

東京大学 大学院新領域創成科学研究科

基盤科学研究系

先端エネルギー工学専攻

平成 29 年度

修士論文

磁気圏型プラズマの平衡状態における
温度非等方性と電場の効果

2018 年 1 月 30 日提出

指導教員 吉田 善章 教授

47166088 白幡 亘佑

概要

磁気圏型プラズマにおいて粒子は内向きに拡散して自己組織化する。その生成機構の解明を目的として磁気圏型プラズマ閉じ込め装置 RT-1 が開発された。RT-1 を用いた実験によってイオンについては $T_{\perp} > T_{\parallel}$ となる温度非等方性をもつことがわかっている。また、実験によって求められた電子密度の線積分値や局所値から全体の密度分布を求めるためにモデル関数を仮定しているが、より正確な分布を得るためには物理的な平衡モデルが必要となる。特に磁力線方向の分布には温度非等方性によるミラー効果の影響を考慮する必要がある。既に Grad-Shafranov 方程式を解くことによって MHD 平衡を求める平衡モデルが存在するが、このモデルでは温度非等方性を取り扱うことができない。

このような背景の中で磁気圏型プラズマの平衡状態において温度非等方性と電場がもつ効果に関する研究を行った。磁気圏における荷電粒子の運動の階層性を利用して最もミクロなジャイロ運動を平均化したハミルトニアンを用いて、温度非等方性と電場の効果を考慮することのできる平衡モデルを構築した。平衡モデル内の密度計算においてハミルトニアンの分布に広がりを持たせることによって、粒子による計算と比較して計算が安定することを確認し、また電位計算が正しく行われていることを理論解と比較して確認した。また、ニュートン形式の軌道との比較から、この平衡モデルが適用できる電子・イオンのエネルギー範囲を評価した。

この平衡モデルを用いて温度非等方性を変化させたときの密度について考察した。 $z=0$ において非等方な温度をもつマクスウェル分布を与えたとき、温度非等方性が $T_{\perp} > T_{\parallel}$ となる方向に強くなるほど、磁場の弱い $z = 0(m), r > 0.4(m)$ 付近に密度が集中することが確認された。また、 $z=0$ で等方的なマクスウェル分布を与えた場合の磁力線上の速度分布関数は、 $z=0$ から離れるほど v_{\perp} 方向に歪むことが確認された。さらに、この平衡モデルによって、電子とイオンが異なる温度非等方性を持つときに電場を介してその非平衡性を補償する現象を取り扱えるようになった。電子とイオンが温度が大きく異なる場合、温度の低い粒子が電場の影響によって密度分布を変えることによって平衡状態へ至ることが示され、また温度差が小さくなると電子密度分布・イオン密度分布が共に変化するようになることが確認された。

目次

第 1 章	序論	1
1.1	磁気圏におけるプラズマ閉じ込め	1
1.2	磁気圏における粒子運動の階層性	4
1.2.1	磁気圏における粒子運動	4
1.2.2	葉層化による階層性の記述	4
1.2.3	階層性を利用したジャイロ運動の分離	5
1.3	本研究の目的と論文の構成	8
第 2 章	温度非等方性をもつ磁気圏型プラズマの平衡モデルの構築	10
2.1	平衡計算手法の概要	10
2.2	磁場の計算と補間	11
2.3	直交座標系と磁気座標系の対応	14
2.4	密度計算	15
2.4.1	ハミルトン運動方程式から得られる粒子軌道からの密度の導出	15
2.4.2	ハミルトニアンの保存を用いた密度の導出	17
2.5	電位計算	20
第 3 章	平衡モデルの妥当性検証	22
3.1	計算速度の評価	22
3.1.1	磁場の補間による計算速度の向上	22
3.1.2	ジャイロ運動の平均化による計算速度の向上	24
3.2	磁気モーメントが保存するエネルギー範囲の検討	27
3.3	密度計算手法の比較	29
3.4	ハミルトニアンの分布の広がりや密度分布	32

3.5	電位計算の妥当性検証	34
第 4 章	磁気圏型プラズマの平衡状態における温度非等方性の効果	35
4.1	ある磁力線上での温度非等方性の効果	35
4.1.1	ミクロな密度の導出	36
4.1.2	等方な温度の下でのマクロな密度の導出	36
4.1.3	平衡状態における温度非等方性の効果	42
4.2	複数の磁力線上での温度非等方性の効果	43
4.3	速度分布関数の位置ごとの変化	46
第 5 章	磁気圏型プラズマの平衡状態における電場の効果	48
5.1	電子とイオンに温度差がある場合の電場の効果	48
5.2	電子とイオンの温度が近い場合の電場の効果	53
第 6 章	結論	57
付録	本研究で使用した数値解法	58
	謝辞	61
	参考文献	62
	学会発表	64

第 1 章

序論

1.1 磁気圏におけるプラズマ閉じ込め

磁気圏とは、天体のもつ固有磁場によってプラズマの運動が規定される領域である。太陽系においては、金星と火星のみが惑星規模の固有磁場を持たない惑星であり、他の惑星は固有磁場による磁気圏を形成している。地球磁気圏においては、ベルト状の領域に高エネルギー粒子が閉じ込められていることが 1958 年に発見され、その領域は放射線帯、または発見者の名前をとってヴァン・アレン帯と呼ばれる ([1])。電子の放射線帯とイオンの放射線帯はその形状が異なる。イオンの放射線帯は単一の帯状構造であるが、電子の放射線帯は内帯と外帯と呼ばれる 2 つの領域から成り、その間にはスロットと呼ばれる隙間が存在している。宇宙線や太陽風として地球周辺へ飛来した電子やイオンが自発的に閉じこもり放射線帯を形成するこの自己組織化は、我々の住んでいる実座標系から見ると不自然な現象として映る。一般的に、実座標系において密度勾配が存在するとき、粒子は拡散してその密度勾配を低減させようとする。磁場によって閉じ込められた粒子にとっての自然な座標は、実座標系とは異なる座標系である。粒子にとって自然な座標系は磁場の存在によって張られる座標系であり、磁気座標系と呼ばれる。磁気座標系上における拡散を実座標系から見ると自己組織化として観測される。

1979 年、Voyager 2 号により、木星磁気圏における高 β 値のプラズマが発見された ([2])。この発見を受け、ダイポール磁場配位による核融合が提案された ([3], [4])。このような経緯の中で磁気圏型プラズマ閉じ込め装置 RT-1(Ring Trap-1) が開発された ([5])。地球磁気圏や木星磁気圏を形成する固有磁場はダイポール型の磁場構造でよく近似される。そこで RT-1 では図 1.1 に示されているような超伝導状態にある浮上コイル (dipole field magnet)

に電流を流し続けることによって磁場を生成している。また、浮上コイルを空中に保つために、吊り上げコイル (lifting magnet) に電流を流して引力を生み出している。この2つのコイルによって、図 1.1 内の青線で示されるような磁力線が形成される。RT-1 では主に電子サイクロトロン共鳴加熱 (ECRH) によってプラズマを生成しており、電子の局所 β 値が 100% を超えるような高 β プラズマの閉じ込めることに成功している。 ([7])

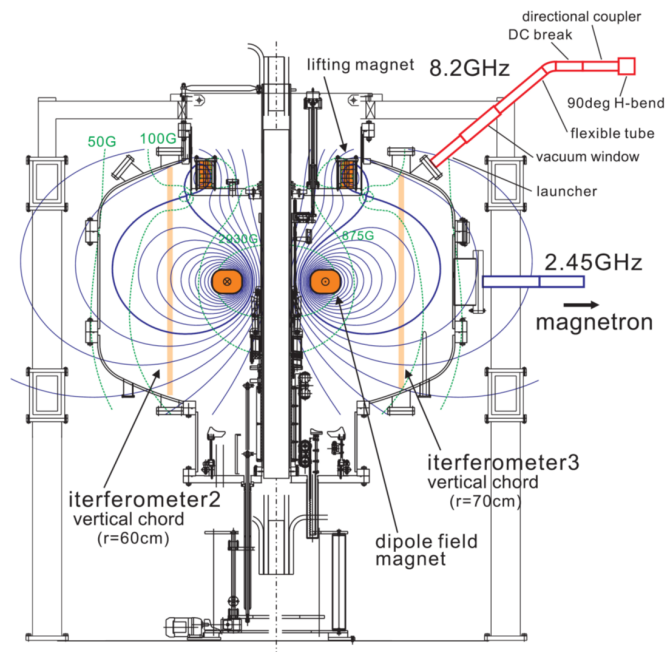


図 1.1: 磁気圏型プラズマ閉じ込め装置 RT-1 の断面図 ([6] の FIG.1 (b) より引用). 浮上コイル (dipole field magnet) ・吊り上げコイル (lifting magnet) の2つのコイルにトロイダル方向の電流が流れることで、ポロイダル方向の磁場が生成される

RT-1 における温度非等方性がヘリウム放電中の He II のドップラー広がり の計測によって発見されている。磁力線に垂直方向の温度を T_{\perp} , 平行方向の温度を T_{\parallel} とすると、 $T_{\perp} > T_{\parallel}$ となるような温度非等方性をもち、 $T_{\parallel} \sim 10(eV), T_{\perp} \sim 20(eV)$ 程度の値をもつ。実験結果とイオンエネルギー輸送モデルによる数値計算の比較によって、この非等方性は Betatron 加速によって T_{\perp} が高まることによって生じていることが示されている ([6])。このようなイオンの温度非等方性は実際の惑星にも見られる ([8,9])。

また、RT-1 の磁気圏型プラズマにおける平衡状態として、MHD 近似によるプラズマの力学的平衡が求められている。 ([11]) MHD(magneto-hydrodynamics) 近似とはプラズマの集団を流体として扱う方法である。この近似によって扱える現象はイオンのジャイロ運動

やプラズマ振動よりも長い時間スケールをもち、デバイ長や熱速度によるイオンのジャイロ運動よりも大きい時間スケールをもつ現象である。ある点の近傍における平均的な電子、イオンの密度を n_e, n_i とし、流体としての速度を V_e, V_i とすると、プラズマの全質量密度 ρ_m は

$$\rho_m = n_e m_e + n_i m_i \quad (1.1)$$

と書け、またプラズマの平均速度 J を

$$J = \frac{n_e m_e V_e + n_i m_i V_i}{\rho_m} \quad (1.2)$$

と定義する。このとき磁気流体の運動方程式は ∇p を圧力勾配として

$$\rho_m \left\{ \frac{\partial V}{\partial t} + (V \cdot \nabla) V \right\} = -\nabla p + J \times B \quad (1.3)$$

平衡時には式 (1.3) の右辺における圧力勾配とローレンツ力が釣り合っているため $\nabla p = J \times B$ となる。円筒座標系 (r, θ, z) においてこの釣り合いの式の r 成分を考えると、磁束関数 ψ を用いて

$$\Delta^* \psi = -\mu_0 r^2 \frac{dp}{d\psi} - I \frac{dI}{d\psi} \quad (1.4)$$

となる。ただし、 μ_0 は真空の透磁率である。また、 I は $\psi = rA_\theta$ で記述される断面内をポロイダル方向へ流れる電流であり、RT-1 配位では恒等的に 0 である。この式を Grad-Shafranov 方程式といい、Grad-Shafranov 演算子は

$$\Delta^* = \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (1.5)$$

である。 $p = p(\psi)$ を与えて RT-1 の磁場配位で Grad-Shafranov 方程式 ([10]) を解くことで力学的平衡が得られる。しかし、MHD 近似においては、電子とイオンの平均的速度場を扱うため、個々の粒子が非等方な温度を持つ場合の平衡状態に関する議論は行うことができていない。

1.2 磁気圏における粒子運動の階層性

1.2.1 磁気圏における粒子運動

磁気圏における荷電粒子はジャイロ運動、バウンス運動、ドリフト運動の3つの周期運動を行う。最もミクロな周期運動であるジャイロ運動は粒子が磁力線に巻き付くような運動であり、その向きは電子とイオンで反対である。この運動の半径はラーマ半径 r_L と呼ばれ、以下の式によって与えられる。

$$r_L = \frac{mv_{\perp}}{qB} \quad (1.6)$$

ただし、 m は質量、 v_{\perp} は磁力線に垂直方向の速度、 q は電荷、 B は磁場である。

次の階層であるバウンス運動は磁力線上を行き来する運動である。磁力線上で磁場が強い点では、ジャイロ運動の速度である v_{\perp} が増大し、エネルギー保存則から磁力線に沿った方向の v_{\parallel} は減少する。やがて、 v_{\parallel} は0となり、この点がバウンス運動の端点となる。

図 1.2 のように、ジャイロ運動・バウンス運動といった2つの運動を行いながら、全体としてはトロイダル方向にドリフト運動を行う。この3つの周期運動の時間スケール・空間スケールは大きく異なる。磁気圏型プラズマ装置 RT-1 においては典型的にジャイロ運動の周波数は GHz 帯、バウンス運動の周波数は MHz 帯、ドリフト運動の周波数は kHz 帯となっている。最もミクロな運動であるジャイロ運動が最も保存性が高く、最もマクロな運動であるドリフト運動が最も容易に保存性が失われる。

1.2.2 葉層化による階層性の記述

磁気圏における荷電粒子は空間スケール・時間スケールの異なる3つの周期運動をもち、その粒子運動の階層性が構造の階層性をもたらす。構造の階層性の記述にはハミルトン力学が効果的であり、構造の階層性をハミルトン力学での葉層と考える。このとき各階層には断熱不変量が与えられ、この断熱不変量が保存する場合にその断熱不変量に対応した運動が保存する。例えば、ジャイロ運動に対応する断熱不変量である磁気モーメント μ が保存するとき、ジャイロ運動は保存する。一方で、例えばプラズマシートにおける磁場はダイポール磁場が大きく引き伸ばされたような形状になっており、イオンのジャイロ半径が磁力線の曲率と同程度のスケールとなる。このような場合には磁気モーメントは保存しない ([14])。磁気モーメントが保存する場合にジャイロ運動を逐一計算することは現象の本質的な理解には不

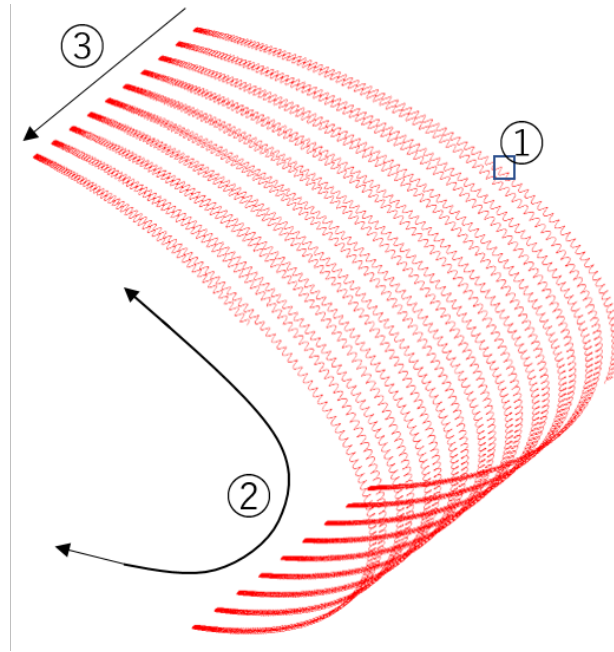


図 1.2: 磁気圏における周期運動 (1. ジャイロ運動 2. バウンス運動 3. ドリフト運動)

必要である上に、計算時間の観点から考えると不利である。

このように構造の階層性をハミルトン力学での葉層によって記述した先行研究について述べる。[15] では断熱不変量が形成する葉層上でダイポール磁場におけるボルツマン分布が求められた。断熱不変量が形成する葉層でエントロピーを最大化することによって得られる構造は実座標系で見ると非自明な構造となることがわかった。[16] では磁気モーメント葉層上での磁束関数 ψ についての拡散モデルがフォッカー・プランク方程式の形として得られた。また、[17] では磁気モーメント葉層上における粒子シミュレーションが行われ、先の拡散モデルと比較された。どちらのモデルについても、磁束関数 ψ についての拡散は実座標系において内向き拡散として観測された。

1.2.3 階層性を利用したジャイロ運動の分離

[18], [19] に基づいて述べる。一般化座標 $q = (q_1, q_2, q_3, \dots, q_N)$ 及び一般化運動量 $p = (p_1, p_2, p_3, \dots, p_N)$ を変数とするハミルトニアン $H(q, p)$ について、ハミルトン運動方程式は次のように記述される。

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (1.7)$$

この変数 (q, p) から別の変数 (Q, P) への変換 $Q_i = Q_i(q, p, t), P_i = P_i(q, p, t)$ で、特に (Q, P) についてもハミルトン運動方程式が成り立つようなハミルトニアンが存在する変換を行い、ハミルトニアン K を 0 にすることができたとすると

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i} = 0, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i} = 0 \quad (1.8)$$

となり、解は

$$Q_i = \text{const} = \beta_i \quad (1.9)$$

$$P_i = \text{const} = \alpha_i \quad (1.10)$$

と求まる。元の正準変数 (q, p) と (Q, P) の関係から式 (1.7) の解が以下のように得られる。

$$q_i = q_i(Q, P, t) = q_i(\beta, \alpha, t) \quad (1.11)$$

$$p_i = p_i(Q, P, t) = p_i(\beta, \alpha, t) \quad (1.12)$$

正準変換をして得られる運動量 $P_i = \alpha_i = \text{const}$ の選び方には任意性があるが、周期運動をする系については作用変数と呼ばれる運動量を導入すると便利である。作用変数 J は位相空間上の 1 周期分の積分によって

$$J = \oint pdq \quad (1.13)$$

と計算される。ここで、周期運動としてジャイロ運動を選び、その作用変数 J_1 を導出する。磁力線に垂直な速度 v_\perp とラーマ半径 r_L を用いて式 (1.13) を計算すると、

$$J_1 = \oint pdq \quad (1.14)$$

$$= \int_0^{2\pi} mv_\perp r_L d\theta \quad (1.15)$$

$$= \frac{2m}{q} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \frac{mv_\perp^2}{B} d\theta \quad (1.16)$$

$$= \frac{4\pi m\mu}{q} \quad (1.17)$$

ただし、式 (1.16) において、磁気モーメント $\mu = \frac{1}{2} \frac{mv_\perp^2}{B} = \text{const}$ がジャイロ運動の間に保存する（旋回中心の運動に平均化できる）として式変形を行った。磁気モーメントがジャイロ運動の間に保存するか否かは、ジャイロ運動の空間スケールがバウンス運動に比べて十分小さいとみなせるかによる。どの程度のエネルギーまでこの階層分離を行えるかどうかの定量的な議論は第 3 章で行う。こうして計算された作用変数 $J_1 = \frac{4\pi m\mu}{q}$ の定数倍として新

たに $J_1 = \mu$ をジャイロ運動についての断熱不変量として取り扱う。荷電粒子のハミルトニアンは運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和として

$$H = \frac{m}{2}v^2 + q\phi \quad (1.18)$$

と記述されるが、断熱不変量 μ 葉層の上での案内中心のハミルトニアン H_{gc} は次のように書ける。

$$H_{gc} = \mu B + \frac{1}{2}mv_{\parallel}^2 + q\phi \quad (1.19)$$

ジャイロ運動は、磁気モーメントが保存する条件下で旋回中心の運動として平均化された。ここでは、磁力線に平行方向の運動であるバウンス運動を効果的に取り扱うことのできる磁気座標系について述べる。図 1.3 に示されるような、磁力線に沿った方向の長さ l 、磁束関数 ψ 、トロイダル角 θ を用いる座標系が磁気座標系 (l, ψ, θ) である。この座標系を導入することでバウンス運動は $\psi = const$ の上で l が変化する運動として取り扱うことができる。すなわち、バウンス運動を記述する正準変数として (P_{\parallel}, l) を取ることができる。ただし、 l, P_{\parallel} は磁力線に平行な方向の運動量である。このとき $H = \mu B + \frac{P_{\parallel}^2}{2m} + q\phi$ であり、磁場と電位が空間の関数として $B(l, \psi), \phi(l, \psi)$ と書けることから、変数 (P_{\parallel}, l) の時間発展は

$$\begin{cases} \frac{dl}{dt} = \frac{\partial H}{\partial P_{\parallel}} = \frac{P_{\parallel}}{m} \\ \frac{dP_{\parallel}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial l} = -\mu \frac{\partial B}{\partial l} - q \frac{\partial \phi}{\partial l} \end{cases} \quad (1.20)$$

と記述される。

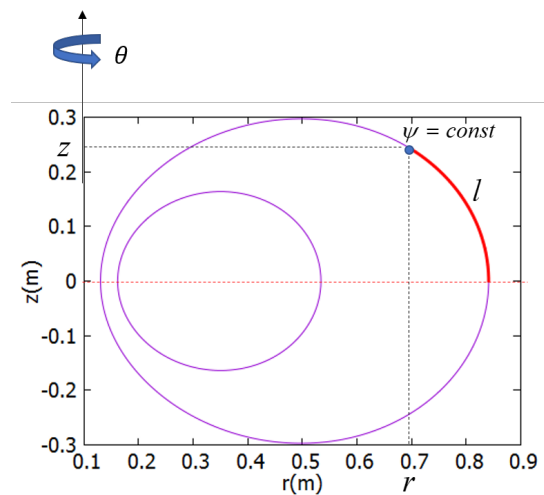


図 1.3: 磁気座標系

1.3 本研究の目的と論文の構成

本研究では磁気圏型プラズマの平衡状態における温度非等方性と電場の効果を考察する。特に密度分布に関する効果に着目する。電子・イオンの密度はプラズマの性質を規定する重要なパラメータであり、詳細な計測が進められている。電子密度については、干渉計によって得られた線積分値やダブルプローブによって得られた局所値を用いてプラズマ中の電子密度分布の再構成が行われている。([12, 13]) その再構成に用いる電子密度分布のモデル関数は

$$n_e = n_0 \exp \left(-a \left(\frac{\psi(r, z) - \psi'}{\psi_0} \right)^2 \right) \left(\frac{B(r, z)}{B_{z=0}} \right)^{-b} \quad (1.21)$$

