弾性剛性と幾何剛性を用いた座屈固有値問題の縮約による
個材座屈荷重の検出法とその最適化

Extraction and Optimization of Individual Element Buckling Loads
Condensation of the Buckling Eigenvalue Problem
Using Elastic stiffness and Geometric stiffness

学籍番号　47-156805
氏　名　堤　千春(Tsutsumi, Chiharu)
指導教員　佐藤　淳　准教授

1. 序

1.1 背景と目的

小断面部材を用いた架構では,降伏時に座屈が大きな影響を与える.そこで,架構中の部材の座屈耐力を適切に評価する必要がある.

座屈解析手法の一つ線形座屈解析は,構造全体系の固有値解析であり,そこから個材の座屈耐力を簡易な手法で安全側に評価することは可能だが,軸圧縮力の小さい部材等で過小評価となる.そこで,この対策として,高次固有値を用いた手法[2]等が提案されているが,架構形状が限定的である等の問題点を残している.

本研究では,構造全体系の座屈固有値問題を縮約することで,部材ごとの固有値(以後,個材固有値)算出し,部材の座屈耐力を評価する手法を提案する.そして,個材固有値の座屈荷重倍率としての妥当性や傾向を考察する.さらに個材座屈耐力の分布をもとに座屈に対する最適化を行う手法を探る.なお,縮約方法は朝原ら[1]によって提案されているが,問題点が指摘されているため縮約法の改良から行う.

1.2 現行の座屈設計法とその問題点

現行の線形座屈解析では,構造全体系の弾性剛性$[K_E]$と幾何剛性$[K_G]$からなる固有値問題(式 1.1)を解き,座屈荷重倍率 λ,座屈モード$\{U\}$を求め,ここで得られた λ と部材軸力 N を用いて,部材の座屈耐力N_{cr}を式(1.2)から得る.

$$[K_E]\{U\}=\lambda[K_G]\{U\} \tag{1.1}$$

$$N_{cr}=\lambda N \tag{1.2}$$

しかし,図 1 に示すようなモデルでは,架構の座屈は柱 1 の座屈耐力で決まるため,柱 2 の座屈耐力は正確に算出できず,不合理な降伏曲面を設定してしまう.このように現行の線形座屈解析では,すべての部材が同時に座屈することを前提とし,一律に固有値λを設定するため,座屈耐力を過小評価する部材が存在する.

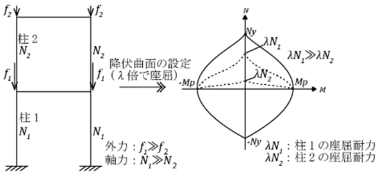


図 1　降伏曲面の設定

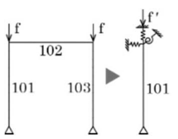
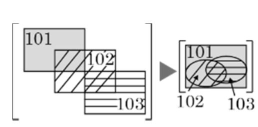
2. 固有値問題の縮約

2.1 縮約の概念

構造全体系の座屈解析に用いられる式(1.1)において個材を取り出すため,着目する部材端節点以外の行と列を減らしていく.この操作を縮約操作と呼ぶ.(表 1) この縮約によって得られたマトリクスを用いて,個材の固有値問題(式(2.1))を構成し,個材の座屈荷重倍率となる個材固有値 λ′を得る.

$$[K_E']\{U'\}=\lambda'[K_G']\{U'\} \tag{2.1}$$

表 1　縮約のイメージ

架構	マトリクス
	

2.2 縮約方法

縮約操作はガウスの消去法による操作を基とし,式(1.1)において等式を保つため,両辺に同じ操作を施す.提案されている縮約法は縮約に用いるマトリクスを$[K_E]$のみから作成しており, $[K_G]$で一部の軸力が無視される問題があった[1].そこで,本論文では$[K_E]$,$[K_G]$両方から縮約マトリクスを作成する手法を新たに提案する.

剛性マトリクスの k 行 k 列を縮約する操作は図 2 のように,連立式の一行を 0 にする操作であり,式(2.2)のように表せる. ここで, a_{ij} は$[K_E]$, b_{ij}は$[K_G]$の i 行 j 列の要素を表す.

