

チャンネル乱流における RANS と LES のハイブリッド計算

A Hybrid RANS/LES Simulation of Turbulent Channel Flow

半場 藤 弘*

Fujihiro HAMBA

1. はじめに

計算機の発達により LES (large eddy simulation) は複雑な流れ場にも適用できるようになり、乱流計算の主力となりつつある。しかし、例えば航空機の翼まわりの流れのように、固体壁を含む高レイノルズ数の流れ場を no-slip 条件を用いて計算することは依然として難しい。壁近くの流れを解像するには非常に多くの計算格子点が必要だからである。そのような高レイノルズ数の LES においては以前から人工的な壁面境界条件が試されてきた¹⁾。これは対数則や Spalding 則などの代数式を使い壁面最近傍格子の速度から壁面応力を求める方法である。しかし精度や汎用性の点で必ずしも十分でない。そこで最近、壁近くで別の細かい格子を切り境界層方程式を解いて壁面応力を求める壁面モデルが開発されつつある^{2,3)}。

一方、一つの格子を使い壁近くでレイノルズ平均モデル (RANS) を使い、壁から離れたところで LES を用いるというハイブリッド型の計算も試みられている。例えば Nikitin *et al.*⁴⁾ は DES (detached eddy simulation) と呼ばれる方法を用いて高レイノルズ数のチャンネル乱流の計算を試した。これは RANS として渦粘性の 1 方程式モデルである Spalart-Allmaras モデルを用い、LES として同モデル中の長さスケールを格子幅に置き換えたモデルを採用した。Davidson and Peng⁵⁾ は RANS として $k-\omega$ モデルを、LES としてエネルギーの 1 方程式モデルを用いてチャンネル乱流と 2 次元丘まわりの流れを計算した。また、筆者も RANS と LES の融合という観点から $k-\varepsilon$ モデルと 1 方程式モデルの LES を結合してチャンネル乱流の計算を試みた^{6,7)}。ただしこの計算では壁近くで LES をチャンネル中心で RANS を使った点が、前の 2 つの研究と異なる。

これら 3 つの研究の結果を比べると共通の欠点があるこ

とがわかった。それは 2 つのモデルをつなげる緩衝層で平均速度勾配が過大になり、RANS 領域と LES 領域の平均速度分布に段差が生じるという欠点である。そこで本研究ではその段差の原因を考察し、それを改善するための計算方法を提案する。そして壁近くで $k-\varepsilon$ モデルを、壁から離れたところで 1 方程式モデルの LES を使ったチャンネル流の計算を試みる。

2. 平均速度分布の段差

本章では単純なモデルを用いてチャンネル乱流の計算を行い、段差の原因を考察する。計算するチャンネル流は壁面摩擦速度によるレイノルズ数が $Re_\tau = 590$ で、計算領域は主流方向 (x)、壁に垂直な方向 (y)、スパン方向 (z) の順に $2\pi \times 2 \times \pi$ 、格子点数は $64 \times 64 \times 64$ である。またモデルとして Smagorinsky モデルを採用する。速度の発展方程式は次のように与えられる。

$$\frac{D\bar{u}_i}{Dt} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \bar{u}_i = -\frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_j u_i} - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} + f_i \quad (1)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad \dots \dots \dots (2)$$

$$\overline{u_i u_j} = \frac{2}{3} k \delta_{ij} - \nu_s \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad \dots \dots \dots (3)$$

$$\nu_s = (C_s \Delta)^2 \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right)^2} \quad \dots \dots \dots (4)$$

ただし、 \bar{u}_i はグリッドスケール (GS) の速度、 $C_s (= 0.1)$ はモデル定数、 Δ はフィルター幅である。ここで Δ として格子幅 h を採用すると通常の LES 計算となる。また、 Δ として乱流の積分長さスケール ℓ を導入すると一種の RANS の混合長モデルとみなすことができる。ここでは普遍性の

*東京大学生産技術研究所 情報・システム部門

表1 計算したケース

Case	RANSモデル	スキーム	緩衝層
1	混合長モデル	古い	$y_A^+ = y_B^+ = 210$
2	混合長モデル	新しい	$y_A^+ = y_B^+ = 210$
3	混合長モデル	新しい	$y_A^+ = 161, y_B^+ = 238$
4	k-εモデル	新しい	$y_A^+ = 161, y_B^+ = 238$

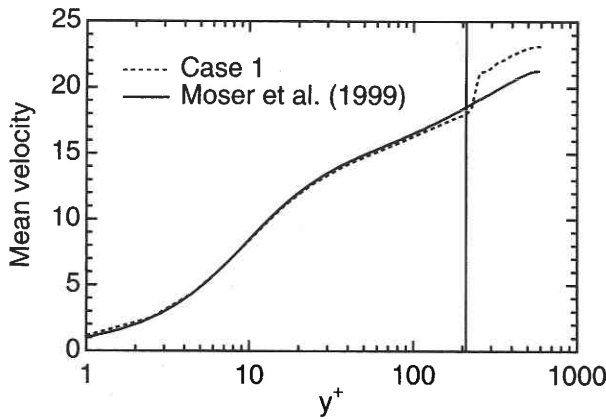


図1 平均速度分布 (Case 1)