を仮定している。ただし、 $\psi(r, z)$ は (r, z) における磁束関数、 ψ' は $z = 0(m)$ で密度が最大となる r における磁束関数、 ψ_0 は RT-1 壁での磁束関数を表し、 n_0, a, b はフィッティングパラメータである。 $\exp \left(-a \left(\frac{\psi(r, z) - \psi'}{\psi_0} \right)^2 \right)$ の部分で磁力線に垂直方向の分布を表し、 $\left(\frac{B(r, z)}{B_{z=0}} \right)^{-b}$ の部分で磁力線に平行方向の分布を表している。ここでは特に後者について考える。このモデル関数においては磁力線上における磁場のミラー効果を $\frac{B(r, z)}{B_{z=0}}$ のべき乗として仮定しているが、より正確な考察をするためには物理的なモデルの下で考える必要がある。また、Grad-Shafranov 方程式を解くことで MHD 平衡を求める平衡モデルが既に存在しているが、その平衡モデルによって温度非等方性を扱うことはできない。そこで本研究ではジャイロ運動を平均化したハミルトン運動方程式及びハミルトニアンを用いて、非等方的な温度をもつ磁気圏型プラズマの平衡モデルを構築する。そのモデルを用いて温度非等方性が密度分布へもたらす影響を解明することを第一の目的とする。また、電子とイオンが異なる非等方性を持つとき、非平衡性を補償するために電場を介して密度分布が変化すると考えられる。その際に電場が密度分布にどのような影響をもたらすかの解明を第二の目的とする。

以下、論文の構成を述べる。まず、第 2 章で非等方的な温度をもつ磁気圏型プラズマの平衡モデルをどのように構築するかを述べる。温度非等方性を考慮した電子とイオンの密度計算の方法としてハミルトン形式を用いて記述された粒子運動から密度を求める方法とハミルトニアンの保存から密度を求める方法の 2 つの方法を提案する。得られた電子・イオン密度を用いて Poisson 方程式を解くことによって電位が得られる。再びその電位における密度を計算し電位を修正することを電位が収束するまで繰り返すことによって、電場を考慮した

平衡状態を得る。

次に第3章では、構築した平衡モデルの妥当性検証を行う。まず、磁場の補間やジャイロ運動の平均化によって計算速度がどの程度向上したかを評価する。また、数値計算コードによって計算したハミルトン形式による軌道をニュートン形式と比較して。磁気モーメントを保存するとみなせるエネルギーが定量的にどの程度なのか評価する。また、提案した密度計算の2つの方法がどの程度比較するかを調査し、特にハミルトニアンの保存から密度を求める方法についてはハミルトニアンの分布へもたせる広がりに関する検討を行う。最後に、SOR法にPoisson方程式が正しく解けていることを解析解と比較することによって確認する。

第4章では磁気圏型プラズマの平衡状態における温度非等方性の効果について考察する。まず、磁場強度が最小となる $z=0$ 上で非等方な温度をもつマクスウェル分布を与えたときに、ある磁力線における密度分布が温度非等方性によってどのように変化するかを述べる。また、第5章の準備として、複数の磁力線上の $z=0$ となる点に非等方な温度を与えたときの密度分布を導出する。

第5章では磁気圏型プラズマの平衡状態における電場の効果について考察する。電子とイオンのそれぞれに $z=0$ 上で異なる温度をもつマクスウェル分布を与えた場合に、その非平衡性を補償しようとする電場が密度分布にどのような影響を与えるかを考察する。電子とイオンの間の温度差が大きい場合と小さい場合に関する比較を行う。また、ハミルトニアンの分布の広がりによって電位の収束計算が安定化したことを確認する。

第 2 章

温度非等方性をもつ磁気圏型プラズマの平衡モデルの構築

2.1 平衡計算手法の概要

本研究では磁気圏型プラズマにおける平衡計算を行う。以下に計算手法の流れを述べる。

初期条件の設定

- 磁場：RT-1 の浮上コイルが形成する真空磁場を用いる。
- 電場：初期電場は 0 とする。
- 速度分布：ある磁力線上で磁場が最小となる $z = 0, r > 0.25(m)$ 上に初期速度 $(v_{\parallel}, v_{\perp})$ を与える。

密度分布計算

本研究では密度分布計算の方法について次の 2 つの方法を検討した。

- ハミルトン運動方程式の時間発展を解いて粒子軌道を求めて、その軌道を密度に変換する方法
- ハミルトニアン保存から直接密度を求める方法

電位計算

上記の方法で求めた電子密度 n_e とイオン密度 n_i を用いて Poisson 方程式を解くことによって電位を計算する。

電位収束計算

この電位の下で電子及びイオンの密度を計算し、電位を修正する。(密度分布計算と

電位計算を繰り返す。) この計算を電位が収束するまで反復することによって平衡解を得る。

2.2 磁場の計算と補間

半径 a の円形電流 I によって作られる静磁場を [20] に即して述べる。ベクトルポテンシャルは

$$A_r(r, z, \theta) = 0 \quad (2.1)$$

$$A_z(r, z, \theta) = 0 \quad (2.2)$$

$$A_\theta(r, z, \theta) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a \cos \chi d\chi}{\sqrt{z^2 + r^2 + a^2 - 2ar \cos \chi}} \quad (2.3)$$

と与えられる。また、 $B = \nabla \times A$ であることと軸対称性から、

$$B_r(r, z, \theta) = (\nabla \times A)_r = -\frac{\partial A_\theta}{\partial z} \quad (2.4)$$

$$B_z(r, z, \theta) = (\nabla \times A)_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) \quad (2.5)$$

$$B_\theta(r, z, \theta) = (\nabla \times A)_\theta = 0 \quad (2.6)$$

となる。表 2.1 の値を用いて浮上コイル・吊り上げコイルのそれぞれについて式 (2.4)～(2.6) を計算し、足し合わせることによって RT-1 における真空磁場が計算される。また、磁力線の式 $B_z dr = B_r dz$ に式 (2.4),(2.5) を代入すると

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) dr + \frac{\partial A_\theta}{\partial z} dz = 0 \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) dr + \frac{\partial (r A_\theta)}{\partial z} dz = 0 \quad (2.8)$$

となるから磁束関数は

$$\psi = r A_\theta = \text{const} \quad (2.9)$$

となる。このようにして計算した RT-1 の磁束関数及び磁場強度は図 2.1 のようになる。また、浮上コイルのみを考慮した磁束関数及び磁場強度は図 2.2 のようになる

式 (2.4)～(2.6) によって磁場を求めるためには式 (2.3) において積分計算を行う。数値積分の方法としてはシンプソンの公式などが挙げられるが、数値積分を軌道計算中に行うことは計算コストの面で困難である。そこで次のような方法で補間を行う。まず、 r, z それぞれ

の最小値・最大値として $r_{min} = 0(m)$, $r_{max} = 1.01(m)$, $z_{min} = -0.76(m)$, $z_{max} = 0.66(m)$ を設定する。次にこの範囲を r 方向に n_r 個、 z 方向に n_z 個に分割してその格子点における磁場強度を計算し、配列にデータとして格納する。この研究では $n_r = n_z = 10000$ とする。こうした計算された格子点における磁場を用いて磁場を補間する。例として、図 2.3 の点 P における磁場 B_P を求めたいとする。点 P を囲う 4 つの格子点における磁場の値 B_1, B_2, B_3, B_4 と、4 つの格子点と点 P によって作られる長方形の面積 S_1, S_2, S_3, S_4 を用いて

$$B_p = \frac{\sum_{i=1}^4 B_i S_{5-i}}{\sum_{i=1}^4 S_i} \quad (2.10)$$

と補間する。

表 2.1: RT-1 のコイルに関する情報

コイル名	電流中心	電流値	ターン数	起磁力
浮上コイル	$r=0.25m$ $z=0.005m$	115A	2160T	250kA
吊り上げコイル	$r=0.40m$ $z=0.612m$	432A	68T	28.8kA

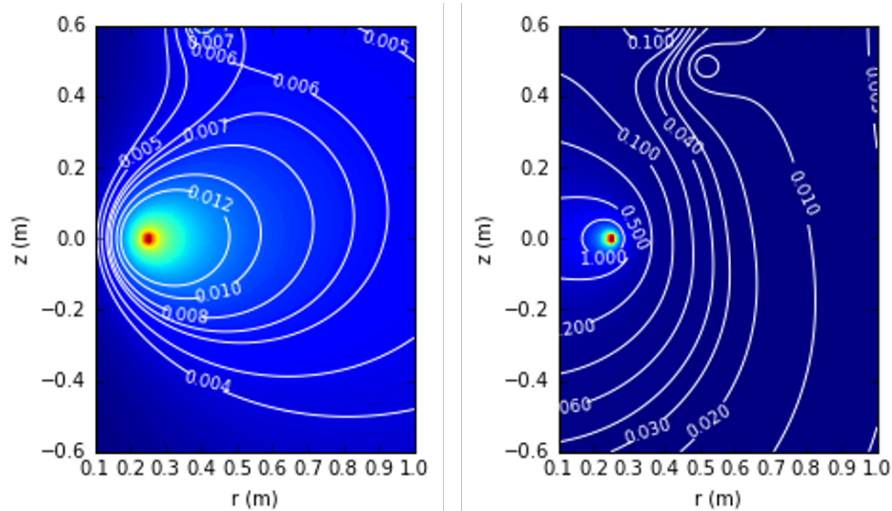


図 2.1: RT-1 における磁束関数と磁場強度

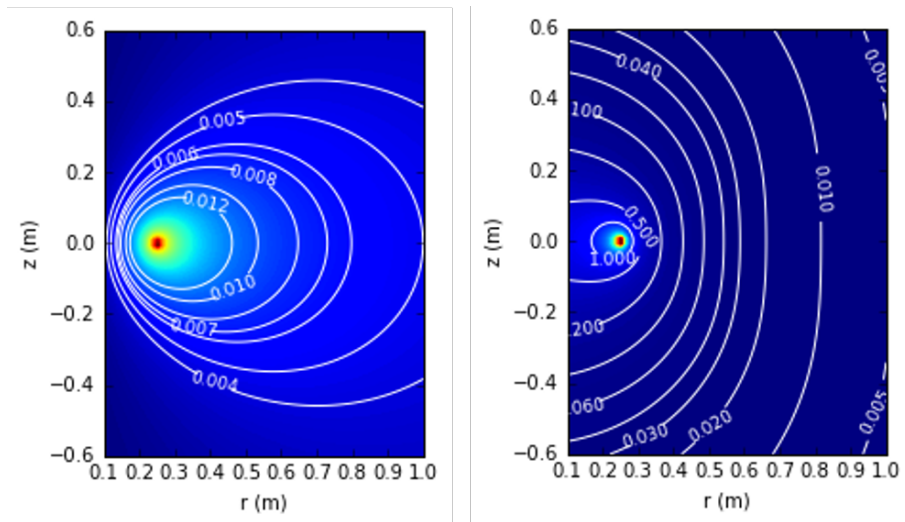


図 2.2: 浮上コイルによる磁束関数と磁場強度

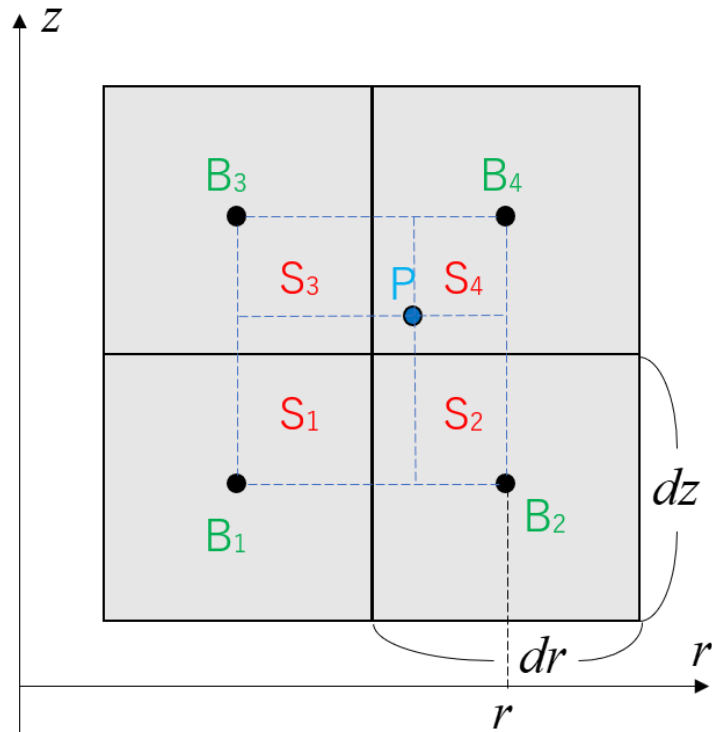


図 2.3: 格子点上で計算された磁場 B_1, B_2, B_3, B_4 から点 P における磁場を補間する。

補間には点 P とその周りの 4 つの格子点によって作られる 4 つの長方形の面積 S_1, S_2, S_3, S_4 を用いる。

2.3 直交座標系と磁気座標系の対応

式 (2.9) からわかるように、ある磁力線上で磁束関数 ψ は一定値をとる。ここで、その磁力線上で磁場強度が最も低くなる点から磁力線に沿って反時計周りに測った長さを l と定義する。時計回り方向の l は負の値を持つ。ただし、 $z = 0(m), r < 0.25(m)$ となる線上で l の正負が切り替わるとする。式 (2.3) と式 (2.9) から、 (r, z) が与えられれば ψ の値を計算できることがわかるが、 l については求めることができない。そこで次のような方法で (r, z) と (l, ψ) を対応付ける。まず、 (r, z) 平面上に格子を作り、格子点における ψ の値を計算する。次に marching squares([21]) と呼ばれるアルゴリズムを用いて、 ψ の等高線を描くことを考える。説明のために、図 2.4 のような 5×5 の格子点がそれぞれ 2~5 の整数値をもつような状況を考える。この図の上に 3 の値をもつ等高線を引きたいとする。例えば、2 という値をもつ格子点と 4 という値をもつ格子点が並んで存在するとき、その 2 つの中点が 3 をもつとして赤点を打つ。同様に 2 という値をもつ格子点と 5 という値をもつ格子点が並んで存在するとき、その 2 点を結ぶ線分を 1:2 に内分する点が 3 をもつとして赤点を打つ。最後に 3 という値をもつ格子点に赤点を打つ。このようにすると、図 2.4 上の赤点を結んだ線が 3 という値をもつ等高線となる。marching squares を (r, z) 平面上の格子に適用して ψ の等高線が求められれば、隣り合う 2 点間の距離を足し合わせることによって磁力線 1 周の長さを求めることができる。この長さを l 方向の分割数である N_l で割った長さを dl とする。また、 ψ の最小値と最大値 ψ_{min}, ψ_{max} を与え、 ψ 方向の分割数である N_ψ を用いて $d\psi = \frac{\psi_{max} - \psi_{min}}{N_\psi}$ とする。こうして、 (l, ψ) 平面上の格子点において (r, z) の値が対応付けられる。

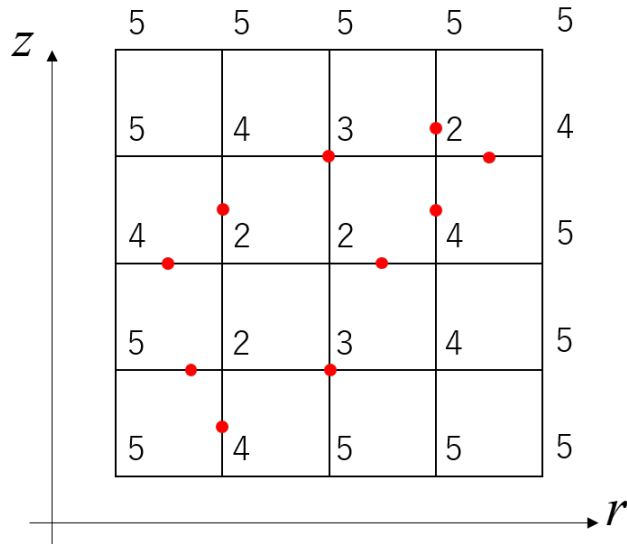


図 2.4: 本研究では格子状データから等高線を描く方法として **marching squares** を用いている。磁束密度 ψ の格子状データから補間する方法によって直交座標系と円筒座標系を対応づけている。

2.4 密度計算

密度を計算する方法として次の2つの方法を考案した。この2つの方法が同じ結果になることは第3章で示す。

2.4.1 ハミルトン運動方程式から得られる粒子軌道からの密度の導出

式 (1.20) を解くことによって、ジャイロ運動が平均化されたバウンス運動の軌道が得られる。本研究では4次のルンゲクッタ法により式 (1.20) を解く。複数の電子・イオンに異なる $(v_{\parallel}, v_{\perp})$ を初期速度として与え、 $0.4(m) < r < 0.9(m)$, $z = 0$ 上を初期位置とする。本研究ではそれぞれの粒子について独立に1周期分の軌道を計算する。バウンス運動の時間発展を計算する時間刻み dt は初期速度や粒子の種類によって異なるため、それぞれの粒子について与える必要がある。そこで、まず図 2.5 のようにある磁力線上の磁場 $B(l)$ を2次関数 $B = B_0(\alpha l^2 + 1)$ と近似する。この α は最小二乗法によって求める。式 (1.20) から電場

が存在しないときの運動方程式は

$$\frac{d^2l}{dt^2} = -\mu \frac{\partial B}{\partial l} \quad (2.11)$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{mv_{\perp}^2}{B_0} 2B_0 \alpha l \quad (2.12)$$

$$= -v_{\perp}^2 \alpha l \quad (2.13)$$

となり調和振動子として記述される。このとき周期は $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha v_{\perp}}}$ となるため、1周期を N 点で記述するとすると、 $dt = \frac{T}{N}$ と見積もることができる。本研究では $N = 1000$ とした。この手法によっておおよその時間刻みを推定することができる一方で、実際の磁場は2次関数として記述できないことや電場の存在があることから dt が適切な値とならないことがあるので、その場合には dt を修正する。

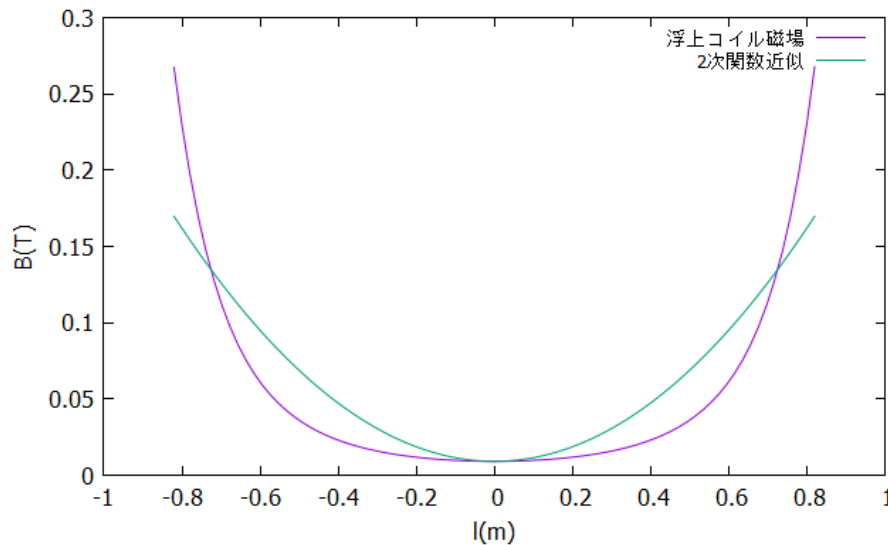


図 2.5: 時間発展計算の時間刻み dt を見積もるために、ある磁力線上での磁場を 2 次関数として近似する。2 次関数として 近似することによって、バウンス運動が調和振動子として表記され、その周期 T から時間刻み dt を見積もることができる。

軌道計算によって得られた点は磁場の補間と同様の方法によって、密度を計算するための格子点へと配分される。このように粒子計算と格子における場の計算を行き来するような計算手法は一般的に PIC(Particle In Cell) 法と呼ばれる。

2.4.2 ハミルトニアン の 保存 を 用いた 密度 の 導出

f を物理量とする。 f が時間に依存しないとき、ポアソン括弧を用いて

$$\frac{d}{dt}f = \{f, H\} = 0 \quad (2.14)$$

と書くことができる。この f を用いると磁気座標系における密度 ρ は

$$\rho = \int f(v_{\parallel}) dv_{\parallel} \quad (2.15)$$

$$= \int f(H) \frac{dv_{\parallel}}{dH} dH \quad (2.16)$$

$$= \int \frac{1}{mv_{\parallel}} f(H) dH \quad (2.17)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2m}} \int \frac{f(H)}{\sqrt{H-V}} dH \quad (2.18)$$

と書くことができる。ただし、 $H = \frac{1}{2}mv_{\parallel}^2 + q\phi + \mu B = \frac{1}{2}mv_{\parallel}^2 + V = H_0$ とし、ポテンシャル V は位置の関数として表される。この式から磁気座標系における密度はポテンシャルの関数として表されることがわかる。ここで $f(H)$ として、 δ 関数 (粒子に相当する) と、ハミルトニアンに矩形状・三角形状の分布を持たせた場合を考える。全ハミルトニアンで積分したときに 1 になることに注意すると、それぞれ

$$f_1(H) = \delta(H - H_0) \quad (2.19)$$

$$f_2(H) = \begin{cases} \frac{1}{2\Delta H} & (H_0 - \Delta H \leq H \leq H_0 + \Delta H) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (2.20)$$

$$f_3(H) = \begin{cases} \frac{1}{(\Delta H)^2} (H - (H_0 - \Delta H)) & (H_0 - \Delta H \leq H \leq H_0) \\ -\frac{1}{(\Delta H)^2} (H - (H_0 + \Delta H)) & (H_0 \leq H \leq H_0 + \Delta H) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (2.21)$$

となる。式 (2.19)~式 (2.21) について式 (2.18) を計算すると、それぞれ

$$\rho_1 = \frac{1}{\sqrt{2m(H_0 - V)}} \quad (2.22)$$

$$\rho_2 = \sqrt{\frac{2}{m}} \frac{\sqrt{H_0 + \Delta H - V} - \sqrt{H_0 - \Delta H - V}}{\Delta H} \quad (2.23)$$

$$\rho_3 = \frac{4}{3\sqrt{2m}} \frac{(H_0 + \Delta H - V)^{1.5} + (H_0 - \Delta H - V)^{1.5} - 2(H_0 - V)^{1.5}}{(\Delta H)^2} \quad (2.24)$$