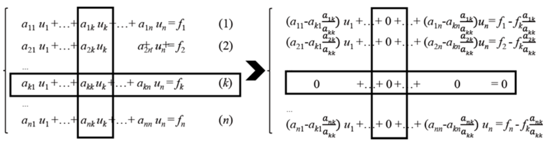


図 2 縮約操作

$$\left[C_E^k\right]\left[K_E^n\right]\left[C_G^k\right]^T\left[D_{EG}^k\right]\{U\} = \lambda''\left[C_E^k\right]\left[K_G^n\right]\left[C_G^k\right]^T\left[D_{EG}^k\right]\{U\} \qquad (2.2)$$

$$[C_E^k] = \begin{bmatrix} a_{kk} & & & -a_{1k} & & & \\ & \ddots & & \vdots & & & \\ & & a_{kk} & -a_{k-1k} & & & \\ & & & -a_{k+1k} & a_{kk} & & \\ & & & \vdots & & \ddots & \\ & & & -a_{nk} & & & a_{kk} \end{bmatrix} \qquad (2.3)$$

$$[C_G^k] = \begin{bmatrix} b_{kk} & & & -b_{1k} & & & \\ & \ddots & & \vdots & & & \\ & & b_{kk} & -b_{k-1k} & & & \\ & & & -b_{k+1k} & b_{kk} & & \\ & & & \vdots & & \ddots & \\ & & & -b_{nk} & & & b_{kk} \end{bmatrix} \qquad (2.4)$$

$$[D^k] = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_{kk}b_{kk}} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{a_{kk}b_{kk}} \end{bmatrix} \qquad (2.5)$$

$\left[C_E^k\right]$, $\left[C_G^k\right]$は縮約する行と列を 0 にする操作であり, $\left[D_{EG}^k\right]$は係数を元に戻し,マトリクスを小さくする操作である.また,縮約後の i 行 j 列の要素を式(2.6)のように表せる.

$$a'_{ij=}a_{ij} - a_{ik}a_{kj}/a_{kk} \qquad (2.6)$$

この操作を個材端節点に寄与する行と列のみになるまで繰り返し,式(2.1)を構成する.

3. 縮約法の解析結果と個材固有値の分析

提案する縮約法で様々な架構の解析を行い,個材固有値 λ'と部材の座屈耐力 λ'N について現行法の全体固有値 λ による部材の座屈耐力 λN との比較を踏まえて分析する.

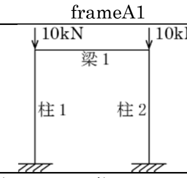
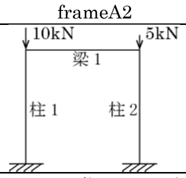
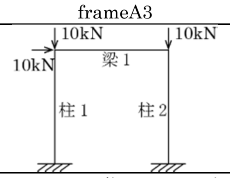
3.1 1 層ラーメン構造の数値解析

2 次元モデルの 1 層ラーメン構造で縮約法を用いた場合に得られる結果について考察する.表 2 に解析モデルと結果を示す.

現行法の場合,frameA2 の部材 1,2 は軸力差により λN に差が生じるが,縮約法による λ'N は,ほぼ等しい値を示した.また frameA2 の柱の λ'N は frameA1 と一致することから縮約法では梁の軸力が 0 の場合,柱 1 は柱 2 の軸力に関わらず, λ'N が算出されることがわかる.また,frameA3 のように梁に軸力が入る場合,柱は他のモデルと λ'N が異なるため,自身以外の軸力の影響を受けていると考えられる.

梁の λ'を比較すると,frameA1 は A2 よりも小さい.これは,部材 2 が frameA2 よりも A1 において軸力が大きく座屈しやすいため,梁の拘束具合が小さく検出されたためと考えられる.

