論文の内容の要旨

論文題目 Approximations of singular stochastic PDEs and their global well-posedness
（特異な確率偏微分方程式の近似とその時間大域的適切性）

氏名　星野 壮登

物理学, 生物学, また経済学における連続的な現象を放物型偏微分方程式としてモデル化することは応用数学における重要な問題の一つである．しかしそのような力学系を設定する際, 全てのパラメータの値が正確に分かる訳ではない．そのような場合, これらのパラメータは何か未知の条件によって時間や空間に沿って変化すると想定するのが適切である．また, 微視的なパラメータの揺らぎが巨視的な系の描写に本質的な影響を及ぼすような状況が多くある．そのような状況をモデル化するには, 「ノイズ」項, すなわち時間と空間の変数上の確率場を導入するのが有用である．特に $\mathcal{L}$ を放物型作用素, ξ をランダムな外力項, F を線形あるいは非線形な作用素として

$$\mathcal{L}u = F(u, \nabla u) + \xi$$

のような形の確率偏微分方程式（SPDE）が 1970 年代から活発に研究されてきた．この形の SPDE は確率微分方程式（SDE）の無限次元空間への一般化と見ることができる．SDE における自然なノイズはホワイトノイズ, すなわちブラウン運動の時間微分であり, よって SPDE においては ξ を**時空ホワイトノイズ**, すなわち共分散構造

$$E[\xi(t,x)\xi(s,y)] = \delta(t-s)\delta(x-y)$$

を持つ平均 0 の Gauss 確率場に選ぶのが自然である．

SPDE に関する問題の一つに解空間の定義がある．ξ が時空ホワイトノイズのとき, SPDE の解は時空の変数に沿って荒く振舞うことが予想される．例えば, $(t,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{T}^d$ 上の確率熱方程式

$$(\partial_t - \Delta)u = \xi$$

の解 u は空間 $C([0,\infty), \mathcal{C}^{(\frac{2-d}{2})^-})$ に入ることが知られている．ここで $\mathcal{C}^\alpha = \mathcal{B}^\alpha_{\infty,\infty}$ は $\mathbb{T}^d$ 上の Hölder-Besov 空間で, 正則性 α^- とはそれが任意の $\kappa > 0$ に対して $\alpha - \kappa$ に置き換えられることを意味する．従って $d \geq 2$ のときは u は関数でさえない．この問題は超関数 $u \in \mathcal{C}^\alpha$ と $v \in \mathcal{C}^\beta$ の積が $\alpha + \beta \leq 0$ のときに非適切であることと関わってくる．そのため非線形な SPDE は時として適切でない．後に説明する最近の画期的な研究がなされる前は, SPDE はその解が関数値であるとき, すなわち低次元かノイズが空間変数について滑らかなときに主に研究されてきた．

最近の Hairer による**正則性構造**, また Gubinelli, Imkeller, Perkowski による**擬被制御解析**といった理論により, KPZ 方程式, 力学的 Φ^4_d モデル, 確率 Navier-Stokes 方程式などを含むいくつかの特異な SPDE について, 時間局所的適切性についての一般理論が構築された. それぞれの理論で使われる数学的な道具は異なるが, どちらも SDE の**ラフパス理論**に基づいている. SDE において, ノイズ項に（強）解を対応させる写像は連続ではない. しかしラフパス理論によると, ノイズとその「反復積分」の組から解への写像は連続であることが示される. Hairer や Gubinelli-Imkeller-Perkowski の理論の原理は次のようなものである. ノイズ ξ から解 u への対応を考える代わりに, 「拡張された」解写像 $\mathcal{M} \ni \Xi \mapsto \mathbf{u} \in \mathcal{U}$ と「射影」$\mathbf{u} \mapsto u$ が連続となるような大きな空間 $\mathcal{M}$ と $\mathcal{U}$ を構成する. 要素 $\Xi \in \mathcal{M}$ と $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ はそれぞれ「拡張された」ノイズ, 「拡張された」解と解釈する. ξ の滑らかな近似 ξ^ϵ（$\epsilon \downarrow 0$）を考えると, 自然なリフト Ξ^ϵ を作ることができるが, Ξ^ϵ は一般に空間 $\mathcal{M}$ で収束しない. そのため Ξ^ϵ の「繰り込み」$\hat{\Xi}^\epsilon$ を導入し, $\hat{\Xi}^\epsilon$ はある極限 $\hat{\Xi}$ に収束し, 対応する解 $\hat{u}^\epsilon$ は適切に繰り込まれた非線形項 F^ϵ によって

$$\mathcal{L}\hat{u}^\epsilon = F^\epsilon(\hat{u}^\epsilon, \nabla\hat{u}^\epsilon) + \xi^\epsilon$$

を満たすようにする. 連続写像 $\mathcal{M} \to \mathcal{U}$ を使うと, $\hat{u}^\epsilon$ のある極限 $\hat{u}$ への収束を得る.