となる。ここで $m = \frac{1}{2}$, $H_0 = 1.8$, $\Delta H = 0.1$ として、図 2.6 に f_1, f_2, f_3 、図 2.7 に ρ_1, ρ_2, ρ_3 を示した。図 2.7 によると H_0 から離れたポテンシャルにおいては ρ_1, ρ_2, ρ_3 は同じ値をとっているが、 H_0 付近での様子が大きく異なることがわかる。 ρ_1 を見ると $V = H_0$ で無限大に発散していることがわかる。これは、ハミルトニアンがポテンシャルと等しくなる場所では、 v_{\parallel} が 0 に近づいていくため、速度の逆数としての密度が無限大になるためである。一方で、 ρ_2, ρ_3 を見ると $V = H_0$ での無限大への発散が防がれていることがわかる。このようにハミルトニアンに広がりを持たせることによって、密度が無限大に発散することを防止するため、計算の安定化が期待される。このことについては第 5 章で述べる。以降、本研究ではハミルトニアンに三角形の広がりを持たせた f_3, ρ_3 を用いる。また、ハミルトニアンの分布に広がりを持たせる ΔH をどのように与えるかの検討について第 3 章で述べる。

これまで取り上げてきた ρ は磁気座標系 (l, ψ) での密度であり、これを直交座標系 (x, y) における密度に変換する必要がある。ヤコビアン J を

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial l} & \frac{\partial x}{\partial \psi} \\ \frac{\partial y}{\partial l} & \frac{\partial y}{\partial \psi} \end{vmatrix} \quad (2.25)$$

と書くと、 $dxdy = Jdld\psi$ となる。また、直交座標系での密度を ρ' と書くことにすると $\rho dld\psi = \rho' dxdy$ なので

$$\rho' = \frac{\rho dld\psi}{dxdy} = \frac{\rho}{J} \quad (2.26)$$

となる。図 2.8 に RT-1 の浮上コイルによる真空磁場におけるヤコビアン J の値を示した。さらに、Poisson 方程式を解くときには軸対称性を利用するために円筒座標系における密度を用いる。円筒座標系での密度を ρ'' とすると

$$\rho'' = \frac{\rho'}{r} \quad (2.27)$$

となる。

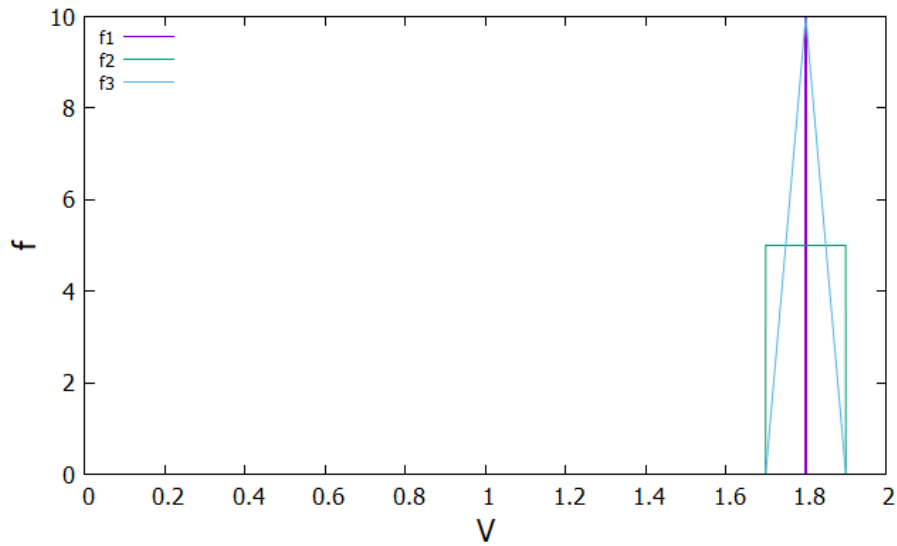


図 2.6: f_1, f_2, f_3 の例. f_1 はデルタ関数 (粒子に相当) であるのに対して、 f_2 は矩形、 f_3 は三角形になるようにハミルトニアン分布に広がりを持たせている。全ハミルトニアンで積分すると 1 となる。

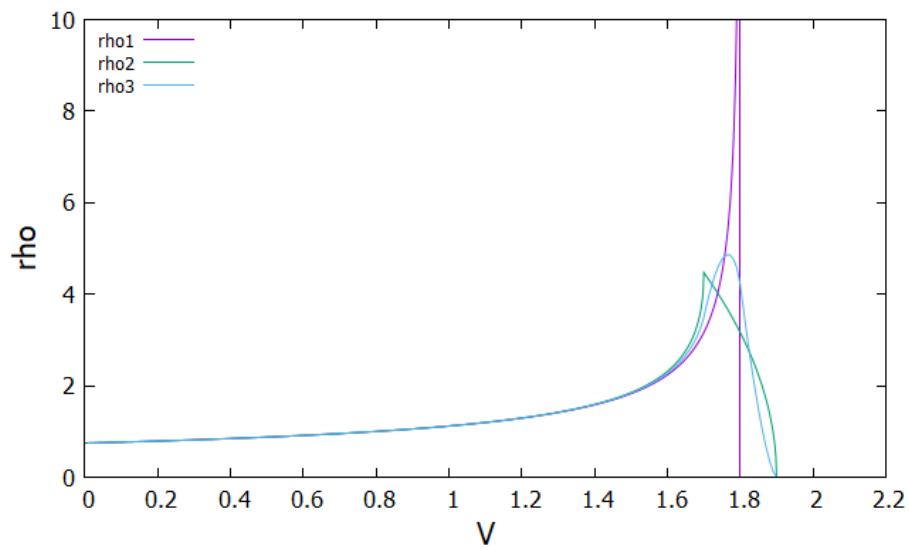


図 2.7: 図 2.6 の下での ρ_1, ρ_2, ρ_3 . ρ_1 の場合は $V = 1.8$ で発散してしまい数値計算上の不安定性を生む。一方で、 ρ_2, ρ_3 の場合は有限の値に密度が抑えられていることがわかる。

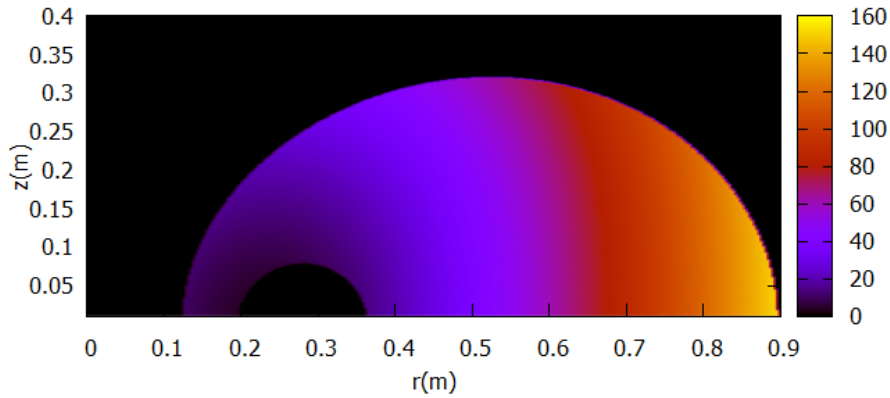


図 2.8: 磁気座標系と円筒座標系間のヤコビアン値。本計算において扱わない領域についてはヤコビアン値を 0 として描画している。

2.5 電位計算

得られた電子密度 n_e 及びイオン密度 n_i を用いて以下の Poisson 方程式を解くことによって電位 ϕ を得ることができる。

$$\Delta\phi = -\frac{e(n_i - n_e)}{\epsilon_0} \quad (2.28)$$

ただし、 e は電気素量、 ϵ_0 は真空の誘電率である。本研究では RT-1 装置の真空壁を電位の境界条件として用いるため、複雑な境界条件を取り扱うことのできる差分法によって Poisson 方程式を解く。(図 2.9) RT-1 装置が軸対称性をもつ装置であることから、式 (2.28) を円筒座標系に書き換えると、

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = -\frac{e(n_i - n_e)}{\epsilon_0} \quad (2.29)$$

となる。これを SOR 法を用いて解く。

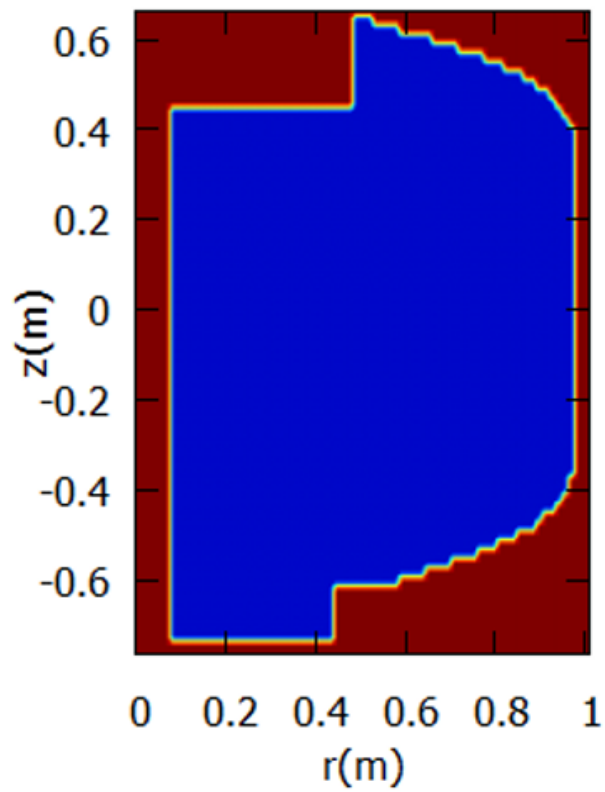


図 2.9: 電位計算の境界条件. 青い部分が RT-1 の真空容器内部、赤い部分が外部を表している。電位計算においては赤い部分を $\phi = 0$ の境界条件とする。

第 3 章

平衡モデルの妥当性検証

3.1 計算速度の評価

以下では、 rz 平面に射影した粒子軌道についての考察を行う。特に断りのない限り、粒子として電子を用いる。また、電場は存在しないとする。

3.1.1 磁場の補間による計算速度の向上

ダイポール磁場における粒子軌道はニュートン運動方程式を解くことによって得られるが、その際に粒子が存在する位置における磁場の値を必要とする。式 (2.4)~(2.6) によって磁場を求めることができるが、式 (2.3) において積分計算を行う必要があるため、計算時間が増大する。そこで、あらかじめ格子点上における磁場強度を計算してデータとして保存しておき、軌道計算の際にはそのデータから補間して磁場強度を与えている。この磁場の補間が正しく行われていることと、計算時間がどれだけ短縮したかを次の計算条件の下で比較する。

計算条件 1

- ・ 初期位置 : $r = 0.7(m), z = 0.0(m)$
- ・ 初期エネルギー : $E_{\parallel} = E_{\perp} = 100(eV)$
このとき、初期の磁気モーメントは $\mu_0 = 9.6684e^{-16}$
- ・ 経過時間実験値 : $1.0 \times 10^{-6}(s)$

この計算条件の下での軌道は図 3.1 のようになり、バウンス運動 1 周期のうちに 130 回の

ジャイロ運動を行っている。表 3.1 に (a) 磁場を逐次計算した場合と (b) 磁場を補間して与えた場合について、それぞれ時間刻み幅をラーマ周期の $1/128, 1/256, 1/512$ とした場合の計算時間を示した。どのラーマ周期の場合についても、磁場を補間した場合は逐次計算した場合の $1/240$ 程度の時間で計算できることが示された。

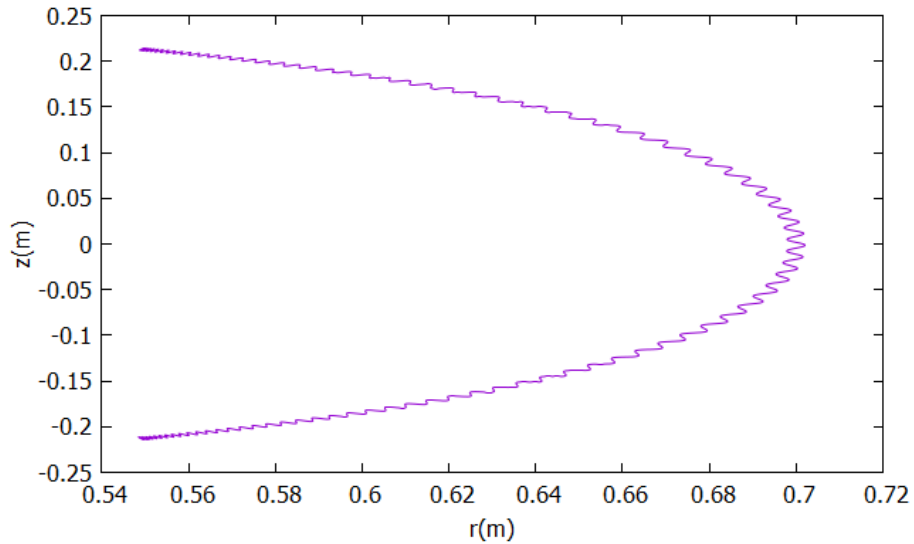


図 3.1: 計算条件 1 の下での軌道

表 3.1: 磁場の補間による計算速度の向上

番号	磁場の与え方	時間刻み幅	計算時間 (s)
1(a)	磁場逐次計算	ラーマ周期の $1/128$	8.470
1(b)	磁場補間	ラーマ周期の $1/128$	0.036
2(a)	磁場逐次計算	ラーマ周期の $1/256$	16.943
2(b)	磁場補間	ラーマ周期の $1/256$	0.070
3(a)	磁場逐次計算	ラーマ周期の $1/512$	33.870
3(b)	磁場補間	ラーマ周期の $1/512$	0.140

3.1.2 ジャイロ運動の平均化による計算速度の向上

次にニュートン運動方程式を解く際に適した時間刻みに関する考察を行う。軌道計算は細かい時間刻みで時間発展を計算することによって精度の良い解が得られるがその分だけ計算時間が長くなる。そこで、ニュートン運動方程式を正しく解ける範囲内でどの程度時間刻みを長くできるかを考える。計算の初期位置における磁場 B と初期速度 v_{\perp} から計算される磁気モーメントを μ_0 とし、ジャイロ運動一周期毎に加算平均した磁気モーメントのうち、 μ_0 との差が最も大きいものを μ_1 と定義する。表 3.2 に磁場を補間して与えた場合について、時間刻み幅を変えた場合の磁気モーメントの変動率 $\frac{|\mu_1 - \mu_0|}{\mu_0}$ の値を示した。時間刻み幅としてラーマ周期の 1/64, 1/128, 1/256, 1/512, 1/1024 を与えたが、ラーマ周期の 1/256 よりも短い時間刻み幅については磁気モーメントの変動率がほとんど変わらなかった。よって、ニュートン運動方程式を正しく解ける範囲内での最大時間刻みをラーマ周期の 1/256 とし、ハミルトン運動方程式との比較を行う。

表 3.2: 磁場を補間して与えたときの、時間刻み幅の違いによる磁気モーメントの変動率の比較

番号	時間刻み幅	$\frac{ \mu_1 - \mu_0 }{\mu_0}$
1	ラーマ周期の 1/64	1.006E-2
2	ラーマ周期の 1/128	4.251E-3
3	ラーマ周期の 1/256	4.188E-3
4	ラーマ周期の 1/512	4.189E-3
5	ラーマ周期の 1/1024	4.188E-3

ここでは、ニュートン運動方程式を4次のルンゲクッタ法で解いた軌道と、本研究で用いる数値計算コードにおけるハミルトン運動方程式を4次のルンゲクッタ法で解いた軌道を比較する。ジャイロ運動とバウンス運動の時間・空間スケールの違いを利用して階層分離を行っているため、高エネルギー粒子においてはニュートン形式とハミルトン形式の軌道は一致しない。まず、以下の計算条件における軌道を比較する。

計算条件 2

- ・初期位置： $r = 0.7(m), z = 0.0(m)$
- ・初期エネルギー： $E_{\parallel} = E_{\perp} = 100(eV)$
- ・ニュートン形式における計算時間刻み：ジャイロ運動の $1/256$
- ・ハミルトン形式における計算時間刻み：バウンス運動の $1/130$

図 3.2 では上記の計算条件の下での、円筒座標系におけるニュートン形式とハミルトン形

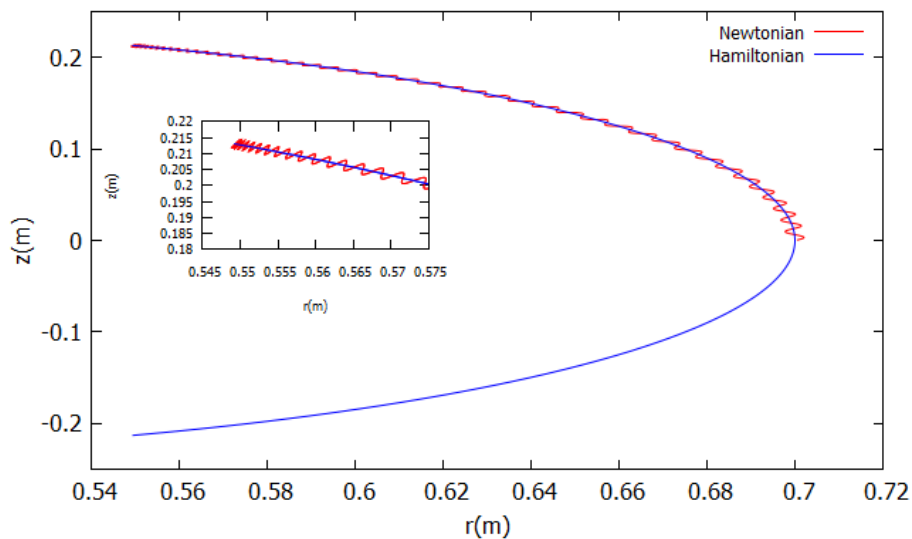


図 3.2: 円筒座標系におけるニュートン形式とハミルトン形式の軌道比較. ニュートン形式で記述されるジャイロ運動の旋回中心軌道がハミルトン形式によって記述されていることがわかる。ニュートン形式については比較のために $1/4$ 周期分だけ記述されている。図中の拡大図から、ニュートン形式とハミルトン形式においてバウンス点が一致していることが観測される。

式の軌道計算の比較がされている。ニュートン形式については比較のためにバウンス運動の $1/4$ 周期分だけ描画してある。図 3.2 から、ニュートン形式で記述されるジャイロ運動の旋

回中心軌道がハミルトン形式によって記述されていることがわかる。また、図 3.2 中の拡大図より、バウンス点が 2 つの軌道で一致していることがわかる。また、ハミルトン形式の軌道計算に要した時間は $1.27 \times 10^{-3}(s)$ であり、表 3.1 の 2(b) と比較すると、計算時間が約 1/50 となった。

次に 2 つの軌道のバウンス点の位置を確認する。電場が存在しないときのエネルギー保存 $\frac{1}{2}mv_{\parallel}^2 + \mu B = const$ を用いると、初期位置の磁場を B_0 , バウンス点における磁場を B_1 とするとき、

$$\frac{B_1}{B_0} = 1 + \left(\frac{v_{\parallel}}{v_{\perp}} \right)^2 \quad (3.1)$$

となることがわかる。上の計算条件では $v_{\parallel} = v_{\perp}$ であるから、 $\frac{B_1}{B_0} = 2$ となる。 $\frac{B}{B_0}$ の r による変化を図 3.3 に示した。 $r=0.55(m)$ 付近のバウンス点で確かに $\frac{B}{B_0}=2$ となっていることが観測される。

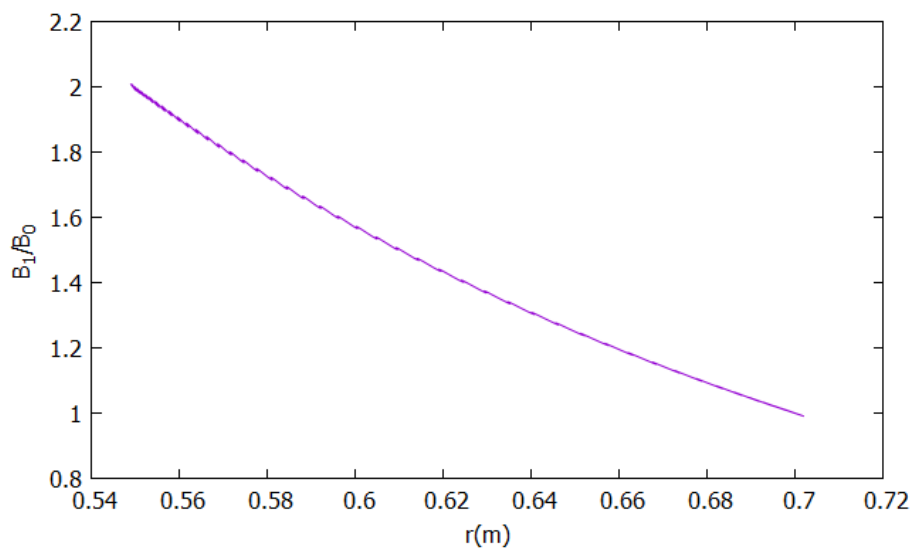


図 3.3: 図 3.2 における $\frac{B}{B_0}$ の r による変化。 $r=0.55(m)$ 付近のバウンス点で確かに $\frac{B}{B_0}=2$ となっていることが観測される。