表 2 1 層ラーメン構造の解析モデルと結果

モデル名	frameA1			frameA2			frameA3		
解析モデル (全部材同一) $E = 2.1 \times 10^8\,kN/m^2$ $I = 8.33 \times 10^{-6} m^4$ $A = 0.01m^2$ $l = 10m$									
部材	柱 1	柱 2	梁 1	柱 1	柱 2	梁 1	柱 1	柱 2	梁 1
軸力 N(kN)	10.0	10.0	0.0	10.0	5.0	0.0	5.7	14.3	5.0
個材固有値 λ'	26.0	26.0	13.0	26.0	52.0	17.3	43.8	18.0	12.8
座屈耐力 λ'N(kN)	260.0	260.0	0.0	260.0	260.0	0.0	249.6	257.4	64.0
全体固有値 λ		13.0			17.3			12.8	
座屈耐力 λN(kN)	130.0	130.0	0.0	173.0	86.5	0.0	72.9	183.0	64.0

一方で,これらのモデルで全体固有値は全て梁の個材固有値と一致するが frameA1,2 では梁の軸力が 0 であることからも柱が支配的となり,全体座屈が生じていることは明らかである.対称荷重が加わる frameA1 でも柱の λN と λ'N は大きく異なっており,座屈耐力 λN の妥当性については更なる検証が必要である

3.2 要素分割された柱の数値解析

図 3 に示すような 10 分割された柱に圧縮荷重が加わるとき,境界条件の違いが個材固有値にどのような影響を与えるのか考察する.

t＝100mm のときの解析結果を図 4 と表 3 に示す.

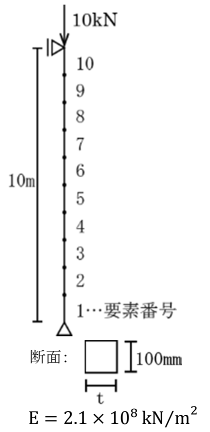


図 3 柱モデル

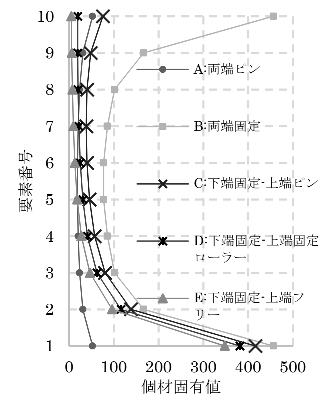
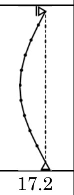
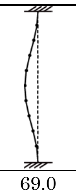
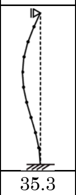
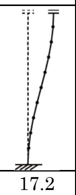
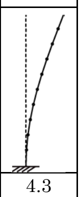


図 4 境界条件別の個材固有値

表 3 全体固有値と最小個材固有値の関係

モデル	A	B	C	D	E
境界条件と座屈モード					
全体固有値 λ	17.2	69.0	35.3	17.2	4.3
最小個材固有値 (要素番号)	19.2 (5,6)	77.3 (5,6)	38.4 (7)	19.3 (9)	5.0 (10)

モデル A,B のような上下端で同じ境界条件をもつ柱では,上下対称なる個材固有値を得ることができた.また,全体固有値はおおよそ個材固有値の最小値と一致する.

またモデル B~E では,下端条件が同一なので上端部材の要素 10 の個材固有値を比較すると,B が最大となり次いで C,D,E となる.したがって,境界条件が固定,ピン,固定ローラー,フリーの順番で個材固有値は大きく算出される.また,個材固有値が最小となる要素は座屈モードで変形が大きい部位のものである.モデル A~C,E 平移動が最も大きい部位であり,D 水平移動だけでなく,回転角の影響もあり,要素 9 が最小値をとると考えられる.

4 個材固有値を指標とした形状最適化

今,個材固有値 λ'を個材の座屈荷重倍率と考えると,逆数の 1/λ'は座屈に対する危険度を表すといえる.そこで 1/λ'を座屈安全率とし,これを指標とした形状最適化手法を探る.

4.1 柱の形状最適化

簡易モデルとして図 3 に示す柱モデルの両端ピンと両端固定の場合の形状最適化手法を探る.柱は,浜田ら[3]によって逆変分原理を用いた最適化手法が提案されており,最適形状が示唆されている.そこで,均一断面モデルと体積を一定に保ち,部材幅tを変化させた最適形状モデルの座屈安全率を比較し,最適形状の傾向を考察する.また,ここでは 1/λ'は最も座屈に弱い部位が 1.0 となるように基準化している.

