

審査の結果の要旨

論文提出者氏名 横井 優

現代社会の様々な局面において、異なる希望をもった多数の個人の全員が納得できる合理的な決定が求められる。Gale-Shapley (1962) の研究を端緒とする安定マッチング理論は、学校選択における生徒と学校、あるいは研修医配属における研修医と病院のように、2種類の主体集合の各要素がマッチングに関する選好を持つという前提の下で、全ての主体が受け入れ可能なマッチングの存在を示すとともに、そのような安定マッチングを効率的に見出すアルゴリズムを提供している。このアルゴリズムが正しく解を見出す背景には、安定マッチングの全体が分配束をなすという構造的な性質がある。

一方、実際の問題に理論を適用する際には、理論の出発点となる単純化されたモデルでは捨象されていた複雑な制約条件をも考慮に入れる必要が生じる。現実の制約条件に基づいて変更されたモデルに対して、既存のアルゴリズムを自然に適用した場合に、正しい解が得られるか否かは非自明であるが、個々の状況に照らしてアルゴリズムを設計し直すことは多大な労力を要する。そこで、既存のモデルをできるだけ広い形に一般化した上で、正しく動作する汎用アルゴリズムを与えておくことが望まれる。

本論文は、このような問題意識に立って、安定マッチング問題の一般化と体系的なアルゴリズム設計に取り組んでいる。特に、線形独立性の組合せ論的抽象化として1930年代に導入されたマトロイドの概念を主な道具として理論を展開することによって、広い範囲の状況に適用可能であるとともに、効率的なアルゴリズムを導くことができる枠組みを提供している点が、本論文の特徴である。

本論文は「Stable Matchings on Matroidal Structures」(マトロイド的構造における安定マッチング)と題し、7章からなる。

第1章「Introduction」(序論)では、安定マッチング問題の背景を説明するとともに、マトロイド的構造上への一般化に関する既存研究を整理した上で、本論文の主要な結果を概説している。

第2章「Preliminaries」(準備)では、グラフ、半順序、マトロイド、ポリマトロイド、劣モジュラ関数といった基本的な離散構造に関して、本論文中で用いる既知の事実を紹介している。

第3章「A Generalized Polymatroid Approach to Stable Matching with Lower Quotas」(下限制約付き安定マッチングへの一般化ポリマトロイドによるアプローチ)では、現実社会でのマッチング問題に頻繁に現れる受け入れ人数の下限制約に関して、一般化マトロイド上での安定割当の概念を導入することによって、統一的な理解を与えている。さらに、一般化ポリマトロイドの理論を用いることにより、割当数量が0-1であるというマッチングの前提を緩和して、一般の整数値・実数値を割当量として扱う際の下限制約を考慮することをも可能としている。

第4章「Finding a Stable Allocation in Polymatroid Intersection」(ポリマトロイド交叉における安定割当の算出)では、安定マッチングの概念をポリマトロイド対の上での安定割当に拡張した上で、安定割当を見出す強多項式時間アルゴリズムを導出している。このアルゴリズムは、ポリマトロイド交叉問題の解法として標準的な増加道法の枠組みの中に、Gale-Shapleyアルゴリズムを模倣した手続きを

組み込んだ形をしており、ポリマトロイドに関連した新しいタイプの強多項式時間アルゴリズムとして非常に興味深い。

第5章「Matroidal Choice Functions」（マトロイド的選択関数）では、組合せ的な選好を表現する枠組みとしてマトロイド的選択関数の概念を導入した。この関数クラスを用いたモデルでは、組合せ的な要件を考慮した様々な選好が表現可能であると同時に、安定解が常に存在し、安定解の全体が分配束をなすことを示している。さらに、マトロイド上の貪欲アルゴリズムの正当性によって、マトロイド的選択関数の特徴付けを与え、マトロイド最適化との関連を明らかにしている。

第6章「List Supermodular Coloring」（リスト優モジュラ彩色）では、2部グラフの辺彩色の一般化として Schrijver (1985) が導入した優モジュラ彩色の枠組みのリスト彩色版を新たに導入している。その上で、各辺に使用可能な色リストの長さが最大次数以上であれば、リスト辺彩色可能であるという Galvin (1995) の定理をリスト優モジュラ彩色の枠組みに拡張した定理を証明している。この結果は、安定マッチングの一般化が離散数学における新たな定理の証明にも有用であることを示している。

最後に第7章「Conclusion」（結論）では、本論文の成果を簡潔に纏めると共に、今後の研究課題を提示している。

以上を要するに、本論文はマトロイド理論に基づくアプローチが安定マッチングに関連した諸問題に有効であることを示して、その応用範囲を拡大している。ゲーム理論における離散数学的側面で新たな境地を切り拓く、非常に質の高い貢献であり、数理情報学の発展に大きく寄与している。

よって本論文は博士（情報理工学）の学位請求論文として合格と認められる。