3.2 磁気モーメントが保存するエネルギー範囲の検討

磁気モーメントが保存するエネルギー範囲について、以下の計算条件の下で検討する。

計算条件 3

- ・初期位置 : $r = 0.7(m), z = 0.0(m)$
- ・初期エネルギー : $E_{\parallel} = E_{\perp}$ となる場合について考察する。
 - (a) $E_{\parallel} = E_{\perp} = 100(eV)$ 電子: $m_e = 9.11 \times 10^{-31}(kg)$
 - (b) $E_{\parallel} = E_{\perp} = 1(keV)$ 電子: $m_e = 9.11 \times 10^{-31}(kg)$
 - (c) $E_{\parallel} = E_{\perp} = 10(keV)$ 電子: $m_e = 9.11 \times 10^{-31}(kg)$
 - (d) $E_{\parallel} = E_{\perp} = 100(keV)$ 電子: $m_e = 9.11 \times 10^{-31}(kg)$
 - (e) $E_{\parallel} = E_{\perp} = 0.1(eV)$ イオン: $m_i = 1.67 \times 10^{-27}(kg)$
 - (f) $E_{\parallel} = E_{\perp} = 1(eV)$ イオン: $m_i = 1.67 \times 10^{-27}(kg)$
 - (g) $E_{\parallel} = E_{\perp} = 10(eV)$ イオン: $m_i = 1.67 \times 10^{-27}(kg)$
 - (h) $E_{\parallel} = E_{\perp} = 100(eV)$ イオン: $m_i = 1.67 \times 10^{-27}(kg)$
- ・ニュートン形式における計算時間刻み : ジャイロ運動の $1/256$
- ・ハミルトン形式における計算時間刻み : バウンス運動の $1/130$

図 3.4 に計算条件 3 の (a)~(d) における電子のニュートン形式とハミルトン形式の軌道を記した。(a)~(c) すなわち、エネルギーが $100(eV) \sim 10(keV)$ の電子については、ハミルトン形式による軌道がニュートン形式の軌道案内中心を描いているため一方で、エネルギーが $100(keV)$ となる (d) については 2 つの軌道が一致していないことがわかる。また、図 3.5 に計算条件 3 の (e)~(h) におけるイオンのニュートン形式とハミルトン形式の軌道を記した。(e)~(g) すなわち、エネルギーが $0.1(eV) \sim 10(eV)$ のイオンについては、ハミルトン形式による軌道がニュートン形式の軌道案内中心を描いている一方で、エネルギーが $100(eV)$ となる (d) については 2 つの軌道が一致していないことがわかる。これはエネルギーが高くなることによってジャイロ運動のスケールがバウンス運動のスケールと同程度になったことによる。よって本研究で構築した平衡モデルにおいて取り扱うことのできるエネルギーのオーダーを電子については $10(keV)$ 、イオンについては $10(eV)$ とする。

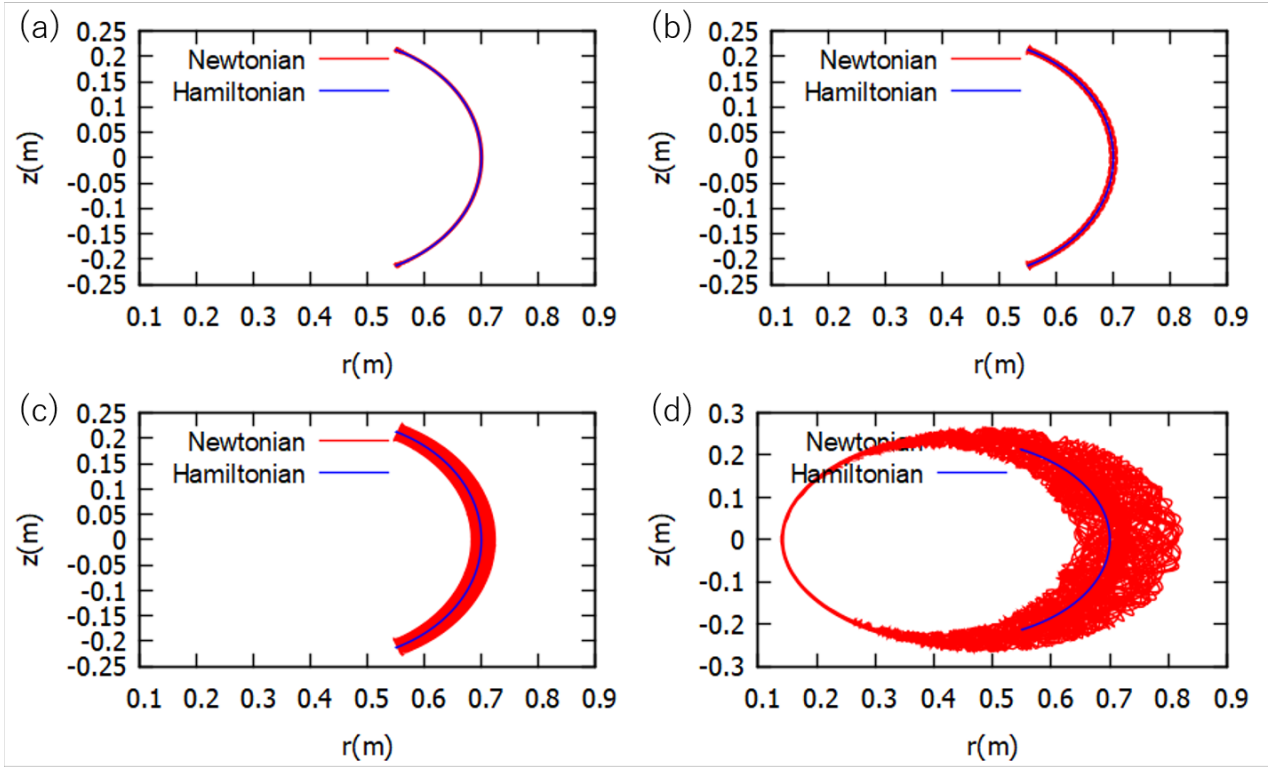


図 3.4: 計算条件 3 における電子の軌道比較

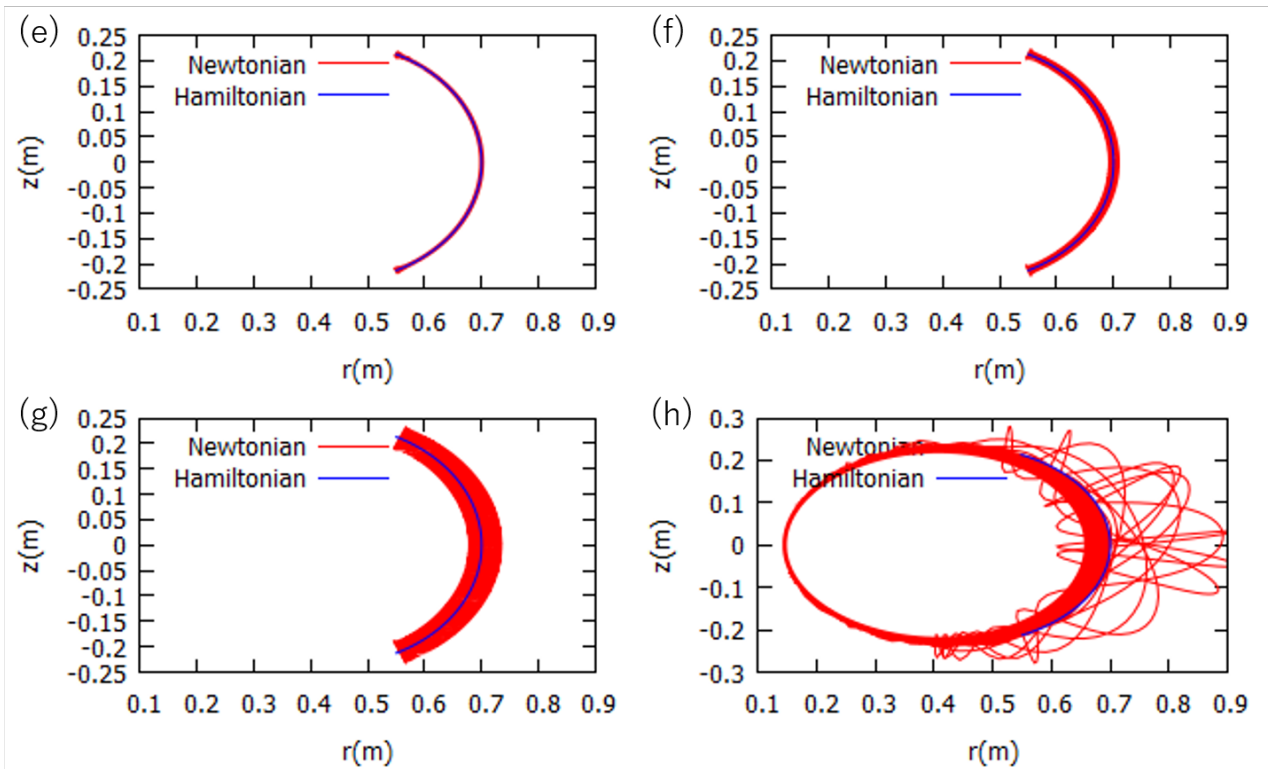


図 3.5: 計算条件 3 におけるイオンの軌道比較

3.3 密度計算手法の比較

次のような計算条件の下での比較を行う。

計算条件 4

- ・初期位置 : $l = 0(m), \psi = 0.006$
- ・ $z=0$ 上で $T_{\parallel} = T_{\perp} = 100(eV)$ のマクスウェル分布を与える。
- ・磁気座標系での密度を比較する。

まず、ハミルトニアン の保存から密度を計算する方法について考える。 $z=0$ 上に複数の $(v_{\parallel}, v_{\perp})$ の組を与えることによってマクスウェル分布を表現するが、その際に与える $(v_{\parallel}, v_{\perp})$ の組の数を多くすればするほど精緻に表現できる一方、計算時間が増大してしまう。図 3.6 に与える $(v_{\parallel}, v_{\perp})$ の組の数を増やしたときの密度分布の変化を示した。この図から組の数を増やすほどある関数形へ収束していくことがわかる。そこで、図 3.7 のように離散的な 40 点のデータを用意し、 $error_j$ を

$$error_j = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{40} (\rho_{i,j} - \rho_{i,10000000})^2}{40}} \quad (3.2)$$

と定義する。ただし、 $\rho_{i,j}$ は $(v_{\parallel}, v_{\perp})$ の組の数が j 組のときの i 番目の ρ の値とする。このとき $error_j$ の j に対する変化は図 3.8 のようになった。 $(v_{\parallel}, v_{\perp})$ の組の数 j が増えるほど $error$ の値が小さくなり、確かにマクスウェル分布を精緻に表現することが定量的に明らかになった。本研究では、ハミルトニアン の保存から密度を計算する方法において、10000 組の $(v_{\parallel}, v_{\perp})$ を用いることにする。

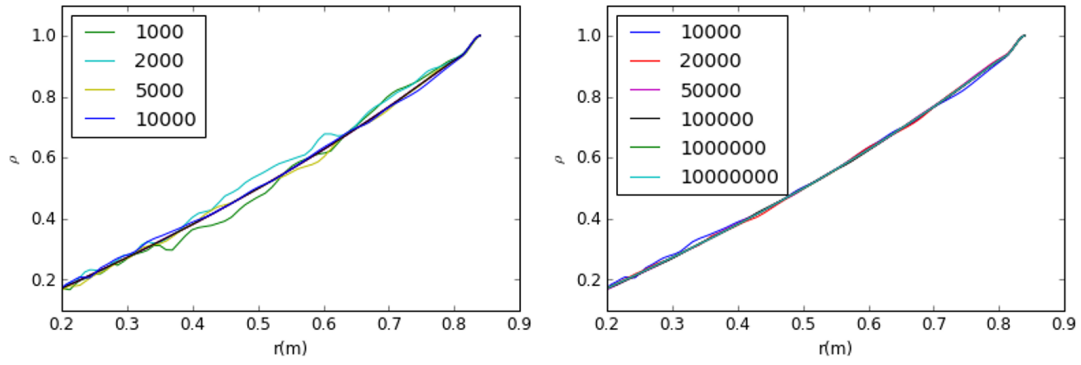


図 3.6: 与える $(v_{\parallel}, v_{\perp})$ の組の数を増やしたときの密度分布の変化。組の数を増やすほどある関数形へ収束していくことがわかる。

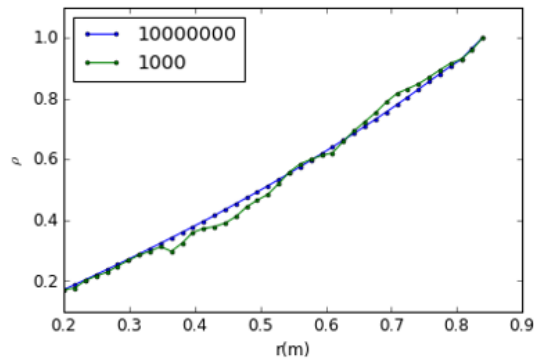


図 3.7: error を評価するための点として 40 点を選ぶ

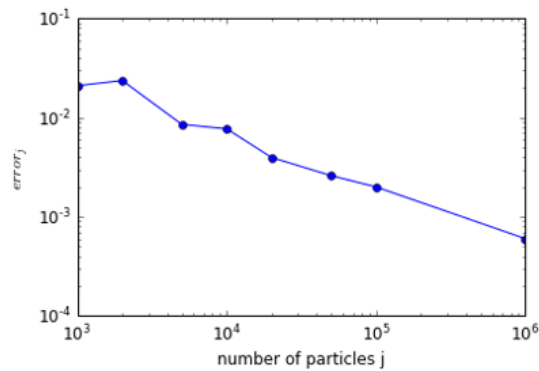


図 3.8: $error_j$ の j に対する変化。10000000 組の $(v_{\parallel}, v_{\perp})$ を用いて計算した場合と比較してどの程度の誤差をもつかを表している。 $(v_{\parallel}, v_{\perp})$ の組の数 j が増えるほど error の値が小さくなり、確かにマクスウェル分布を精緻に表現することがわかる。

次に粒子軌道から密度を計算する方法とハミルトニアン保存から密度を計算する方法の比較を行う。図 3.7 と同様に離散的な 40 点のデータを用意し、 $error2_j$ を

$$error2_j = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{40} (\rho_{i,j} - \rho'_i)^2}{40}} \quad (3.3)$$

と定義する。ただし、 $\rho_{i,j}$ は j 個の粒子を用いて粒子軌道から計算する方法によって求めた i 番目の ρ の値であり、 ρ'_i はハミルトニアン保存から計算した i 番目の ρ の値である。このとき $error2_j$ の粒子数 j に対する変化は図 3.9 のようになった。 $j < 2000$ については粒子数 j が増えると $error2_j$ が減っているが、 j がそれよりも大きくなると 2% 程度の値にとどまっている。これは、粒子軌道から密度を得る方法においてはマクスウェル分布を $z=0$ から最も近くにある格子に与えたのに対して、ハミルトニアン保存から計算する方法においては $z=0$ に直接マクスウェル分布を与えたという違いによるものと考えられる。

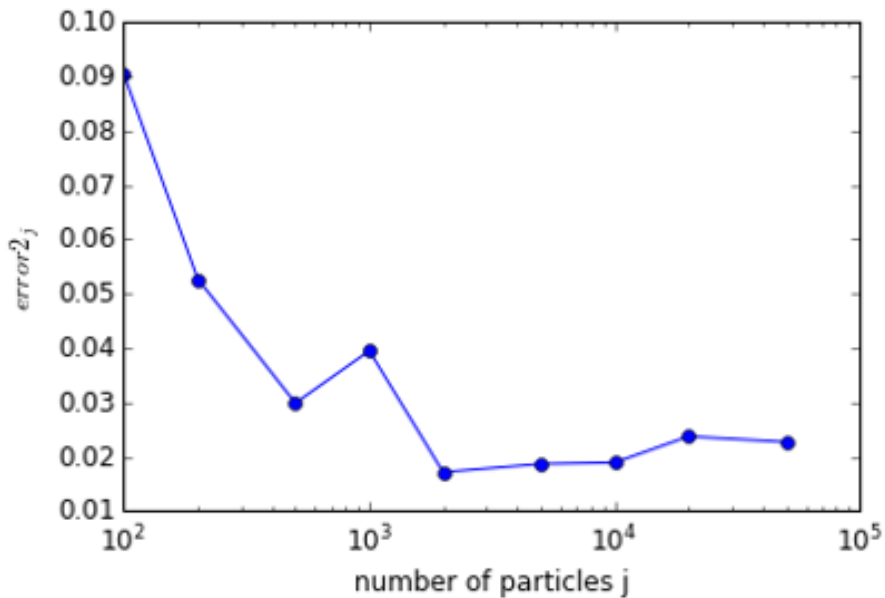


図 3.9: $error_j$ の j に対する変化。ハミルトニアン保存から計算した密度と粒子軌道から計算する方法によって求めた密度がどの程度の誤差をもつかを表している。 $j < 2000$ については粒子数 j が増えると $error2_j$ が減っているのに対して、 j がそれよりも大きくなると減少しなくなる。

3.4 ハミルトニアンの分布の広がり と 密度分布

密度を計算する方法としてハミルトン運動方程式を解くことによって得られた粒子軌道から計算する方法と、ハミルトニアンの保存から密度を求める方法の2つを提案した。第2章において、前者の粒子軌道による方法には、粒子がバウンスする点において密度が発散し計算が不安定になるという問題点があることを述べた。この方法は後者においてハミルトニアンの分布を δ 関数として与えた場合に相当する。ここでは、後者の方法でハミルトニアンの分布に与える広がり ΔH の与え方によって密度がどのように変化するかの考察を行う。計算条件としては以下を用いる。

計算条件 5

- ・初期位置 : $l = 0(m), \psi = 0.006$
- ・ $z=0$ 上で $T_{\parallel} = T_{\perp} = 100(eV)$ のマクスウェル分布を与える。
- ・磁気座標系での密度を比較する。(最大値で規格化した)

まず、ハミルトニアンの分布として δ 関数として与えた場合 (粒子軌道に相当する)、密度分布は図 3.10 のようになった。この図から、密度分布の形状が滑らかではなく、特に $r=0.4(m)$ 付近や $r=0.75(m)$ 付近で尖ったような形状が見えることがわかる。これはある粒子においてハミルトニアンの値がポテンシャルの値に非常に近づくといったことが偶発的に起こり、その粒子の密度が $r=0.4(m)$ 付近や $r=0.75(m)$ 付近で非常に高い値として計算されてしまったことによる。

次にハミルトニアンに広がりを持たせた場合を考える。与える $(v_{\parallel}, v_{\perp})$ によってハミルトニアンの値が異なるため、ハミルトニアンの広がり ΔH を $\Delta H = const$ と与えると、広がり効果を受けすぎてしまうものとほとんど受けないものが表れてしまうと考えられる。そこで各々のハミルトニアンの値 H に対してハミルトニアンの広がりを $\Delta H = \alpha H$ となるように与える。 α を変化させたときの密度分布の変化は図 3.11 のようになった。広がりをもたせた場合 ($\alpha > 0$) には δ 関数の場合 ($\alpha = 0$) で見られたような密度分布における尖った構造は見られず滑らかなグラフになっていることがわかる。一方で、 α が大きくなると $\alpha = 0$ のグラフから大きく離れてしまうことがわかる。そこで、計算を安定化させつつも粒子描像の場合と値が比較的近い $\alpha = 0.1$ を採用する。

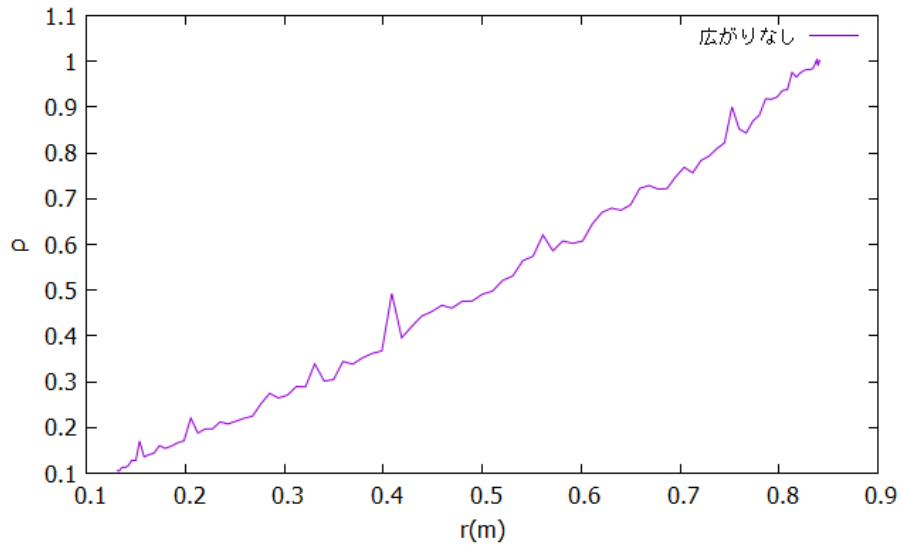


図 3.10: ハミルトニアンの分布が広がりを持たない場合の密度分布

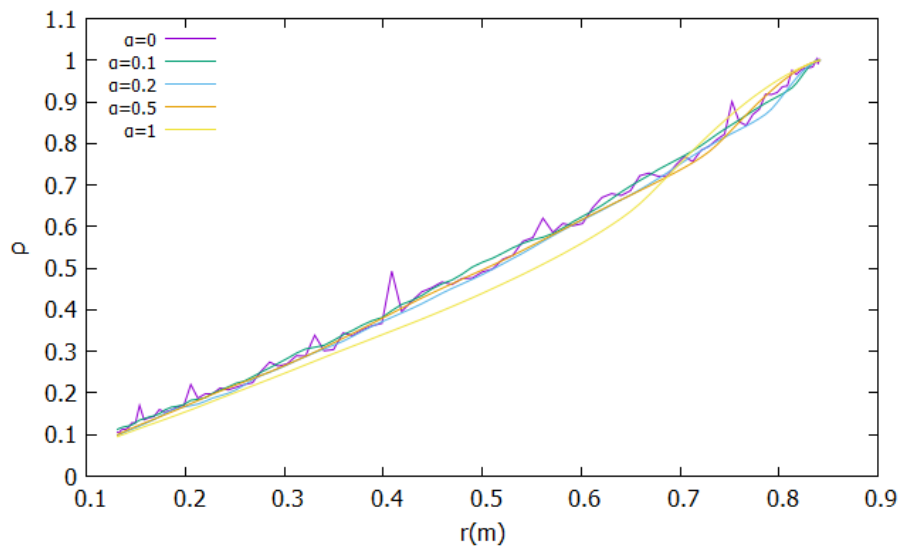


図 3.11: ハミルトニアンの分布が広がりを持つ場合の密度分布

3.5 電位計算の妥当性検証

本研究では、Poisson 方程式を解くことによって電位を計算する。次の計算条件における解析解と比較することによって、電位計算が正しく行われていることを確認する。