この博士論文では, Gubinelli-Imkeller-Perkowski の理論をいくつかの特異な SPDE に適用し, 方程式の適切な繰り込みを得る. 加えて時間大域的な適切性も考える. 一般論では非線形項 F の具体的な形は使わないため, 解 u の時間大域的存在は一般に自明ではない. 時間大域的適切性を得るには. F の技術的な性質を使う必要がある.

2 章では, $(t,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{T}$ 上で KPZ 方程式

$$\partial_t h = \tfrac{1}{2}\partial_x^2 h + \tfrac{1}{2}(\partial_x h)^2 + \xi$$

の近似を考える. KPZ 方程式は Kardar, Parisi, Zhang によって導入された, 高さ関数 h で表された界面の, 揺らぎを持つ成長を表すモデルである. ξ を偶関数の軟化子 η^ϵ によって x について滑らかにしたノイズ $\xi^\epsilon(t,x) = (\xi(t) * \eta^\epsilon)(x)$ に置き換えて, $c^\epsilon \sim \frac{1}{\epsilon}$ を軟化子 η^ϵ の選び方に依存する定数として近似

$$\partial_t h^\epsilon = \tfrac{1}{2}\partial_x^2 h^\epsilon + \tfrac{1}{2}\{(\partial_x h^\epsilon)^2 - c^\epsilon\} + \xi^\epsilon$$

を考えると, h^ϵ はいわゆる *Cole-Hopf* **解** h_{CH} に $\epsilon \downarrow 0$ で収束することが示される. しかし, この形の近似は不変測度を考えるには有用ではない. その代わり, ここでは $\eta_2^\epsilon = \eta^\epsilon * \eta^\epsilon$ として舟木-Quastel の近似

$$\partial_t h^\epsilon = \tfrac{1}{2}\partial_x^2 h^\epsilon + \tfrac{1}{2}\{(\partial_x h^\epsilon)^2 - c^\epsilon\} * \eta_2^\epsilon + \xi^\epsilon,$$

を考える. ノイズ項に作用素 A を, またドリフト項に A^2 を同時に作用させても不変測度は変わらないという一般的な事実がある. 実際 Cole-Hopf 解 h_{CH}

は Brown 橋 $(B(x))_{x\in\mathbb{T}}$ の分布を（勾配過程 $\partial_x h_{\mathrm{CH}}$ の意味で）不変測度とし, また舟木-Quastel 近似 h^ϵ は $(B*\eta^\epsilon(x))_{x\in\mathbb{T}}$ の分布を不変測度としている. 加えて舟木と Quastel によって h^ϵ が $h_{\mathrm{CH}}(t)+\frac{1}{24}t$ という過程に収束することが, 平衡な場合にのみ示されている. この章では, 擬被制御解析を使って舟木-Quastel 近似が非平衡な場合でも収束することを示す. 結果として, $\frac{1}{24}t$ という差の導出は舟木と Quastel の方法よりも簡単になっている.

3 章では, $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ と σ^α_β を与えられた定数として, $(t,x)\in[0,\infty)\times\mathbb{T}$ 上で $\mathbb{R}^d$ 値の結合 KPZ 方程式

$$\partial_t h^\alpha=\tfrac{1}{2}\partial_x^2 h^\alpha+\tfrac{1}{2}\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\partial_x h^\beta\partial_x h^\gamma+\sigma^\alpha_\beta\xi^\beta,\quad 1\le\alpha\le d$$

を考える. ここで (ξ^α) は d 個の独立な時空ホワイトノイズの組である. 発見的な考え方で言えば, d 個の（局所的な）保存量を持つ微視的な系が弱対称性を含んでいるとき, 巨視的な方程式を二次の項まで展開すれば, 適当なスケール極限の下で結合 KPZ 方程式を得ることが期待できる. スカラー値の場合と同様に, 二つの近似

$$\begin{aligned}\partial_t h^{\epsilon,\alpha}&=\tfrac{1}{2}\partial_x^2 h^{\epsilon,\alpha}+\tfrac{1}{2}\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(\partial_x h^{\epsilon,\beta}\partial_x h^{\epsilon,\gamma}-c^\epsilon A^{\beta\gamma}-B^{\epsilon,\beta\gamma})+\sigma^\alpha_\beta\xi^{\epsilon,\beta},\\ \partial_t \tilde{h}^{\epsilon,\alpha}&=\tfrac{1}{2}\partial_x^2 \tilde{h}^{\epsilon,\alpha}+\tfrac{1}{2}\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(\partial_x \tilde{h}^{\epsilon,\beta}\partial_x \tilde{h}^{\epsilon,\gamma}-c^\epsilon A^{\beta\gamma}-\tilde{B}^{\epsilon,\beta\gamma})*\eta_2^\epsilon+\sigma^\alpha_\beta\xi^{\epsilon,\beta},\end{aligned}$$