ある RANS モデルの開発が目的ではなくこのチャンネル乱流で適用できる単純な RANS モデルがあればいいので、積分長 ℓ を Moser *et al.*⁸⁾ による DNS データから次のように求めた。まず速度の x - z 平均と揺らぎを $\bar{u}_i = \langle \bar{u}_i \rangle + \bar{u}_i''$ と表す。 Δ として積分長 ℓ を用いると渦粘性は十分大きくなり \bar{u}_i'' は非常に小さくなりほぼ $\bar{u}_i = \langle \bar{u}_i \rangle$ と近似できる。すると渦粘性は

$$\nu_s = (C_s \ell)^2 \left| \frac{\partial \langle \bar{u} \rangle}{\partial y} \right| \dots \dots \dots (5)$$

となり、DNS の統計量を用いれば積分長 ℓ は

$$\ell^2 = -\langle u''v'' \rangle / C_s^2 \left| \frac{\partial \langle \bar{u} \rangle}{\partial y} \right| \left| \frac{\partial \langle \bar{u} \rangle}{\partial y} \right| \dots \dots \dots (6)$$

から値が求まる。上記の LES と混合長 RANS モデルを次のように結合させてチャンネル乱流の計算を行う (Case 1)。

$$\Delta = \begin{cases} \ell & \text{for } 0 < y^+ < 210 \\ h & \text{for } 210 \leq y^+ < 590 \end{cases} \dots \dots \dots (7)$$

すなわち壁近くで RANS をチャンネル中心で LES を用いる。また後の章で説明するものも含め本研究で計算したケースを表1に示す。

図1に Case 1 の平均速度分布を、図2に Case 1 のレイノ

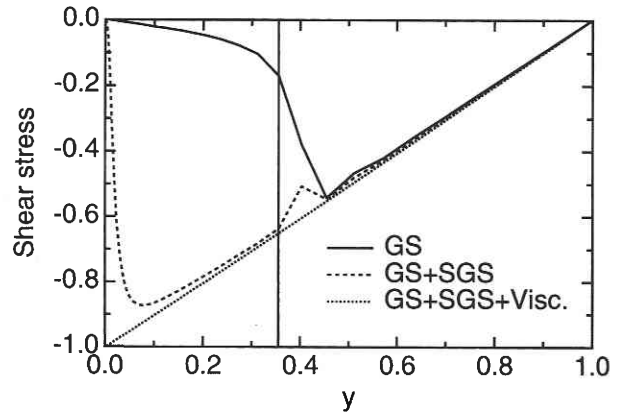


図2 レイノルズ剪断応力の分布 (Case 1)

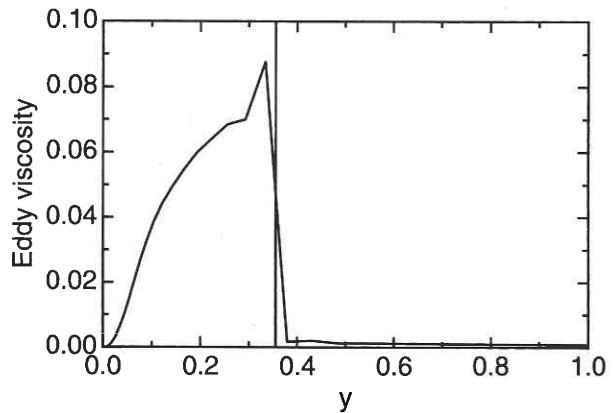


図3 平均渦粘性率の分布 (Case 1)

ルズ応力の分布を示す。GS成分は $\langle \bar{u}''\bar{v}'' \rangle$ 、SGS成分は $\langle \bar{u}''\bar{v}'' \rangle$ 、分子粘性 (Visc.) 成分は $-\nu \partial \langle \bar{u} \rangle / \partial y$ で与えられる。また図中の垂直な実線はフィルター幅 Δ を ℓ から h へ切り替えた場所を表す。図1では明らかにモデルを切り替えた場所で平均速度分布に段差が見られる。また図2を見ると、壁近くの RANS の領域では GS 成分が小さく、SGS 成分すなわち (4) 式の渦粘性を用いた成分が卓越して通常の RANS モデル計算に相当することがわかる。また、チャンネル中心では逆に GS 成分が卓越しており LES 計算になっている。図3に渦粘性の分布を示す。壁近くの RANS の領域では最大で分子粘性の約 50 倍という大きな値をとり、チャンネル中心では分子粘性とほぼ同じ値をとる。

図1を詳しく見てみると速度に段差が現れるのはちょうど界面上ではなく LES 領域側の界面近くである。この場所に対応する図2の $y = 0.4$ のところでは剪断応力の GS 成分が十分大きくないことがわかる。したがって LES 領域の界面近くでは揺らぎの小さい RANS 領域の影響を受