計算条件

- ・無限の長さをもつ半径 $1(m)$ の円筒を電気密度 $1(C/m^3)$ で一様に帯電させる。
- ・電位 ϕ の境界条件を $\phi(1) = 0$ とする。

上記の条件における、電位 $\phi(r)$ の解析解は

$$\phi(r) = -\frac{1}{4\epsilon_0}(r^2 - 1) \quad (3.4)$$

となる。この解析解と計算コードで用いた Poisson 方程式の数値解との誤差を図 3.12 に示した。この図からわかるように、理論解と数値解が 1% 程度の精度で一致しており、Poisson 方程式が正しく解けていることが確認できる。

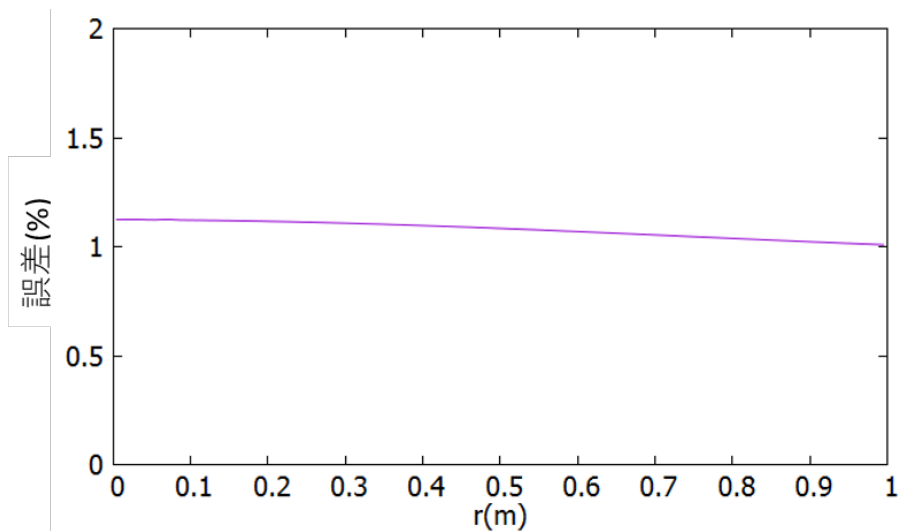


図 3.12: 電位計算の解析解と数値解の誤差. r が小さくなるほど誤差が大きくなっているが、1% 程度に抑えられていることから、解析解と数値解が概ね一致していることがわかる。

第 4 章

磁気圏型プラズマの平衡状態における温度非等方性の効果

4.1 ある磁力線上での温度非等方性の効果

以下では、まずある 1 本の磁力線上において温度非等方性がどのように表れるかを述べる。ここでは特に図 4.1 のように $\psi = 0.006$ 上を 100 等分し、その点における密度分布について考える。ただし、電場がない場合 $z = 0$ について対称であることから $z > 0$ の領域のみを扱っている。

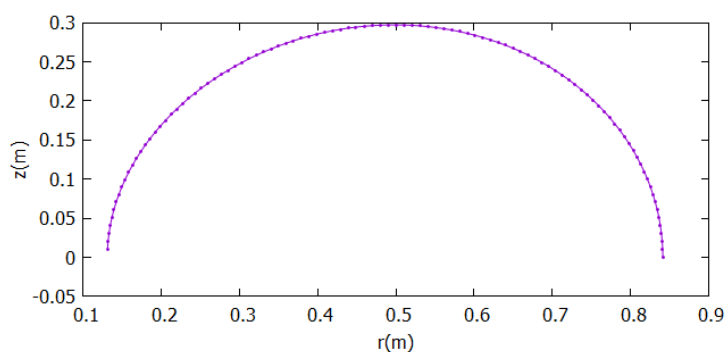


図 4.1: $\psi = 0.006$ となる磁力線 (l について 100 等分した点における密度を考える)

4.1.1 ミクロな密度の導出

ここでは、ある 1 組の $(v_{\parallel}, v_{\perp})$ が生成する密度をミクロな密度と呼ぶことにする。式 (2.24) から密度 ρ は $H_0 - V$ の関数であり、電場を考慮しないことに注意すると

$$H_0 - V = \frac{1}{2}mv_{\parallel}^2 + \mu B_0 - \mu B \quad (4.1)$$

$$= \frac{1}{2}m(v_{\parallel}^2 + (1 - \frac{B}{B_0})v_{\perp}^2) \quad (4.2)$$

と書ける。ただし、 $v_{\parallel}, v_{\perp}, B_0$ は、ある磁力線上での $z = 0(m), r > 0.25(m)$ となる点 (点 A と呼ぶ) における、磁力線に平行・垂直な速度と磁場を表す。式 (4.2) から、密度 ρ は $v_{\parallel}, v_{\perp}, \frac{B}{B_0}$ の関数となる。例えば、 $\psi = 0.01$ 上で $(v_{\parallel}, v_{\perp})$ を様々に与えた場合、密度は $\frac{B}{B_0}$ だけの関数として図 4.2 のようになる。ただし、 $\frac{B}{B_0} = 1$ となる点において密度が 1 になるように規格化してある。図 4.2 を見ると、 $\frac{v_{\perp}}{v_{\parallel}}$ が大きいほど、 $\frac{B}{B_0}$ が大きな地点、すなわちコイルの内側付近まで密度を持つようになることがわかる。また、紫色の線では $\frac{B}{B_0}$ が最大のときまで密度を持ち、この $(v_{\parallel}, v_{\perp})$ の場合にはバウンスせずに磁力線上を 1 周することを表している。一方、紫色以外の線では ρ が最大値を取った後にすぐ減少している。これはバウンス点付近で v_{\parallel} が小さくなり密度が大きくなり、バウンス点より先には行かないことを示している。ある 1 組の $(v_{\parallel}, v_{\perp})$ が生成するミクロな密度については上記のように計算される。以下では、様々な $(v_{\parallel}, v_{\perp})$ の組の総和として表現されるマクロな密度について考察する。

4.1.2 等方な温度の下でのマクロな密度の導出

以下では点 A の上に速度分布関数を等方的になるように与えた場合に密度が磁場の関数としてどのように記述されるかを考察する。ここでは、 $T_{\parallel} = T_{\perp} = 100(eV)$ のときのマクスウェル分布 (図 4.3)

$$f(v_{\parallel}, v_{\perp}) = \exp\left(-\frac{\frac{1}{2}mv_{\parallel}^2}{T_{\parallel}} - \frac{\frac{1}{2}mv_{\perp}^2}{T_{\perp}}\right) \quad (4.3)$$

を与えることを考える。まず、速度分布における長方形領域内部に等間隔に生成した $(v_{\parallel}, v_{\perp})$ の組に対して式 (2.24) から点 A における密度を計算する。このとき、点 A にお

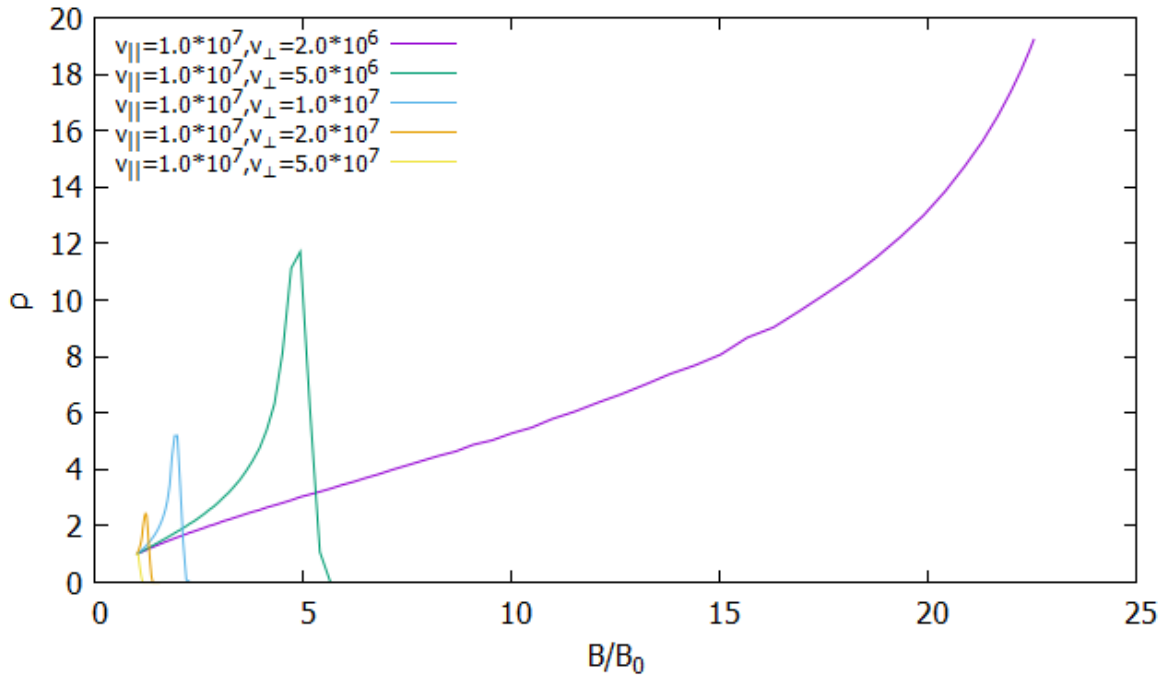


図 4.2: 様々な $(v_{\parallel}, v_{\perp})$ における $\frac{B}{B_0}$ と密度の関係 ($\psi = 0.01$ 上)

る速度分布関数は図 4.4 のようになる。この図は $\frac{v_{\perp}}{v_{\parallel}}$ が大きい粒子は点 A 近傍でバウンスするため、点 A における密度が大きくなることを表している。点 A において速度分布関数をマクスウェル分布とするには、このバウンスの効果を打ち消した上でマクスウェル分布を与える必要があるため、図 4.3 のマクスウェル分布に図 4.4 の逆数をかけた図 4.5 のような速度分布関数によって生成される $(v_{\parallel}, v_{\perp})$ の組を与える必要がある。ここでは特に ($\psi = 0.006$) 上で $r > 0.3(m)$ となる部分のマクロな密度について考察する。(図 4.6) この領域での r と $\frac{B}{B_0}$ の関係は図 4.7 のようになっており、 $\frac{B}{B_0}$ は 1~14 程度まで変化する。このときのマクロな密度は図 4.8 のようになった。この図から、等方的な温度の場合には $\frac{B}{B_0}$ が大きくなる、すなわち r が小さくなるほど密度が増大していくことがわかる。

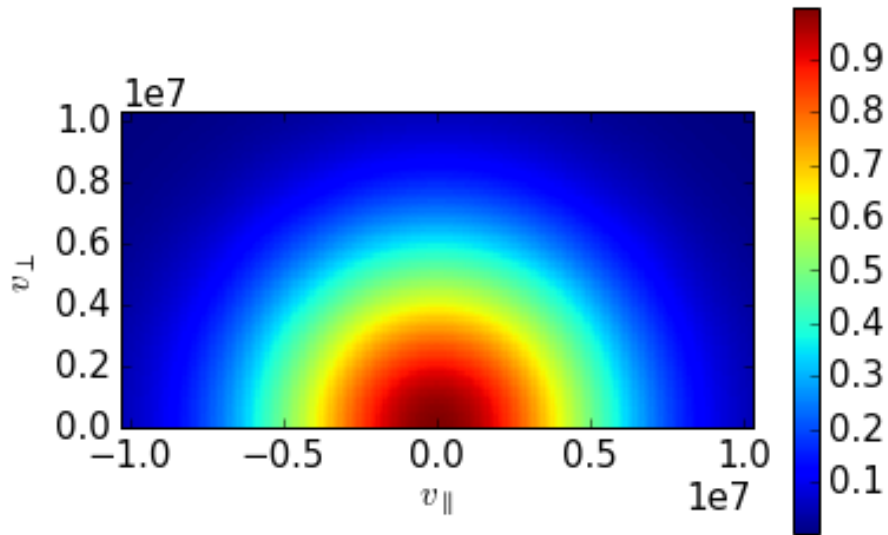


図 4.3: $T_{\parallel} = T_{\perp} = 100(\text{eV})$ のときのマクスウェル分布

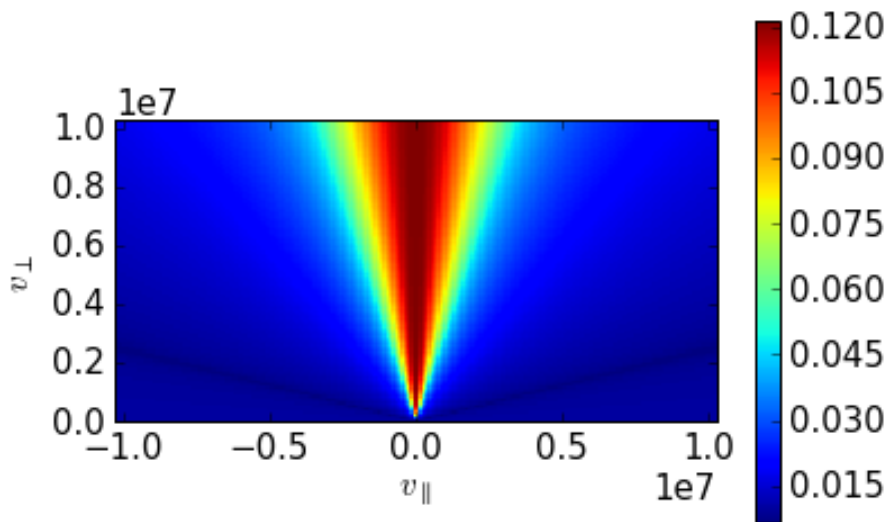


図 4.4: ランダムに $(v_{\parallel}, v_{\perp})$ を与えたときの点 A における速度分布関数

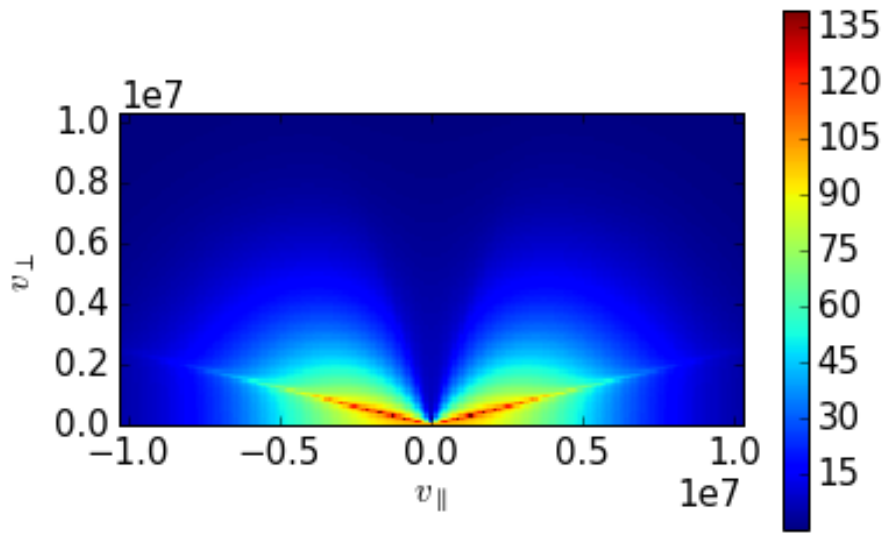


図 4.5: 点 A でマクスウェル分布を与えるためにはこの速度分布関数に従うような $(v_{\parallel}, v_{\perp})$ を生成する必要がある

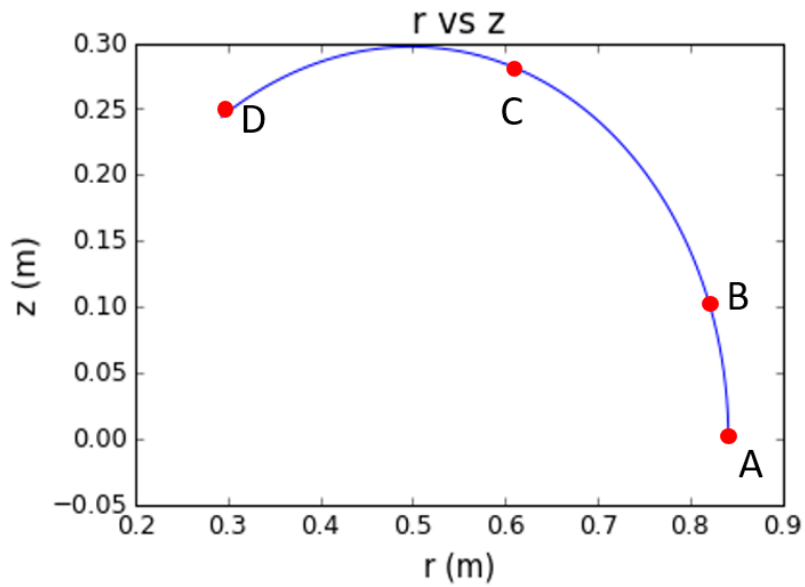


図 4.6: $\psi = 0.006$ 上で $r > 0.3(m)$, $z > 0(m)$ となる部分の軌道図

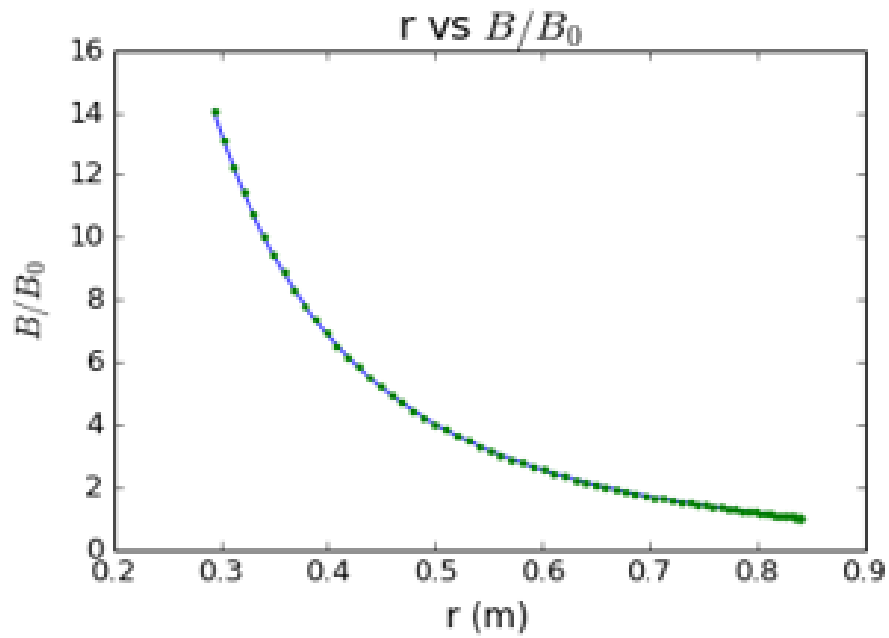


図 4.7: $\psi = 0.006$ における r と $\frac{B}{B_0}$ の関係

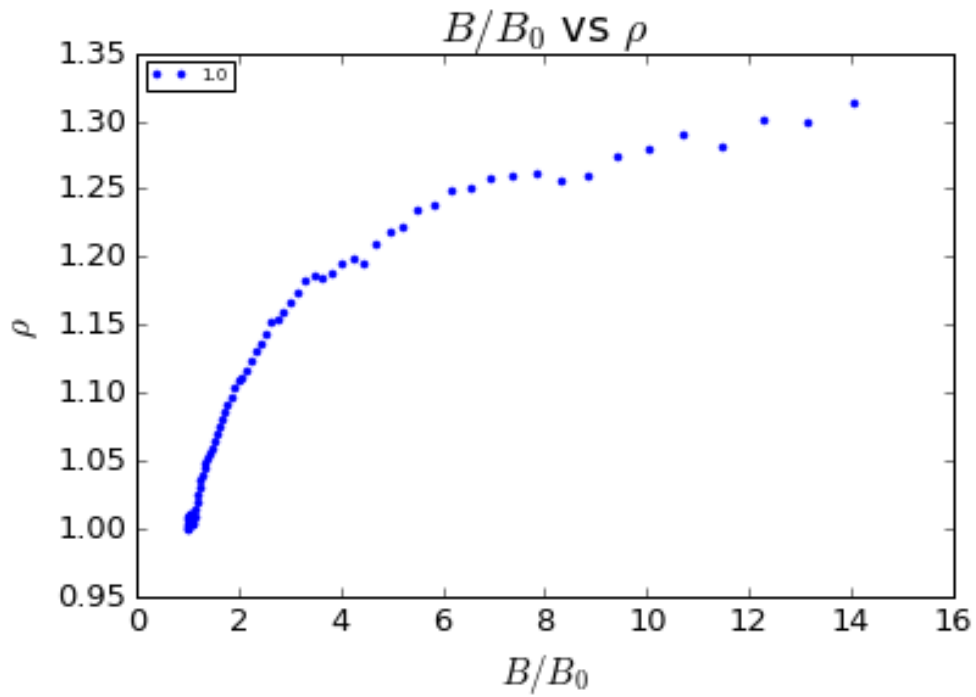


図 4.8: $\psi = 0.006$ における $\frac{B}{B_0}$ と直交座標系での密度の関係

このことは次のように説明される。図 4.8 は直交座標系における密度である。一方で、図 4.9 は磁気座標系における密度であり、この密度については $\frac{B}{B_0}$ が大きくなるほど小さくなっていくことがわかる。また、磁気座標系の密度と直交座標系の密度をつなぐヤコビアンは図 4.10 のようになっている、磁気座標系の密度と直交座標系の密度の間には式 (2.26) のような関係がある。すなわち図 4.9 を図 4.10 で割った後に規格化することによって図 4.8 が得られる。このときに、内側に行くほど磁力線が集まって密度が高くなる効果によって密度が高くなると考えられる。

