

論文の内容の要旨

論文題目

Nonlinear Phenomena in Ion Acoustic Waves: Transition from Soliton to Chaos and Bifurcation of Sheath Structure

(イオン音波の非線形現象：ソリトンからカオスへの遷移およびシース構造の分岐)

氏名 大野 裕司

1. 序論

非線形性は秩序的なものからカオス的なものまで、様々な構造を生み出す。プラズマにおいては、荷電粒子の集団運動がマクロな電磁場と結びつき、非線形性が働く。

本研究で扱うのは、プラズマにおける波の中の、イオン音波という静電的な縦波である。その秩序的な構造のうち、ソリトンとシースに着目する。第1章では、研究背景として基礎的な概念と先行研究をまとめている。

ソリトンとは、孤立波がその形状を保ちながら安定に伝搬するものである。非線形イオン音波ソリトンは Korteweg–de Vries (KdV) 方程式や Kadomtsev–Petviashvili (KP) 方程式

$$\partial_x \left(\partial_t u + u \partial_x u + \frac{1}{2} \partial_x^3 u \right) + \frac{1}{2} \partial_y^2 u = 0$$

などによって記述される。ソリトン理論が盛んになったきっかけとして、逆散乱法という解法が与えられたことがある。さらにその拡張の中で、佐藤幹夫によって無限個の未知関数と無限個の変数を含む方程式系が与えられ、最も単純なものが2次元 KP 方程式であることが示された。この方程式系からは、一部の変数への依存性を無視することで KdV 方程式などのソリトン方程式が得られる。このことから、KP 方程式はソリトン方程式たちの中心的な位置にあるといえる。一方、ソリトン方程式に外力や変数係数が加えられるなどすると、可積分性は容易に崩壊する。他にも、空間次元が増えることでも、多くの場合に可積分性が崩れることが分かっている。このようにして可積分性が失われたときは、カオスが発現することが期待される。

シースは、トカマク装置におけるダイバータのような、プラズマと壁とが接触する領域に形成される、急勾配な静電ポテンシャル（ショック）構造である。このような構造が形

成される条件として、領域へ流れ込むイオンの Mach 数が 1 以上でなくてはならないというものが Bohm によって得られた。(その研究で用いられた Poisson 方程式を Bohm 方程式といい、Sagdeev ポテンシャルという概念が導入できる場合には解析が容易になる。) そのため、シース領域の前にイオンを加速させるための電場が作られると考えられている。その領域をプレシースという。

非線形イオン音波ソリトン、そして静電シースに関する研究は、KdV 方程式や KP 方程式、Bohm 方程式や Sagdeev ポテンシャルの拡張を中心にして数多く取り組まれている。本研究では、今まで取り組まれていなかった方向性の拡張をおこなった。一つはソリトン方程式への渦の導入であり、もう一つはシース構造における熱的効果の導入である。

イオン音波ソリトンの研究では、様々な物理的効果を含んだうえで KdV 方程式や KP 方程式などを導出しているが、渦はほとんど注目されていない。一方、流体の運動は渦度によって特徴付けられる。このような視点から、KP 方程式を「わずかに」一般化した、渦をもつ方程式が近年導かれた。本研究では、KdV 方程式や KP 方程式の導出において渦がどのように排除されているのか、一般化した方程式はなぜ渦を含むことができたのかを明らかにした(第 2 章)。さらに、新たな方程式の可積分性について、理論的・数値的に解析した(第 3 章)。

シースはプラズマと壁との間に形成されるが、核融合装置など高温プラズマを考える場合、プラズマの熱的効果を見捨てることはできない。そこで本研究では、シースにおける熱的効果を解析した(第 4 章)。まず熱エネルギーが Bohm 方程式や Sagdeev ポテンシャルにどのような変化をもたらすのかを明らかにし、そして熱流束が流入するような状況において(Sagdeev ポテンシャルによる記述は不可能となる)、シースはどのような反応をするのかを解析した。

2. 逡減摂動法と渦の関係について

第 2 章では、非線形イオン音波方程式からソリトン方程式を導く逡減摂動法について、渦という観点から解析した。KdV 方程式は空間 1 次元系であるから、渦度をもつだけの自由度はない。KdV 方程式を多次元化した KP 方程式も、実は渦度はゼロになっていることがすぐに分かる。さらに本研究で、摂動展開におけるすべての高次の項でも、渦度がゼロでなくてはならないことが明らかとなった。渦度がゼロであるということは、流体運動のクラスとしては極めて特異的なものに拘束されていることを意味する。

その拘束から脱出したものとして、最小限の拡張をしたものが近年提案された。それは渦度を含むよう一般化された 3 次元 KP 方程式と 2 次元 Euler 渦度方程式の組

$$\partial_x \left(\partial_t u + u \partial_x u + \frac{1}{2} \partial_x^3 u + [u, \psi] \right) + \frac{1}{2} \Delta_{\perp} u = 0$$

$$\partial_t (\Delta_{\perp} \psi) + [\Delta_{\perp} \psi, \psi] = 0$$

である。この系を Kadomtsev–Petviashvili–Yoshida (KPY) 方程式と呼ぶ。($\Delta_{\perp} = \partial_y^2 + \partial_z^2$ は