表 4 柱の断面均一モデルと最適形状の結果比較

要素番号	両端ピン						両端固定					
	断面均一			最適形状			断面均一			最適形状		
	t (mm)	1/λ'	λ'	t (mm)	1/λ'	λ'	t (mm)	1/λ'		t (mm)	1/λ'	λ'
10	100	0.37	52.5	50	0.85	34.1	100	0.17	456.7	110	0.18	540.7
9		0.62	31.0	90	0.98	29.7		0.46	166.8	100	0.55	172.5
8		0.81	23.7	110	0.98	29.6		0.76	101.8	80	0.80	118.2
7		0.94	20.5	120	0.99	29.2		0.90	85.8	100	0.93	102.1
6		1.00	19.2	130	1.00	29.0		1.00	77.3	110	1.00	94.5
5		1.00	19.2	130	1.00	29.0		1.00	77.3	110	1.00	94.5
4		0.94	20.5	120	0.99	29.2		0.90	85.8	100	0.93	102.1
3		0.81	23.7	110	0.98	29.6		0.76	101.8	80	0.80	118.2
2		0.62	31.0	90	0.98	29.7		0.46	166.8	100	0.55	172.5
1		0.37	52.5	50	0.85	34.1		0.17	456.7	110	0.18	540.7
	座屈荷重 173kN			座屈荷重 217kN			座屈荷重 691kN			座屈荷重 828kN		

表 4 より, 両端支持の柱では,均一断面モデルでばらつきがあったが座屈安全率が最適形状モデルでは,おおよそ一律となっている.したがって,両端支持の柱では座屈安全率の均一化を目指し,断面を変えることで最適形状を探

れることがわかる.一方で,両端固定の柱では座屈安全率のばらつきこそ小さくなったものの一律になるということはなく,両端支持と同一手法による最適化は出来ないため,異なる手法を考案する必要がある.

4.2 あみだ状骨組みモデルの最適化

あみだ状の骨組みに圧縮力を加える場合の解析モデルと結果を表 5 に示す.初期形状 amida0 において座屈安全率の最大値を小さくすることを目標に形状操作を行った.形状操作は横架材の上下移動のみとし,可動範囲は隣接節点までとする.

今,amida0 では□で囲った部材の座屈安全率が大きい.そこでこれらの部材の固定度が大きくなるように,支点に近づけた.上下どちらの支点に近づけるかは上下の柱の座屈安全率をみて大きい値をとる部材の部材長が短くなるように選択した.

amida1 は本操作で最も座屈荷重が大きくなった架構である.座屈安全率の最大値は amida0 よりも amida1 では小さくなり,架構の座屈荷重は約 20%上昇させることができた.さらに座屈モードをみると,amida0 では一部が顕著であったのに対して amida1 では比較的全体が座屈しているため,形状の最適化を行えたと考えられる.

5.結

本研究では,架構中の部材の座屈耐力を合理的に評価するため,構造全体系の座屈固有値問題を縮約し,個材ごとの固有値を算出する手法を提案した.また,提案した手法で解析を行った結果,軸圧縮力が小さい部材においても過小評価を防いだ値を算出することができた.しかし,個材固有値から算出する座屈耐力は現行法に対して極めて大きく,安全側である保障はない.そのため,座屈耐力の妥当性については実験などにより確認が必要である.また,個材固有値は座屈に支配的でなくとも,拘束度が低い部材では小さく算出されることがわかった.さらに,ピン柱やあみだ状の骨組みモデルで個材固有値を指標とした座屈に対する形状最適化への可能性示すことができた.

※本論文では 1tf=10kN とし,重力単位への換算した数値を精度の高い値とする

参考文献

[1] 朝原真知子 他,座屈固有値問題の縮約を用いた個材座屈荷重の検出法,日本建築学会大会学術講演梗概集,2017.8

[2] 野上邦栄・山本一之,構造全体系の固有値解析による骨組み部材の合理的な有効座屈長の評価,土木学会論文集,No.489,I-27,pp157-166,1994

[3]浜田実・瀬口靖幸・多田幸生,逆変分原理による構造物の形状決定問題(第 2 報,座屈問題と振動問題),日本機械学会

表 5 あみだ状壁のモデルと解析結果

初期形状概要	モデル名:amida0		モデル名:amida1	
	座屈安全率分布	座屈モード	座屈安全率分布	座屈モード
	1/λ'最大値:0.762	全体固有値:0.6565	1/λ'最大値:0.652	全体固有値:0.7856