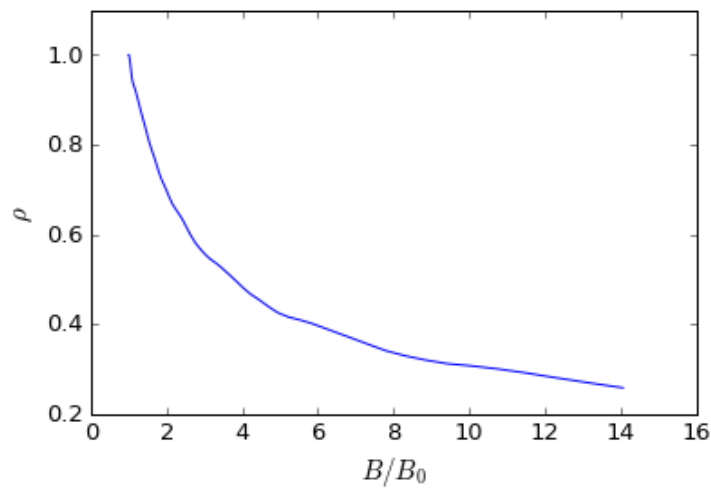


図 4.9: $\psi = 0.006$ における $\frac{B}{B_0}$ と磁気座標系での密度の関係

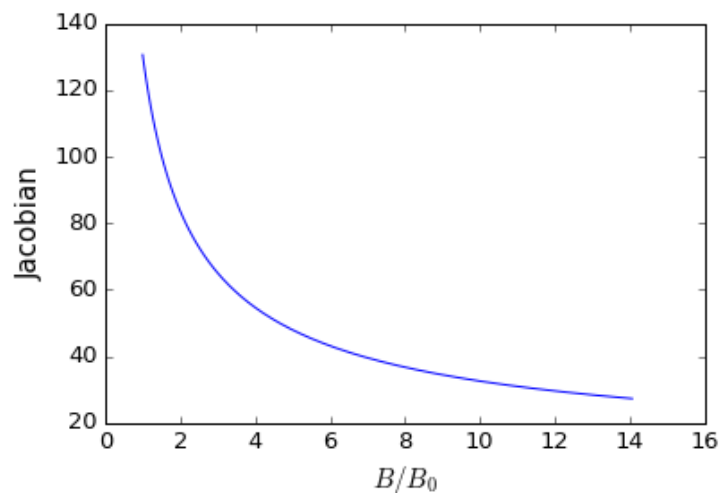


図 4.10: $\psi = 0.006$ における $\frac{B}{B_0}$ とヤコビアンの関係

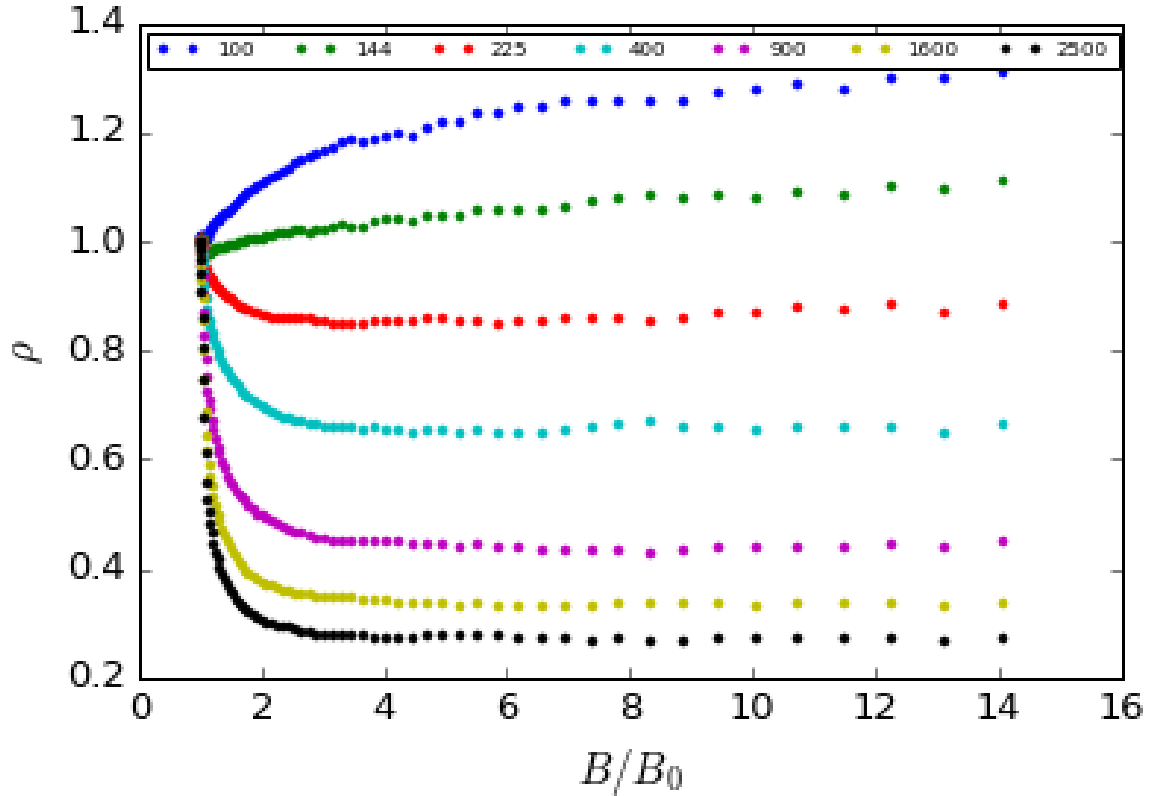


図 4.11: 温度非等方性による $\frac{B}{B_0}$ と密度の関係の変化

4.1.3 平衡状態における温度非等方性の効果

温度が等方的な場合は $\frac{B}{B_0}$ が大きくなるほど密度が大きくなるという結果が得られた。一方で、干渉計によって計測した密度の線積分値の再構成結果などから、 $\frac{B}{B_0}$ が大きくなるほど密度が小さくなるという結果が実験的に得られている。そこで、 $T_{\perp} > T_{\parallel}$ となる温度非等方性を考え、速度非等方性を変化させた場合の $\psi = 0.006$ における $\frac{B}{B_0}$ と円筒座標系での密度の関係について考察する。 $T_{\parallel} = 100(\text{eV})$ と固定し、 $T_{\perp} = 100(\text{eV}), 144(\text{eV}), 225(\text{eV}), 400(\text{eV}), 900(\text{eV}), 1600(\text{eV}), 2500(\text{eV})$ とした場合の $\frac{B}{B_0}$ と密度の関係は図 4.11 のようになった。この結果から、今回取り扱った中では $T_{\perp} = 100(\text{eV}), 144(\text{eV})$ の場合には $\frac{B}{B_0}$ が大きくなるほど密度が上昇していくのに対して、さらに温度非等方性が大きくなると密度が下降していくことがわかる。また、温度非等方性が大きいほど密度の減少の度合いが激しいことがわかる。さらに、 $\frac{B}{B_0}$ が大きくなると、密度の値が一定値に近づくような傾向があることがわかる。

4.2 複数の磁力線上での温度非等方性の効果

ここでは特に図 4.12 のように ψ に関して等間隔にとった 50 本の磁力線上をそれぞれ 100 等分し、その点における密度分布について考える。各磁力線上の $z = 0, r > 0.25(m)$ となる点でマクスウェル分布となるような $(v_{\parallel}, v_{\perp})$ の組を与える。また、各磁力線上での密度の積分値は一定とした。 $T_{\parallel} = 100(eV)$ 、 $T_{\perp} = 100(eV)$ となるような等方的な温度をもつマクスウェル分布を $z=0$ 上で与えたときの密度分布は図 4.13 のようになった。温度が等方的な場合、コイルの内側を通過する粒子が多く、密度が高くなっていることがわかる。また、 $T_{\parallel} = 100(eV)$ と固定し、 $T_{\perp} = 400(eV)$ 、 $T_{\perp} = 900(eV)$ 、 $T_{\perp} = 1600(eV)$ となるように垂直方向の温度が平行方向に比べて大きくなるように非平衡性を与えたところ図 4.14~4.16 のようになった。非等方性が高くなるにつれて磁場によるミラー効果が強くなり、各磁力線上で磁場の最も弱い $z = 0(m), r > 0.4(m)$ 上に存在するようになることがわかる。

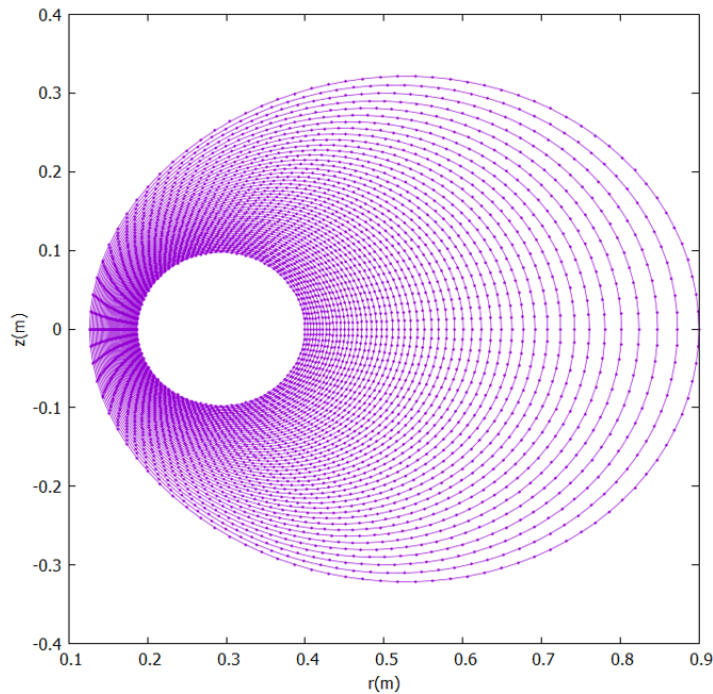


図 4.12: ψ に関して等間隔にとった 50 本の磁力線について 100 等分した点における密度を考える

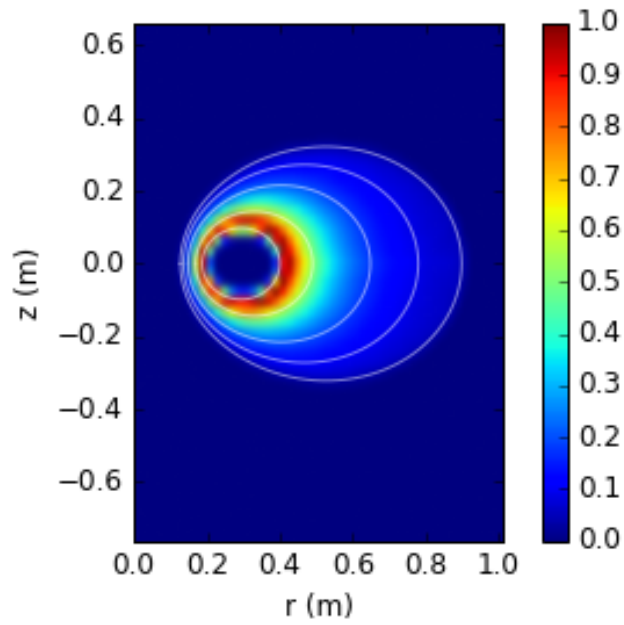


図 4.13: $T_{\parallel} = 100(eV), T_{\perp} = 100(eV)$ のときの密度分布. 最大値で規格化してある。白線は磁力線を表す。

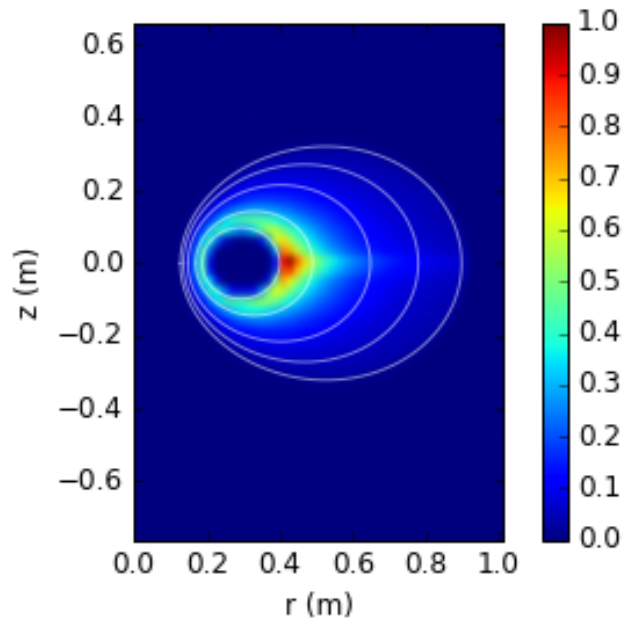


図 4.14: $T_{\parallel} = 100(eV), T_{\perp} = 400(eV)$ のときの密度分布. 最大値で規格化してある。白線は磁力線を表す。

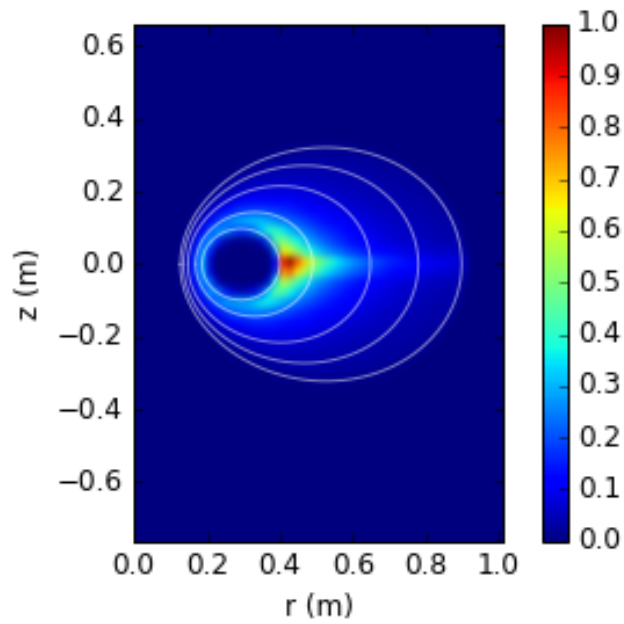


図 4.15: $T_{\parallel} = 100(eV), T_{\perp} = 900(eV)$ のときの密度分布. 最大値で規格化してある。白線は磁力線を表す。

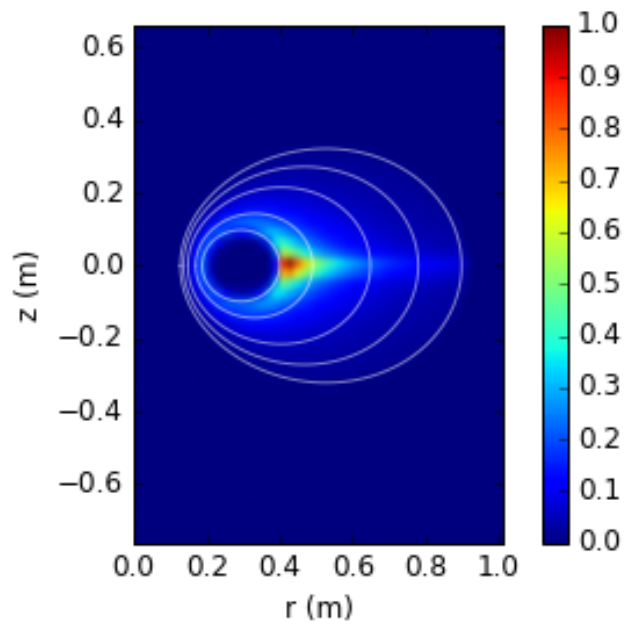


図 4.16: $T_{\parallel} = 100(eV), T_{\perp} = 1600(eV)$ のときの密度分布. 最大値で規格化してある。白線は磁力線を表す。

4.3 速度分布関数の位置ごとの変化

図 4.6 上の 4 点 A~D における速度分布関数の変化を考える。点 A に $T_{\parallel} = 100(eV)$ 、 $T_{\perp} = 100(eV)$ となるような等方的な温度をもつマクスウェル分布を与える。 $z=0$ 上における速度を $(v_{\parallel 0}, v_{\perp 0})$ 、磁場を B_0 とすると、磁場が B となる位置における速度は、ハミルトニアンと磁気モーメントの保存から

$$v_{\parallel} = \sqrt{v_{\parallel 0}^2 + \left(1 - \frac{B}{B_0}\right) v_{\perp 0}^2} \quad (4.4)$$

$$v_{\perp} = \sqrt{\frac{B}{B_0}} v_{\perp 0} \quad (4.5)$$

と与えられる。 $z=0$ 上で図 4.17 のように複数の $(v_{\parallel}, v_{\perp})$ を与え、この点たちがマクスウェル分布を表すような重みをそれぞれの点に与える。このとき、点 A~D における速度分布関数は図 4.18 のようになった。ただし、対称性から $v_{\parallel} > 0, v_{\perp} > 0$ のみを考えている。初期位置である点 A で等方的な分布関数であったにも関わらず、点 B~点 D においては v_{\perp} 方向に大きく歪んだ速度分布関数となっている。これは、ミラー効果によって v_{\perp} が v_{\parallel} に比べて十分に大きい粒子だけが $z=0$ から離れた点に来ていることを表している。

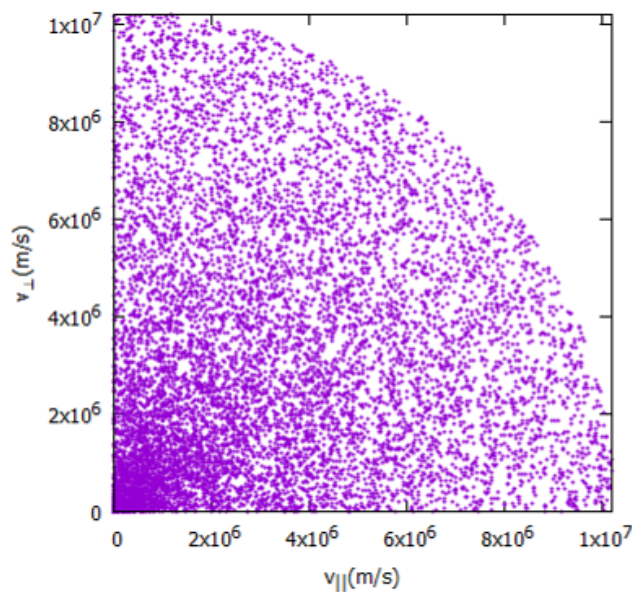


図 4.17: 図 4.6 の点 A に与えた $(v_{\parallel}, v_{\perp})$

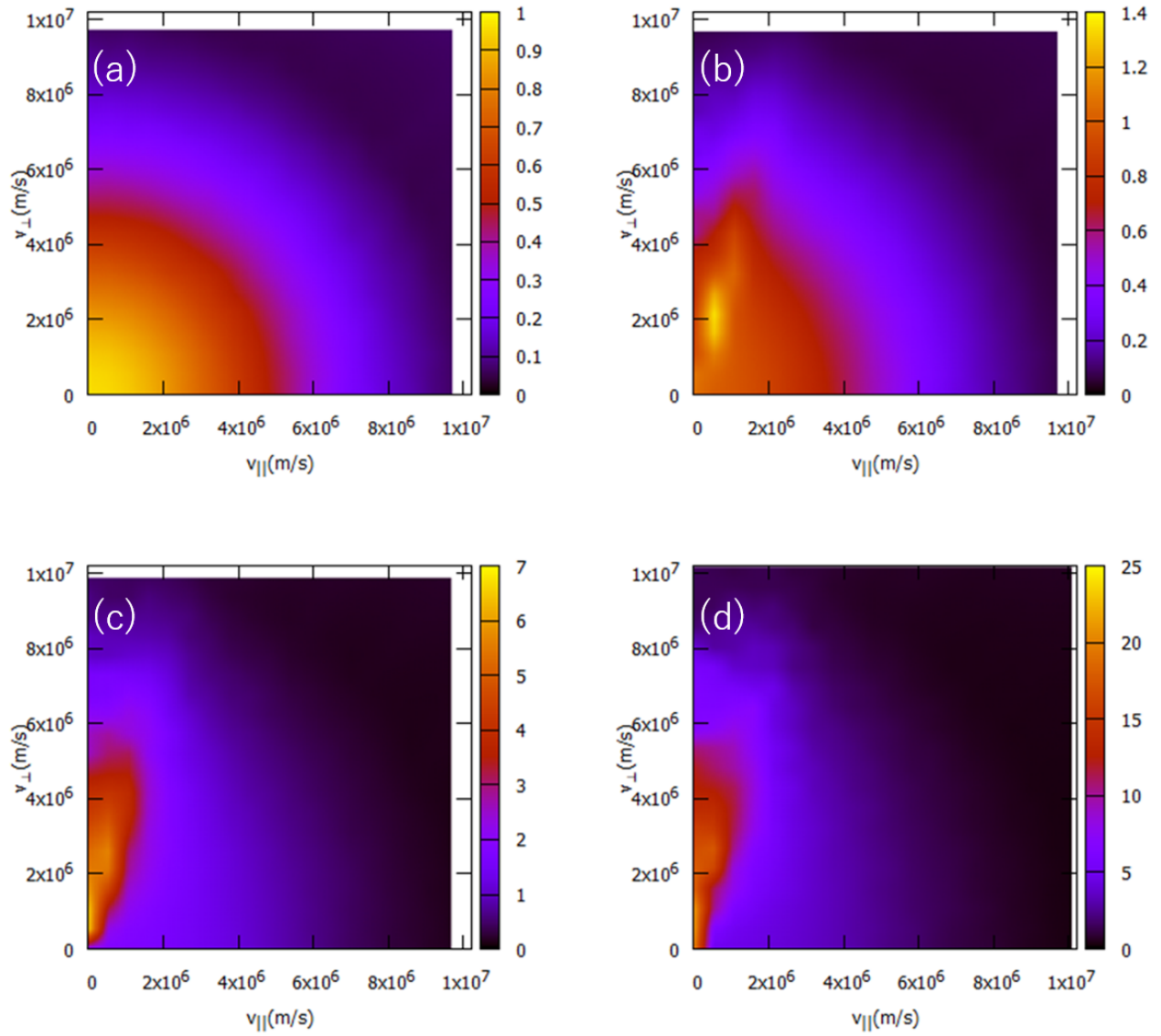


図 4.18: 図 4.6 の点 A,B,C,D における速度分布関数。(a)~(d) がそれぞれ点 A~D に対応する

第 5 章

磁気圏型プラズマの平衡状態における電場の効果

この章では磁気圏型プラズマの平衡状態における電場の効果について述べる。具体的には、第 4 章で述べた非等方的な温度をもつ電子・イオンを初期条件として与え、電子とイオンの非等方性を補償するような平衡電場を求める。