波の主要な進行方向に直交する向きの Laplacian であり, $[f, \psi] = \partial_y f \partial_z \psi - \partial_z f \partial_y \psi$ は渦の場による対流微分である。) KPY 方程式の導出を, なぜ渦度を有限に保つことができたのか考察しながら追った. その理由は, 速度場の摂動展開で低次の項を追加したこと, そしてその項が x に依存しないことにある. KPY 方程式は, イオン音波 u が偏在する渦の場 ψ によって形状を変形させられながら伝搬する様子を記述するものとなっている. 一方で, 渦の場 ψ は自身の作る流れで移流するのみで, イオン音波 u から影響を受けない. これは逡減摂動法における次数の関係に起因する.

第2章の最後では, KPY 方程式に関する幾つかの補足事項を述べている. 特に, ヘリシティ (速度場と渦度場の内積を空間全体で積分した量) がゼロになり, 一般化エンストロフィー (渦度の任意関数の空間積分) が保存することが大きな特徴である. これは KPY 方程式が3次元流体の一般的なクラスには属しておらず, 未だ束縛されたものであることを意味している. このことから, KPY 方程式が KP 方程式から「わずかに」一般化されたものであることがわかる.

3. 渦によって散乱される非線形イオン音波の非可積分性

第3章では KPY 方程式の可積分性に着目して解析をおこなった. なお, 渦の場については定常解を利用した.

まず, Painlevé テストというアルゴリズムを適用した. このテストは, 与えられた方程式が Painlevé 性 (可積分性と同値であると考えられている) を持つかどうかを判別するものである. テストの結果, KPY 方程式は渦によってほぼ必然的に3次元性がもたらされ, 非可積分となることが明らかとなった. これは, 初期条件が2次元であればその後も常に2次元的なままとなる3次元 KP 方程式とは本質的に異なっている. KPY 方程式は実質的に1次元 KdV 方程式や2次元 KP 方程式へ帰着できる場合のみ, Painlevé テストをパスする.

続いて, 非可積分性がどのように発現するのか, つまり渦がどのようにしてソリトンからカオスへの遷移を引き起こすのかを数値計算で解析した. イオン音波の初期条件としては2次元 KP 方程式のソリトン解である線ソリトンを使う. 渦がなければ, 線ソリトンは形状を変えずに伝搬する. 数値計算の結果, 渦の強度が小さい間はソリトンが周期的にねじれながら伝搬し, 渦の強度が強くなるとソリトンが分裂して空間全体へ広がることがわかった. すなわち, 線ソリトンは弱い渦に対しては安定に振る舞っており, 渦が強くなったときにカオスへ遷移するといえる. さらに, その遷移は, 渦の強度だけでなく空間スケールによっても振る舞いが変わることがわかった. これらの特徴を, イオン音波の形状を見るだけでなく, 平均波数や KPY 方程式の各項の大きさなど, 定量的な解析によって明らかにした.

4. シース構造の熱的効果による分岐について

第4章では、静電シースに対する熱的な効果について解析した。まず、イオンの温度が断熱的に振る舞うと仮定して Bohm 方程式を導いた。すると Sagdeev ポテンシャルが2つ得られる。一方は温度を無視したときの式を修正したものであり、もう一方は新たに生まれたものである。2つの Sagdeev ポテンシャルの微分係数はある1点で一致するが、その点では Lipschitz 連続性が破れている。そのため Bohm 方程式の解の一意性が保証されず、一方のポテンシャルからもう一方のポテンシャルへと分岐することが可能になる。系の挙動を支配するパラメータはイオン速度とイオン温度であり、パラメータ領域と得られる解の種類について分類をおこなった。

続いて、熱流束を導入し、イオン温度の振る舞いを非断熱的に拡張した。このとき Sagdeev ポテンシャルによる表現は不可能となる。熱流束が Fourier 則に従うと仮定すれば、解くべき方程式系として、温度と静電ポテンシャルに対する連立2階微分方程式を得る。温度の微分方程式について、プラズマ内部側（プレシース側）の境界条件としては、流入する熱流束を固定するものと温度を固定するものが考えられる。その境界値とイオン Mach 数をパラメータとして、シースにおける熱伝導がどのように振る舞うのか数値計算で解析した。その結果、イオン Mach 数が固定されている場合、熱流束の値が小さいと両端の温度差は純粋な熱伝導状態（イオン流を無視した、線形な温度分布）よりも小さくなり、ある閾値を超えると大小関係が逆転することがわかった。一方、境界での温度が固定されている場合、温度の値が小さいときには熱流束の値が線形な温度分布よりも大きくなり、ある閾値を超えると逆転することがわかった。どちらの場合でも、閾値はイオン Mach 数と熱拡散係数に依存して決まる。現実の系ではプレシースの形成によってイオン Mach 数が固定され、さらに境界での温度でなくプラズマ内部からの熱流束によって系が制御されると考えられる。そのため内部からの熱流束が大きくなることでより温度差が大きくなるような振る舞いが見られると考えられる。