニモジュラー格子の構造をもつ.

$$\langle (r_1,c_1,m_1),(r_2,c_2,m_2)\rangle := c_1c_2 - r_1m_2 - r_2m_1$$

このとき, 格子 $H^*(X,\mathbb{Z})$ は向井格子とよばれる. 対象 $E \in D^b(X)$ に対して $v(E) := \mathrm{ch}\cdot\sqrt{\mathrm{td}_{(X)}}(E) \in H^*(X,\mathbb{Z})$ を E の向井ベクトルという. ベクトル $v \in H^*(X,\mathbb{Z})$ が原始的であるとは $0 \le \lambda < 1$ ならば $\lambda = 0$ となることをいう. また, $v \in H^*(X,\mathbb{Z})$ が正であるとは, $v^2 > 0$ となることをいう. 原始的な正ベクトル $v \in H^*(X,\mathbb{Z})$ をとる. X 上の豊富因子 H が v について一般であるとは, 向井ベクトルが v である H 半安定層が安定になることをいう. v について一般な豊富因子 H に対して $M_H(v)$ を向井ベクトルが v である H 安定層のモジュライ空間とする. このとき, モジュライ空間 $M_H(v)$ は (v^2+2) 次元の射影的超ケーラー多様体になる. 次が本論文の主定理の主張である.

Theorem 0.3. ピカール数 1 の *K3* 曲面 X と正の原始的ベクトル $v \in H^*(X,\mathbb{Z})$ で次を満たすものを与えることができる.

- $\Phi^H(v) = v$ を満たす自己同値 $\Phi \in \mathrm{Aut}D^b(X)$ が存在して, $\overline{\Phi} \in \mathrm{Aut}M_H(v)$ となる.
- $\frac{1}{2}\dim M_H(v) h_{\mathrm{cat}}(\Phi) \ge h_{\mathrm{top}}(\overline{\Phi}) > 0$ が成り立つ.

さらに, K3 曲面の次数, 向井ベクトルを次のように具体的に与えることができる.

Example 0.4. X を *K3* 曲面とし, $\mathrm{NS}(X) = \mathbb{Z}H$ とする. このとき,

(1) $h^2 = 132, v = (4,h,16), v^2 = 4$
(2) $h^2 = 510, v = (6,h,42), v^2 = 6$
(3) $h^2 = 1160, v = (8,h,72), v^2 = 8$
(4) $h^2 = 2210, v = (10,h,110), v^2 = 10$

は Theorem 0.3 の例を与える.

本論文ではまず, 任意の K3 曲面は, 正の圏論的エントロピーをもつ自己同値をもつことを示した. ピカール数 1 の K3 曲面は正の位相的エントロピーをもつ自己同型をもたないことに注意する. また, K3 曲面上の安定層のモジュライ空間上の無限位数自己同型が, K3 曲面上の連接層の導来圏の自己同値を誘導することを示した. これは, 安定層のモジュライ空間上の Beauville-Bogomolov-Fujiki 形式と向井格子の関係, 導来トレリの定理を用いた議論により示される. 特に, Gromov, Yomdin, 小木曽による超ケーラー多様体の自己同型の位相的エントロピーと引き戻しのコホモロジーへの作用のスペクトル半径の関係, Dimitrov, Haiden, Katzarkov, Kontsevich による自己同値と対応するコホモロジー的フーリエ・向井変換のスペクトル半径の関係を用いることで, 正の位相的エントロピーをもつモジュライ空間の自己同型が正の圏論的エントロピーをもつ K3 曲面の自己同値を誘導することがわかる. これらのことから正の圏論的エントロピーをもつ K3 曲面の自己同値が, 正の位相的エントロピーをもつモジュライ空間上の自己同型を誘導することがあると期待される. しかし, 正の圏論的エントロピーをもつ K3 曲面の自己同値が, 必ずしも安定層のモジュライ空間上の自己同型を誘導するとは限らない. そこで, K3 曲面上の安定層のモジュライ空間を Bridgeland 安定性条件に関する安定対象のモジュライ空間とみなし, 自己同値の安定性条件の空間への作用の振る舞いを調べることで, 自己同値がモジュライ空間上の自己同型を誘導するための条件を求めた. 以下, 主張を述べる. X を K3

曲面, $v \in H^*(X,\mathbb{Z})$ を正の原始的ベクトルとする．このとき, $D^b(X)$ 上の安定性条件の空間の特別な連結成分 $\mathrm{Stab}^*(X)$ は, 向井ベクトル v をもつ（半）安定対象に関する壁部屋構造をもつ．Bayer と Macri は, 壁を flopping wall, divisorial wall, fake wall の 3 種類に分類した．fake wall に注目すると次を示すことができる．

Proposition 0.5. $\Phi^H(v) = v$ となる $\Phi \in \mathrm{Aut}D^b(X)$ と v に関して一般の $\sigma \in \mathrm{Stab}^*(X)$ について, $\Phi\sigma$ と σ を結ぶ *fake wall* しか通らない道があるとする．このとき, 向井格子に自明に作用する自己同値 Φ_0 が存在して, $\Phi_0 \circ \Phi$ は向井ベクトル v をもつ σ 安定対象のモジュライ空間 $M_\sigma(v)$ 上の自己同型 $\overline{\Phi_0 \circ \Phi}$ を定める．

Example 0.4 における X と v は, v に関する壁がすべて fake wall となるようなものである．ピカール数 1 の K3 曲面 X と正の原始ベクトル v について, v に関する壁がすべて fake wall になるとき, Theorem 0.3 にあるような自己同値の存在をモジュライ空間のネフ錐を調べる議論で示すことができる．

4 次元 3 次超曲面と K3 曲面の関係を用いると, 4 次元 3 次超曲面の幾何学に応用を与えることができる．4 次元 3 次超曲面上の直線のファノスキームは, K3 曲面上の 2 点のヒルベルトスキームと変形同値な射影的超ケーラー多様体である．本論文では, 判別式 74 の特殊 4 次元 3 次超曲面 Y を十分一般にとると, Y 上の直線のファノスキームが正の位相的エントロピーをもつ自己同型をもった 4 次元射影的超ケーラー多様体になることを示した．判別式 74 の特殊 4 次元 3 次超曲面は, 4 次元 3 次超曲面の有理性と K3 曲面の関係に関する Kuznetsov 予想, Galkin-Shinder 予想の食い違いを示す例であり, その幾何学的性質を調べることは重要である．