5.1 電子とイオンに温度差がある場合の電場の効果

電子とイオンに温度差がある場合の電場の効果について次の計算条件の下で考察する。

計算条件 1

- ・ $z=0$ における電子の分布を $T_{\parallel} = 100(eV), T_{\perp} = 400(eV)$ のマクスウェル分布とする。
- ・ $z=0$ におけるイオンの分布を $T_{\parallel} = 10(eV), T_{\perp} = 15(eV)$ のマクスウェル分布とする。
- ・ 計算の最初（電場が 0 の状態）における電子の密度の最大値が $1.0 \times 10^{12}(m^{-3})$ とする。
- ・ イオンの密度は電子の総数とイオンの総数が同じになるように与える。

計算条件 1 の下での初期状態の電子密度 n_e , イオン密度 n_i , 密度の差 $n_i - n_e$, 電位 n_e は図 5.1 のようになった。電子の平行方向と垂直方向の温度非等方性が 4 倍、イオンの平行方向と垂直方向の非等方性が 1.5 倍であることから、電子の方が温度非等方性が高く、 $z = 0(m), r > 0.4(m)$ の部分に電子の方がイオンよりも多く集まった分布となり 20(V) 程度の電位をもつ。電子とイオンの間の非平衡性によって生じたこの電位を補償するように

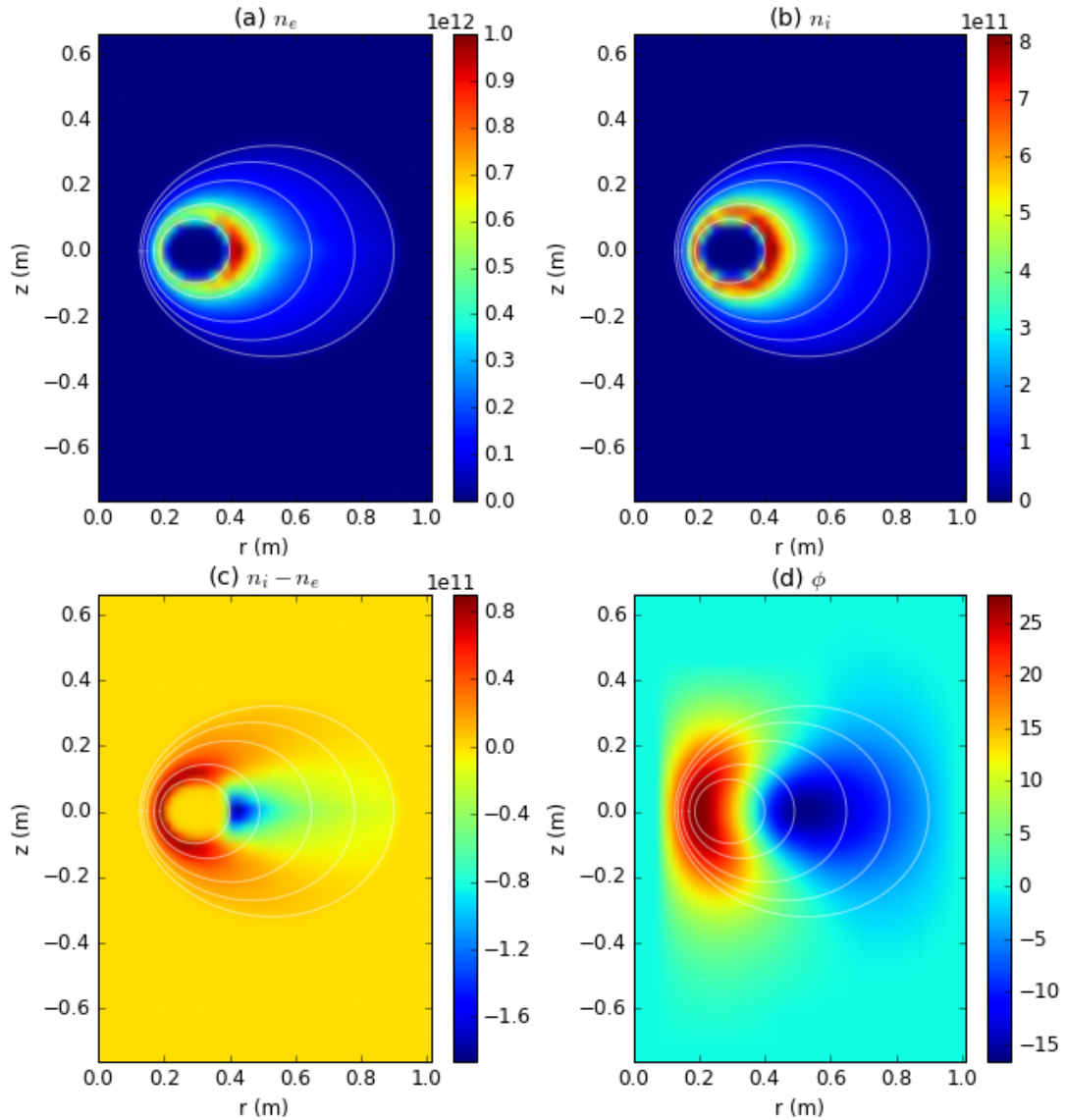


図 5.1: 計算条件 1 の初期状態における (a) 電子密度,(b) イオン密度,(c) 電子密度とイオン密度の差,(d) 電位 (V)

電子分布とイオン分布が変化して得られた平衡状態の電子密度 n_e , イオン密度 n_i , 密度の差 $n_i - n_e$, 電位 ϕ は図 5.2 のようになった。初期条件 (図 5.1) で $0.8 \times 10^{11}(m^{-3})$ 近くあった密度差は平衡時には $1.0 \times 10^{10}(m^{-3})$ 程度まで落ち着き、電位の値も $1(V)$ より小さくなっている。初期状態と平衡状態の間の電子密度・イオン密度の変化を図 5.3 に示す。この図から電子は浮上コイルの内側へ、イオンは浮上コイルの外側へ移動していることがわかる。このことは図 5.1 の電位構造からも推測される。また図 5.3 において、イオンの密度変化の最大値は $1.8 \times 10^{11}(m^{-3})$ であり、電子の密度変化の最大値 $0.9 \times 10^{10}(m^{-3})$ の 20 倍程度になっている。これは計算条件 1 において、電子の温度をイオンの温度よりも高く

設定したためである。温度が高いために電子はイオンに比べて比較的電場の効果を受けにくく、主にイオンの密度分布の変化によって電位を抑えている。つまり、電子とイオンの間の温度差が大きい場合、 $z=0$ での速度分布の違いによる非平衡性は、温度の低い方の粒子の密度分布変化によって補償されると結論付けられる。

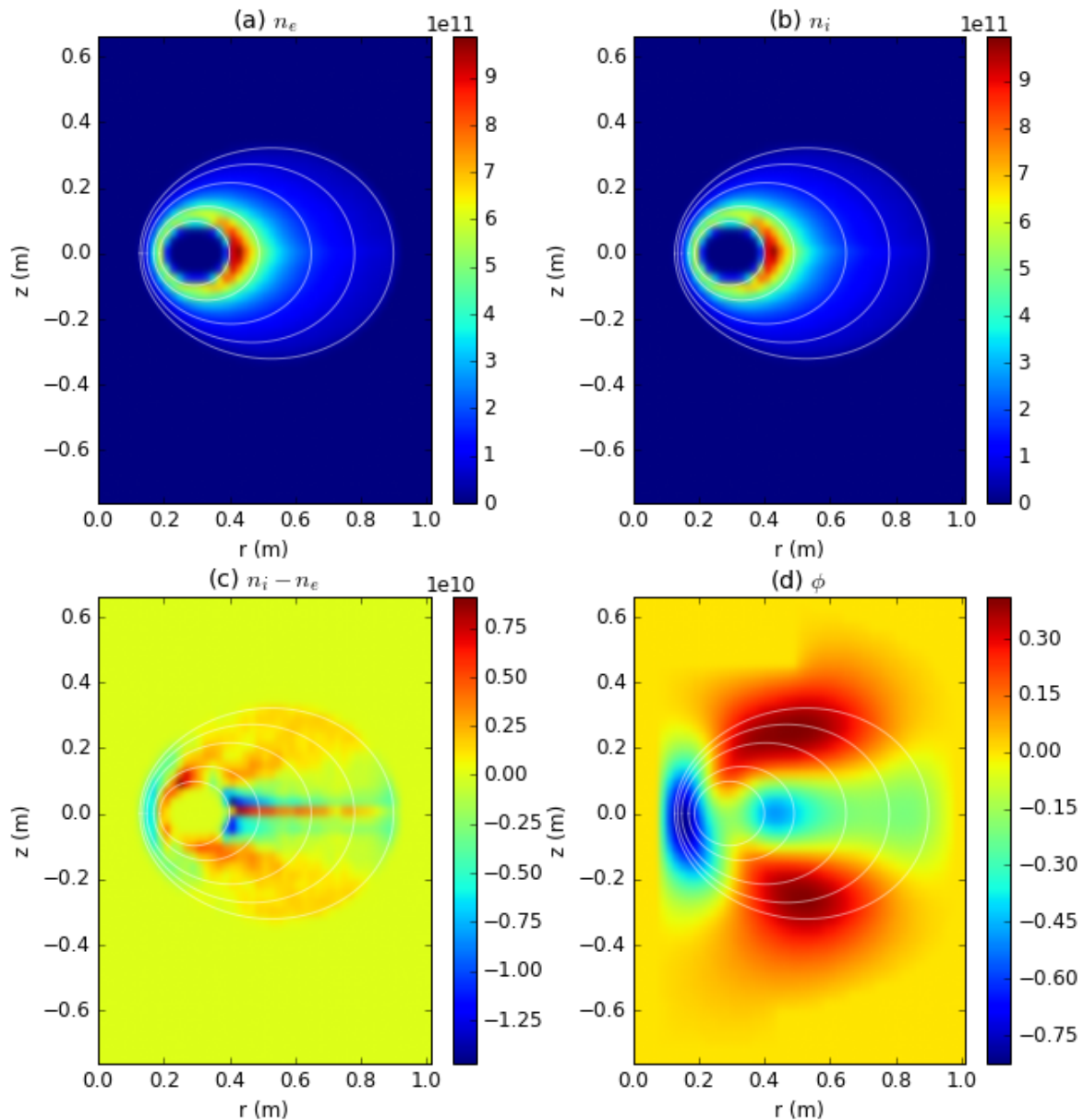


図 5.2: 計算条件 1 の平衡状態における (a) 電子密度,(b) イオン密度,(c) 電子密度とイオン密度の差,(d) 電位 (V)

また、この計算における電位の収束について述べる。反復計算の第 i ステップにおける電位と第 $i+1$ ステップにおける電位の差の最大値を $\Delta\phi_i$ と定義し、また第 i ステップにおける

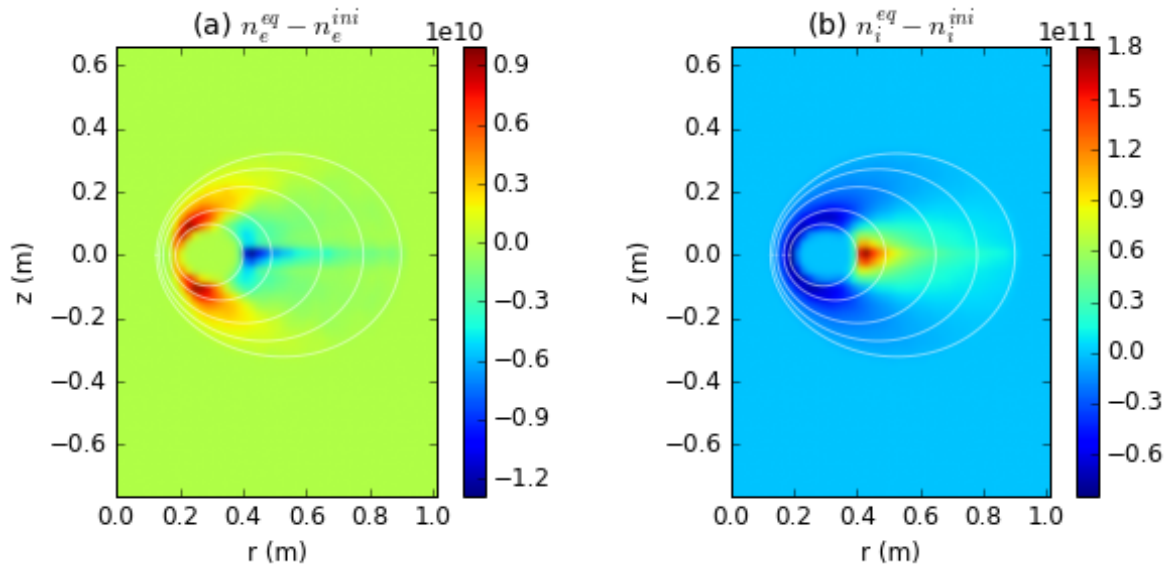


図 5.3: 計算条件 1 の初期状態と平衡状態における (a) 電子と (b) イオンの密度分布の変化

電位の最大値を $\phi_{max,i}$ と定義する。このとき、第 i ステップと第 $i+1$ ステップにおける電位の変化量の指標を $\epsilon = \frac{\Delta\phi}{\phi_{max,i}}$ と定義する。計算条件 1 における ϵ の反復毎の変化は図 5.4 のようになり、電位の最大値・最小値の変化は図 5.5 のようになっていて確かに収束に向かっている。一方で、ハミルトニアン分布に広がりをもたせなかった場合の電位の最大値の変化は図 5.6 のようになっており、数値的な不安定性から非常に大きな電位が発生して計算が破綻していることがわかる。このことから、ハミルトニアン分布に広がりをもたせる手法によって数値的に安定することが確認される。

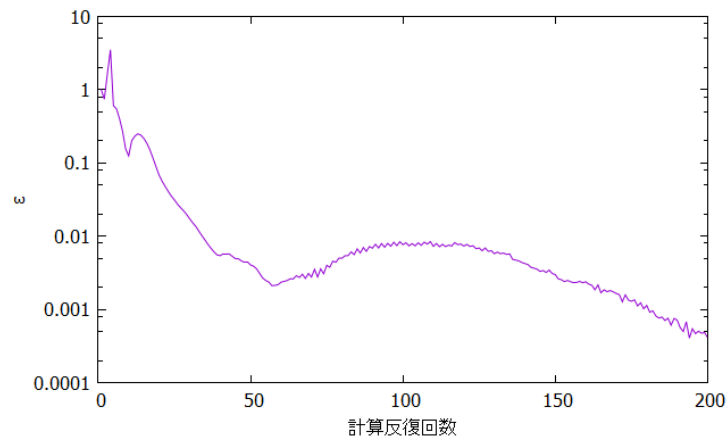


図 5.4: $\epsilon = \frac{\Delta\phi_i}{\phi_{max,i}}$ の最大値・最小値の反復毎の変化

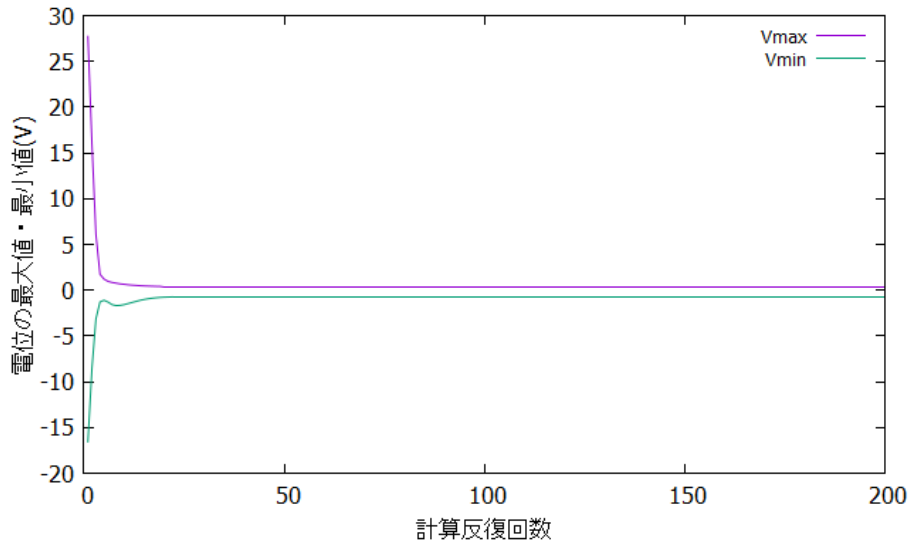


図 5.5: 電位の最大値・最小値の反復毎の変化

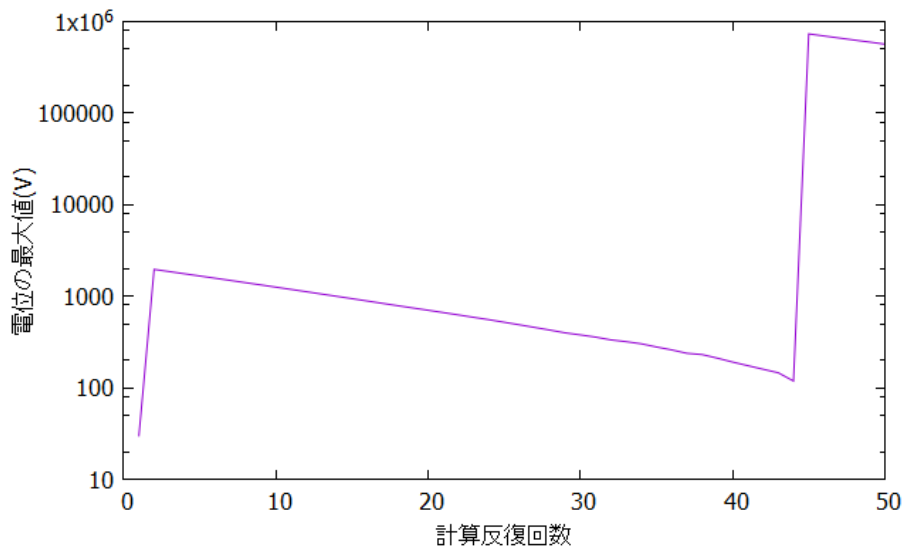


図 5.6: ハミルトニアン分布に広がりをもたせないときの電位の最大値の反復毎の変化

5.2 電子とイオンの温度が近い場合の電場の効果

電子とイオンの温度差が小さい場合の電場の効果について次の計算条件の下で考察する。

計算条件 2

- ・ $z=0$ における電子の分布を $T_{\parallel} = 10(\text{eV}), T_{\perp} = 40(\text{eV})$ のマクスウェル分布とする。
- ・ $z=0$ におけるイオンの分布を $T_{\parallel} = 10(\text{eV}), T_{\perp} = 15(\text{eV})$ のマクスウェル分布とする。
- ・ 計算の最初 (電場が 0 の状態) における電子の密度の最大値が $1.0 \times 10^{12}(\text{m}^{-3})$ とする。
- ・ イオンの密度は電子の総数とイオンの総数が同じになるように与える。

計算条件 2 の下での初期状態の電子密度 n_e , イオン密度 n_i , 密度の差 $n_i - n_e$, 電位 ϕ_e は図 5.7 のようになった。計算条件 1 と比べて電子に与えた平行方向の温度と垂直方向の温度を $1/10$ にした。二つの温度の比は変化させていないので、図 5.7 における電子密度は図 5.1 における電子密度とほとんど変わらず、電位についても計算条件 1 と同様に $20(\text{V})$ 程度の電位が生成している。平衡状態の電子密度 n_e , イオン密度 n_i , 密度の差 $n_i - n_e$, 電位 ϕ_e は図 5.8 のようになった。計算条件 1 のときの平衡状態である図 5.2 と電位について比較すると値に多少の差はあるものの、全体の形状としては似通った結果となった。また、初期状態と平衡状態の間の電子密度・イオン密度の変化を図 5.9 に示す。計算条件 1 のときと同様に電子は浮上コイルの内側へ、イオンは浮上コイルの外側へ移動していることがわかる。図 5.9 において、イオンの密度変化の最大値は $1.5 \times 10^{11}(\text{m}^{-3})$ であり、電子の密度変化の最大値 $2.4 \times 10^{10}(\text{m}^{-3})$ の 6 倍程度になっている。計算条件 1 ではイオンの密度変化の最大値は $1.8 \times 10^{11}(\text{m}^{-3})$ であり、電子の密度変化の最大値 $0.9 \times 10^{10}(\text{m}^{-3})$ の 20 倍程度であったことを考えると、イオンの密度変化の最大値は減少し電子の密度変化の最大値は増加している。ただし、垂直方向の温度については電子よりもイオンの方が小さいため、依然としてイオンの密度変化の最大値は電子の密度変化の最大値よりも大きい。つまり、電子とイオンの間の温度差が小さくなっていくと、 $z=0$ での速度分布の違いによる非平衡性は、2 つの粒子の密度分布変化によって補償されるようになってくると結論付けられる。