を考える. ここで c^ϵ は 2 章と同じ定数で, $A^{\beta\gamma}=\sum_\delta\sigma^\beta_\delta\sigma^\gamma_\delta$ であり, $B^{\epsilon,\beta\gamma}$ と $\tilde{B}^{\epsilon,\beta\gamma}$ は一般に $O(\log\epsilon)$ で振舞う定数である. $B^{\epsilon,\beta\gamma}$ と $\tilde{B}^{\epsilon,\beta\gamma}$ を上手く選べば, これらの近似は同一の極限 h に収束することが示される. 時間大域的な適切性を得るために, $\hat{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}=(\sigma^{-1})^\alpha_{\alpha'}\Gamma^{\alpha'}_{\beta'\gamma'}\sigma^{\beta'}_\beta\sigma^{\gamma'}_\gamma$ に対して三重線形条件

$$\hat{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}=\hat{\Gamma}^\alpha_{\gamma\beta}=\hat{\Gamma}^\beta_{\alpha\gamma},\quad\forall\alpha,\beta,\gamma,$$

を仮定する. (B^α) を d 個の独立な Brown 橋とすると, 三重線形条件の下で, 確率過程 h は $((\sigma^\alpha_\beta B^\beta)(x))_{x\in\mathbb{T}}$ の分布を（勾配過程 $\partial_x h$ の意味で）不変測度とすることが示される. 結果として, 初期値をこの不変測度の下で抽出するとき, 極限 h が確率 1 で $[0,\infty)$ 全体で存在することが示される. 加えて, Hairer と Mattingly がいくつかの特異な SPDE の解が強 Feller 過程であることを示していることから, 実際全ての初期値に対して時間大域的適切性を示すことができる.

4 章では, $(t,x)\in[0,\infty)\times\mathbb{T}^3$ 上で確率複素 Ginzburg-Landau（CGL）方程式

$$\partial_t u=(i+\mu)\Delta u-\nu|u|^2u+\lambda u+\xi$$

を $\mu>0$, $\nu\in\{z\in\mathbb{C};\Re z>0\}$, $\lambda\in\mathbb{C}$ として考える. ξ は複素時空ホワイトノイズ, すなわち共分散構造

$$E[\xi(t,x)\xi(s,y)]=0,\quad E[\xi(t,x)\overline{\xi(s,y)}]=\delta(t-s)\delta(x-y).$$

を持つ平均 0 の Gauss 確率場である．CGL 方程式は超電導の相転移など, 流体力学において不安定な状態が起こる際の各モードの振幅を表す一般的な方程式として現れる．空間次元 $d \geq 1$ でのランダムな外力項を持つ CGL 方程式は主に, ξ が x について滑らかなノイズであるか, あるいは $d = 1$ かつ ξ が時空ホワイトノイズであるときに研究されてきた．今回の場合（$d = 3$ かつ ξ は時空ホワイトノイズ）では, 擬被制御解析の応用として, 適当な $C^\epsilon \sim \frac{1}{\epsilon}$ に対し近似方程式

$$\partial_t u^\epsilon = (i + \mu)\Delta u^\epsilon - \nu|u^\epsilon|^2 u^\epsilon + C^\epsilon u^\epsilon + \xi^\epsilon$$

の解 u^ϵ はある確率過程 u に時間局所的に収束することを示すことができる．時間大域的適切性を得るには, Mourrat と Weber が 3 次元トーラス上で力学的 Φ^4 モデルの時間大域的適切性を示したときの方法を用いる．ノイズ項がない場合は, CGL 方程式の解の先験的 L^{2p} 不等式が $p > \frac{3}{2}$ かつ

$$p < 1 + \mu(\mu + \sqrt{1 + \mu^2}).$$

の場合に成り立つ． ここでは Mourrat-Weber の方法を, $\frac{3}{2}$ に近い全ての p に対して CGL 方程式の解の先験的 L^{2p}-不等式に適用できるように改良し, $\mu > \frac{1}{2\sqrt{2}}$ のときに確率 CGL 方程式の解の先験的評価を示す.