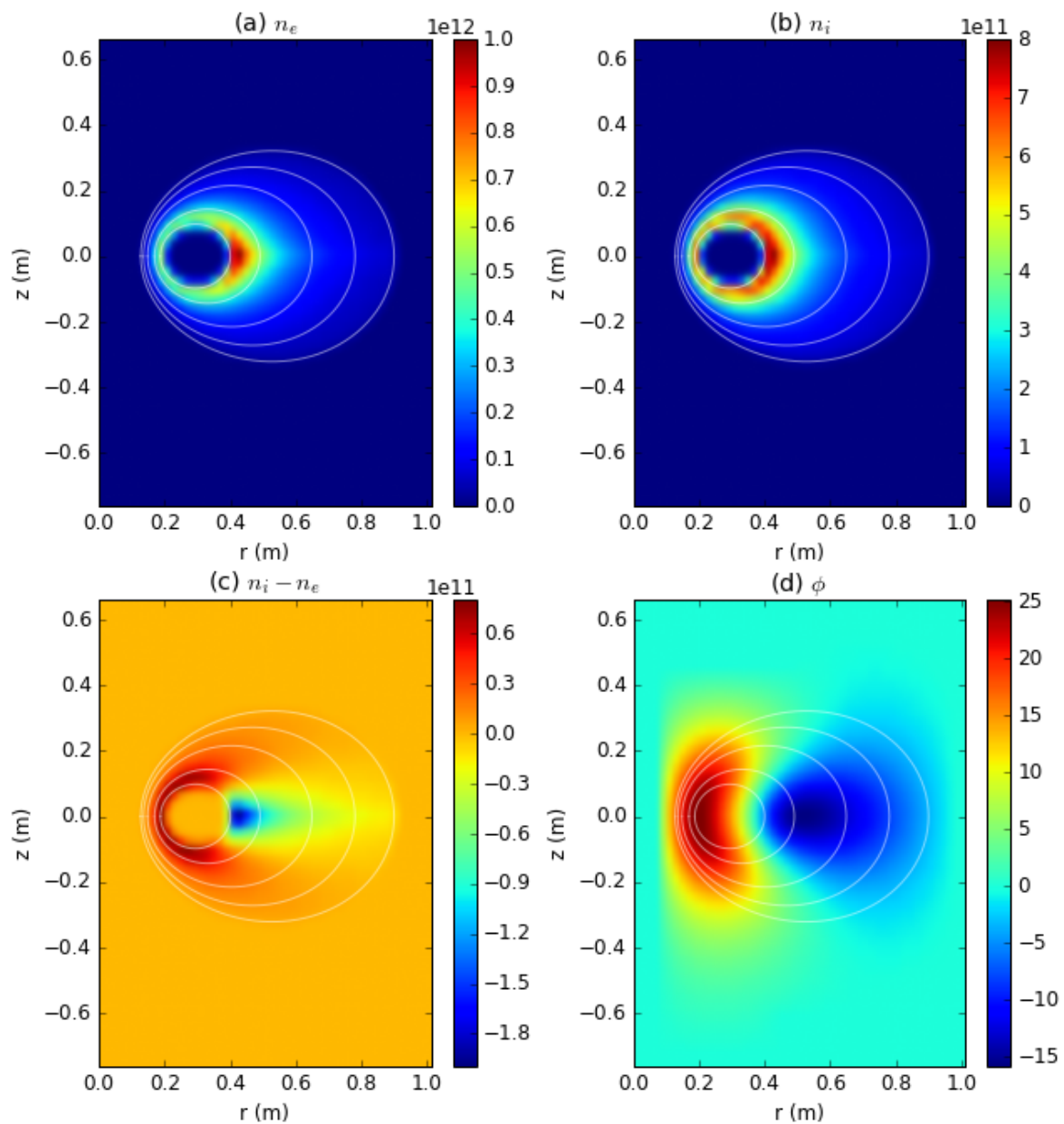


図 5.7: 計算条件 2 の初期状態における (a) 電子密度,(b) イオン密度,(c) 電子密度とイオン密度の差,(d) 電位 (V)

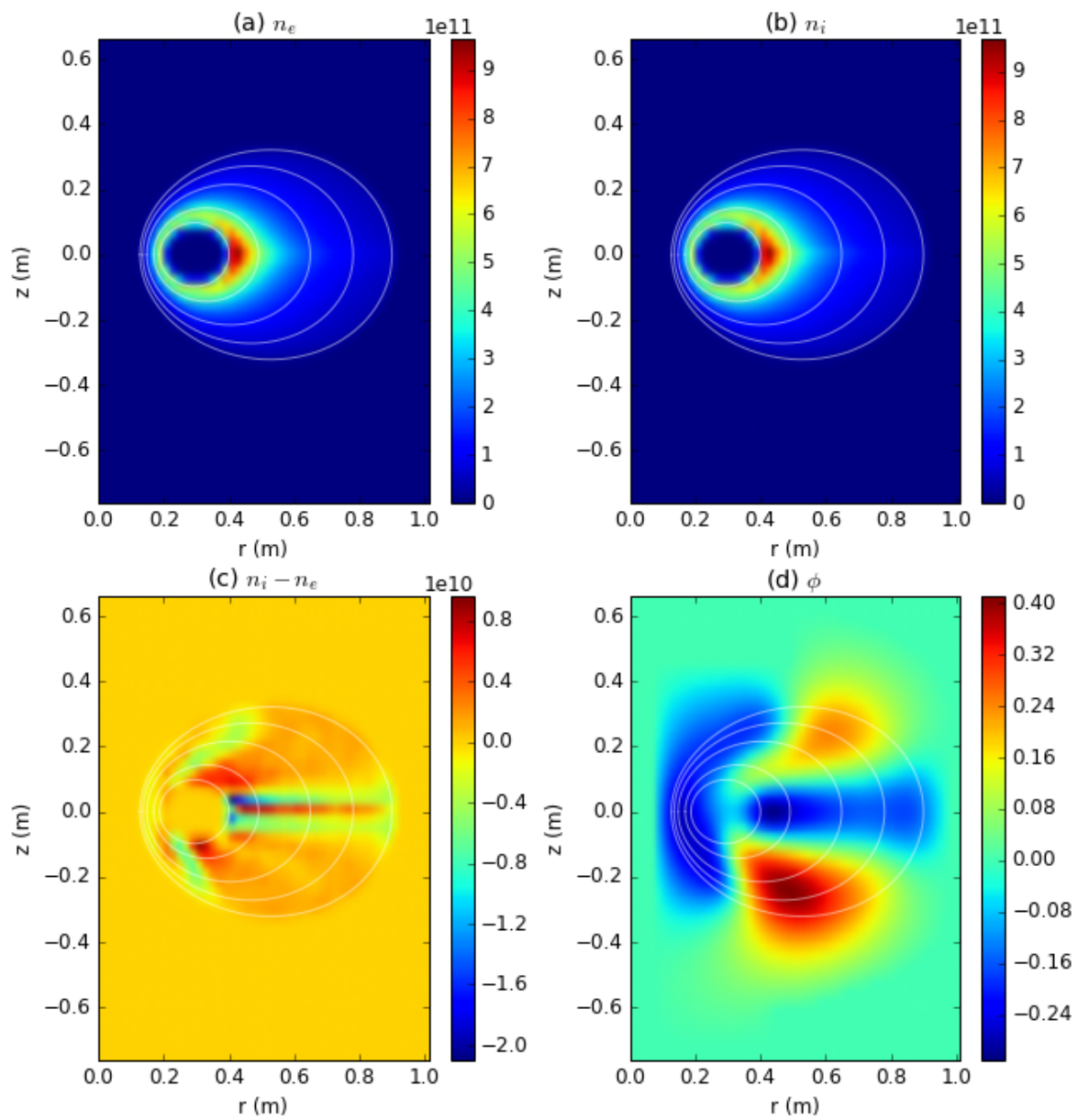


図 5.8: 計算条件 2 の平衡状態における (a) 電子密度,(b) イオン密度,(c) 電子密度とイオン密度の差,(d) 電位 (V)

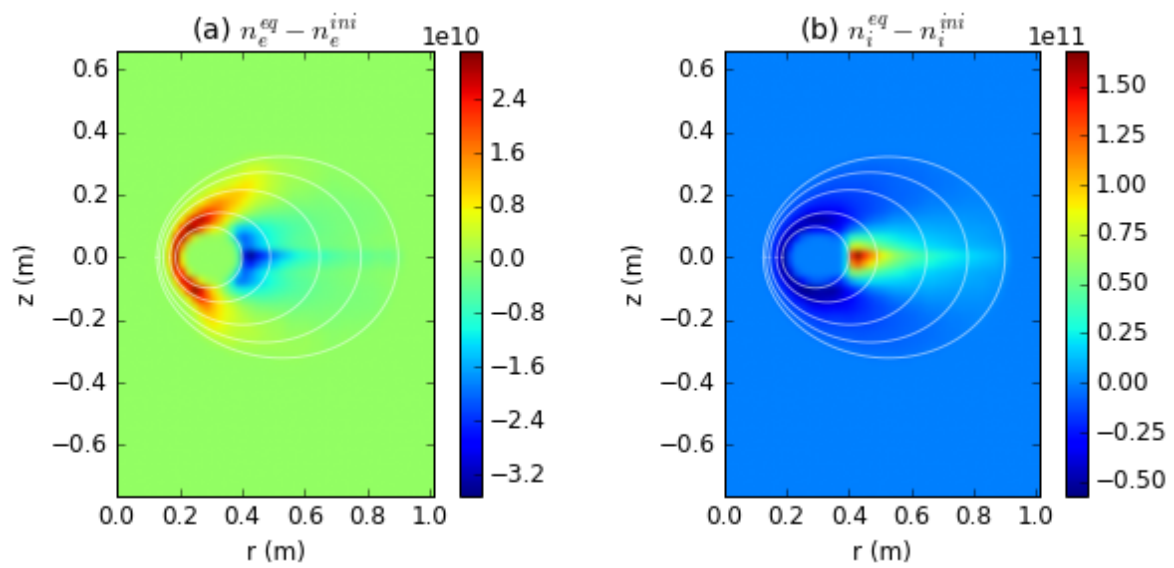


図 5.9: 計算条件 2 の初期状態と平衡状態における (a) 電子と (b) イオンの密度分布の変化

第 6 章

結論

磁気圏型プラズマの平衡状態において温度非等方性と電場がもつ効果に関する研究を行った。磁気圏における荷電粒子の運動の階層性を利用して最もマイクロなジャイロ運動を平均化したハミルトニアンを用いて、温度非等方性と電場の効果を考慮することのできる平衡モデルを構築した。平衡モデルの妥当性検証によって以下を確認した。

- 磁場の補間とジャイロ運動の平均化によって計算速度が大幅に向上した。
- 磁気モーメントが保存するエネルギーのオーダーが電子の場合で $10(keV)$ 、イオンの場合で $10(eV)$ であった。
- ハミルトニアンの分布に広がりを持たせることによって、平衡計算が安定化した。
- また電位計算が正しく行われていることを理論解と比較して確認した。

この平衡モデルを用いて温度非等方性を变化させたときの密度について考察した。 $z=0$ において非等方な温度をもつマクスウェル分布を与えたとき、温度非等方性が $T_{\perp} > T_{\parallel}$ となる方向に強くなるほど、磁場の弱い $z = 0(m), r > 0.4(m)$ 付近に密度が集中することが確認された。また、 $z=0$ で等方的なマクスウェル分布を与えた場合の磁力線上の速度分布関数は、 $z=0$ から離れるほど v_{\perp} 方向に歪むことが確認された。

また、この平衡モデルによって、電子とイオンが異なる温度非等方性を持つときに電場を介してその非平衡性を補償する現象を取り扱えるようになった。電子とイオンが温度が大きく異なる場合、温度の低い粒子が電場の影響によって密度分布を変えることによって平衡状態へ至ることが示され、また温度差が小さくなると電子密度分布・イオン密度分布が共に変化するようになることが確認された。

付録 本研究で使用した数値解法

[22], [23] に従って、本研究で使用した数値解法について述べる。

磁場計算における数値積分

本研究では磁場計算における式 (2.3) をシンプソンの公式を用いて計算している。シンプソンの公式では、十分小さい積分範囲 $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ に対して、 $x_i = \frac{x_{i-1} + x_{i+1}}{2}$ を定義し、ある関数 $f(x)$ 上の 3 点 $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$, $(x_i, f(x_i))$, $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$ を 2 次式で補間することによって面積を求める。このようにして得られた小さい積分範囲を足し合わせることで、積分範囲 $[x_0, x_n]$ における $f(x)$ の積分が以下のように得られる。

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx = \frac{h}{3} (f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) \dots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n))$$

ただし、 n は偶数であり、 $h = x_i - x_{i-1}$ である。

ハミルトン運動方程式の数値解法

本研究ではハミルトン運動方程式 (式 (1.20)) を解くために 4 次のルンゲクッタ法を用いている。以下ではルンゲクッタ法のアルゴリズムについての説明を行う。次のような常微分方程式を考える。

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

x という座標について数値計算上では連続的に計算することができないので、刻み幅 h を設定する。刻み幅 h 後の関数値を予測する最も簡単な方法として、オイラー法が挙げられる。オイラー法はこの式の左辺を 1 次の差分で置き換える手法であり、 $y^n = y(x^n)$, $y^{n+1} = y(x^n + h)$ とすると、

$$\begin{aligned} \frac{y^{n+1} - y^n}{h} &= f(x^n, y^n) \\ y^{n+1} &= y^n + f(x^n, y^n)h \end{aligned}$$

となる。 $y(x^n + h)$ をテイラー展開することで

$$\begin{aligned} y(x^n + h) &= y(x^n) + f(x^n, y^n)h + \frac{y''(x^n)}{2}h^2 + \dots \\ y(x^n + h) - y^{n+1} &= \frac{y''(x^n)}{2}h^2 + \dots \end{aligned}$$

となるため、オイラー法の誤差は h^2 に比例する。ルンゲクッタ法では、オイラー法から進めた関数値を用いることによって、微係数の値を改良する。2 次のルンゲクッタ法では

$$\begin{aligned}k_1 &= f(x^n, y^n) \\k_2 &= f(x^n + h, y + hk_1) \\y^{n+1} &= y^n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2)\end{aligned}$$

という計算を行っている。この計算では元の微係数 $f(x^n, y^n)$ と、オイラー法によって1 ステップ分だけ先へ進めた関数値 $y + hk_1$ を用いて求めた微係数 $f(x^n + h, y + hk_1)$ の平均を取ることによって y を更新している。2 次のルンゲクッタ法による誤差は h^3 に比例して小さくなる。この手法をさらに改良して

$$\begin{aligned}k_1 &= f(x^n, y^n) \\k_2 &= f(x^n + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}k_1) \\k_3 &= f(x^n + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}k_2) \\k_4 &= f(x^n + h, y + hk_3) \\y^{n+1} &= y^n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)\end{aligned}$$

とした計算手法が4 次のルンゲクッタ法であり、誤差は h^5 に比例して小さくなる。本研究ではこの手法を用いている。また、式 (1.20) 内の偏微分 $\frac{\partial B}{\partial l}$ と $\frac{\partial \phi}{\partial l}$ は中心差分を用いて計算している。

Poisson 方程式の数値解法

本研究では円筒座標系における Poisson 方程式

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = -\frac{e(n_i - n_e)}{\epsilon_0}$$

を解く。境界条件として RT-1 装置の真空壁を用いるため、複雑な境界条件を取り扱える差分法を用いる。式 (2.28) の右辺を $f_{i,j}$ と書くことにして差分化すると、

$$\frac{\phi_{i+1,j} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i-1,j}}{(\Delta r)^2} + \frac{1}{r} \frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j}}{2\Delta r} + \frac{\phi_{i,j+1} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i,j-1}}{(\Delta z)^2} = f_{i,j}$$

となる。本研究ではこの差分式を SOR(Successive Over-Relaxation) 法によって解いている。 $i = 0$ を $r = 0(m)$ の地点と定義し $r = i\Delta r$ として上式を整理すると、

$$a_{i,j}\phi_{i,j} = b_{i,j}\phi_{i+1,j} + c_{i,j}\phi_{i-1,j} + d_{i,j}\phi_{i,j+1} + e_{i,j}\phi_{i,j-1} - f_{i,j}$$

と変形できる。ただし、

$$\begin{aligned}
 a_{i,j} &= 2 \left(\frac{1}{(\Delta r)^2} + \frac{1}{(\Delta z)^2} \right) \\
 b_{i,j} &= \frac{1}{(\Delta r)^2} + \frac{1}{2i(\Delta r)^2} \\
 c_{i,j} &= \frac{1}{(\Delta r)^2} - \frac{1}{2i(\Delta z)^2} \\
 d_{i,j} &= e_{i,j} = \frac{1}{(\Delta z)^2}
 \end{aligned}$$

であり、これらは定数である、すなわち、 (i, j) の周りの 4 点における ϕ の値と (i, j) における $f_{i,j}$ がわかれば $\phi_{i,j}$ が計算できることを示している。ただし、 (i, j) にあたる位置が境界である場合には計算を行わず、境界条件として与えた $\phi_{i,j} = 0$ を保持する。今、 $0 \leq i \leq n_r, 0 \leq j \leq n_z$ とし、 $(i, j) = (0, 0), (1, 0), (2, 0) \dots (n_r, 0), (0, 1), (1, 1) \dots (n_r - 1, n_z), (n_r, n_z)$ の順に計算する場合を考える。全ての (i, j) についてこの計算を行うことを 1 ステップと呼ぶことにする。第 k ステップにおける $\phi_{i,j}$ の値を $\phi_{i,j}^k$ と書くことにし、この順番で計算した結果として得られる $\phi_{i,j}$ を一時的に $\phi'_{i,j}$ と書くことにすると

$$a_{i,j} \phi'_{i,j} = b_{i,j} \phi_{i+1,j}^{k-1} + c_{i,j} \phi_{i-1,j}^k + d_{i,j} \phi_{i,j+1}^{k-1} + e_{i,j} \phi_{i,j-1}^k - f_{i,j}$$

となる。このとき、加速係数 ω を用いて第 k ステップにおける $\phi_{i,j}$ の値を

$$\phi_{i,j}^k = \phi_{i,j}^{k-1} + \omega(\phi'_{i,j} - \phi_{i,j}^{k-1})$$

とする。通常、 $1 < \omega < 2$ となる値を用い、本研究では $\omega = 1.7$ としている。また、計算の収束判定は、ステップ間における電位の最大変化量を電位の最大値で割った値が 1.0×10^{-8} を下回った場合とした。

謝辞

本論文は東京大学新領域創成科学研究科先端エネルギー工学専攻の修士論文としてまとめたものです。

本研究を進めるにあたり様々なご指導を頂きました吉田善章教授に深く感謝致します。研究が行き詰った際に多くの助言をいただけたことで本論文を形にすることができました。西浦正樹准教授にはミーティングや発表練習の際に多くのご指摘をいただいたほか、核融合科学研究所への視察等などの貴重な経験をさせていただきました。釧持尚輝助教授と川面洋平助教授には最も年齢の近い先生方として学生寄りの助言をいただきました。最後に、吉田・西浦研究室の先輩・後輩の皆様、そして同期の管田君と過ごしたこの2年間の研究生生活はかけがえのないものとなりました。ここに感謝御礼を申し上げ。謝辞とさせていただきます。

参考文献

- [1] J.A. Van Allen, G.H. Ludwig, E.C. Ray, *et al.*, Observation of high intensity radiation by satellites 1958 alpha and gamma. *Jet Propulsion* 28, 588 (1958)
- [2] S.M. Krimigis, T.P. Armstrong, W.I. Asford, *et al.*, Hot Plasma in Environment at Jupiter: Voyager 2 Results. *Science* 206(4421):997-84 (1979)
- [3] A. Hasegawa, *Comments Plasma Phys. Controlled Fusion* 11, 147 (1987)
- [4] A. Hasegawa, L. Chen, and M. E. Mauel, *Nucl. Fusion*, 30, 2405 (1990)
- [5] Z. Yoshida, Y. Ogawa, J. Morikawa, *et al.*, First Plasma in RT-1 Device. *Plasma and Fusion Research: Rapid Communications* 1 008 (2006)
- [6] Y. Kawazura, Z. Yoshida, M. Nishiura, *et al.*, Observation of particle acceleration in laboratory magnetosphere. *Physics of Plasmas* 22, 112503 (2015).
- [7] M. Nishiura, *et al.*, *Nucl. Fusion* 55, 053019 (2015)
- [8] R. C. Olsen, S. D. Shawhan, D. L. Gallagher, *et al.*, Plasma Observations at the Earth's Magnetic Equator, *J. Geophys. Res.* 92, 2385-2407, (1987).
- [9] A. M. Persoon, D. A. Gurnett, O. Santolík, *et al.*, A diffusive equilibrium model for the plasma density in Saturn's magnetosphere, *J. Geophys. Res.* 114 A0421 (2009).
- [10] H. Grad and H. Rubin, in *Second United Nations Conference on the Peaceful Uses of Atomic Energy Vol. 31 (Genova, 1958)*, 190
- [11] 矢野善久, 東京大学大学院博士論文 (2010)
- [12] H. Saitoh, Y. Yano, Z. Yoshida, *et al.*, Observation of a new high- β and high-density state of a magnetospheric plasma in RT-1. *Physics of Plasmas* 21, 082511 (2014).
- [13] 中塚正崇, 東京大学大学院修士論文 (2017)
- [14] 小野高幸, 三好由純 「現代地球科学入門シリーズ 2 太陽地球圏」, 共立出版 (2012).

- [15] Z.Yoshida,S.M.Mahajan, Self-organization in foliated phase space: Construction of a scale hierarchy by adiabatic invariants of magnetized particles Prog. Theor. Exp. Phys. 073J71(2014)
- [16] N.Sato,Z.Yoshida, A stochastic model of inward diffusion magnetospheric plasmas. J.Phys.A: Math.Theor.488 205501(2015)
- [17] Y.Ushida,Y.Kawazura,N.Sato,Z.Yoshida, Inward diffusion and acceleration of particles driven by turbulent fluctuations in magnetosphere. Physics of Plasmas 23, 114501 (2016)
- [18] 畑浩之, 「基幹講座 物理学 解析力学」, 東京図書 (2014).
- [19] V.I. アーノルド, 「古典力学の数学的方法 (安藤韶一・蟹江幸博・丹羽敏雄訳)」, 岩波書店 (1980).
- [20] 砂川重信, 「物理テキストシリーズ 4 電磁気学」, 岩波書店 (1977).
- [21] C. Maple, Geometric design and space planning using the marching squares and marching cube algorithms , IEEE Computer Society, International conference on geometric modelling and graphics, pp.9095, (2003).
- [22] 牛島省, 「数値計算のための Fortran90/95 プログラミング入門」, 森北出版株式会社 (2007).
- [23] 田口俊弘, 「Fortran ハンドブック」, 技術評論社 (2015)

学会発表

1. 白幡亘佑, 吉田善章, ” 粒子シミュレーションによる磁気圏プラズマ中の電場構造の研究”, 日本物理学会第 72 回年次大会, 17aC33-2, 大阪大学 (2017.03.17)
2. 白幡亘佑, 吉田善章, ” 粒子シミュレーションを用いた磁気圏プラズマにおける平衡電場計算”, Plasma Conference 2017, 21P-03, 姫路商工会議所 (2017.11.21)
3. (発表予定) 白幡亘佑, 吉田善章, ” 非等方性をもつ磁気圏プラズマの運動論的平衡状態”, 日本物理学会第 73 回年次大会, 23aK609-3, 東京理科大学 (2018.03.23)