けてしまい、GS成分が過小評価され、それを補うために平均速度勾配が過大になっていると考えられる。

以上のことより Smagorinsky モデルのフィルター幅を格子幅 h から積分長 l に変えるという単純な結合方法でも平均速度の段差が見られることがわかった。乱流モデルや結合方法の詳細によるのではなく、SGS粘性が図3のように急激に変化する際に生じる根本的な問題であることが示唆される。

3. 新しい接続法

速度の段差をなくすにはGS剪断応力の過小評価を修正する必要がある。本研究では数値スキームに着目する。GS成分の速度場の時間発展は(1)式と(2)式を数値的に離散化して求まる。ここではスタッガード格子で2次精度の中心差分を用いる。まず従来の通常の数値スキームを調べてみる。RANSとLESを切り替える境界近くの格子を図4に示す。簡単のため x - y 平面のみ示し、添字の j は y 方向の格子の番号を表す。仮にRANS領域の第1格子では $\Delta = 5h$ となっていて、境界線上では実効的に $\Delta = 3h$ とする。また速度の上付添字はフィルター幅を表す。例えば境界のすぐ上 $j+1/2$ とすぐ下 $j-1/2$ の格子で、連続の式(2)は

$$\frac{\partial \bar{u}^h}{\partial x} \Big|_{j+1/2} + \frac{\bar{v}_{j+1}^h - \bar{v}_j^{3h}}{h_y} + \frac{\partial \bar{w}^h}{\partial z} \Big|_{j+1/2} = 0 \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$\frac{\partial \bar{u}^{5h}}{\partial x} \Big|_{j-1/2} + \frac{\bar{v}_j^{3h} - \bar{v}_{j-1}^{5h}}{h_y} + \frac{\partial \bar{w}^{5h}}{\partial z} \Big|_{j-1/2} = 0 \quad \dots\dots\dots (9)$$

と与えられる。例えば(8)式の \bar{v}_j^{3h} は格子の下辺から上向きに流れる質量のフラックスを表すが、この速度場だけフィルター幅が $3h$ と大きく、他の速度場と整合性がとれていない。本来は \bar{v}_j^h が用いられるべきであるが、下の隣の

格子とのやりとりを考えると下と同じ \bar{v}_j^{3h} を使わざるをえない。また速度 \bar{u} の方程式で y 方向の移流項だけを抜き出すと、

$$\frac{\partial \bar{u}_{j+1/2}^h}{\partial t} = -\frac{1}{h_y} (\dots - \bar{u}_j^{3h} \bar{v}_j^{3h}) + \dots \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_{j-1/2}^{5h}}{\partial t} = -\frac{1}{h_y} (\bar{u}_j^{3h} \bar{v}_j^{3h} - \dots) + \dots \quad \dots\dots\dots (11)$$

と与えられる。同様に(10)式の $\bar{u}_j^{3h} \bar{v}_j^{3h}$ の項は格子の下辺における移流すなわち運動量のフラックスを表す。この項も本来は $\bar{u}_j^h \bar{v}_j^h$ を使うべきところである。一般にフィルター幅が大きいほどSGS粘性が大きくなりGS成分の時空間的な揺らぎが小さくなる。したがって平均的には $|\bar{u}_j^{3h} \bar{v}_j^{3h}| < |\bar{u}_j^h \bar{v}_j^h|$ となり、この移流項の揺らぎが過小評価される。すると $\bar{u}_{j+1/2}^h$ の揺らぎが小さくなり、結果的にレイノルズ応力 $\langle \bar{u} \bar{v} \rangle$ が過小評価されることを示している。

そこで本研究では格子幅の違う速度の不整合をなくすため、図5のように境界の辺で速度を2種類定義する。すると連続の式は

$$\frac{\partial \bar{u}^h}{\partial x} \Big|_{j+1/2} + \frac{\bar{v}_{j+1}^h - \bar{v}_j^h}{h_y} + \frac{\partial \bar{w}^h}{\partial z} \Big|_{j+1/2} = 0 \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$\frac{\partial \bar{u}^{5h}}{\partial x} \Big|_{j-1/2} + \frac{\bar{v}_j^{5h} - \bar{v}_{j-1}^{5h}}{h_y} + \frac{\partial \bar{w}^{5h}}{\partial z} \Big|_{j-1/2} = 0 \quad \dots\dots\dots (13)$$

と書ける。ただし2種類の速度のうち \bar{v}_j^h は発展方程式を解いて求めることとし、もう一つの \bar{v}_j^{5h} は次式で与える。

$$\bar{v}_j^{5h} = \hat{v}_j^h \quad \dots\dots\dots (14)$$

このときのフィルター $\hat{\Delta}$ として $\hat{\Delta} = 2\sqrt{6}h (= \sqrt{5^2 - 1^2}h)$ を

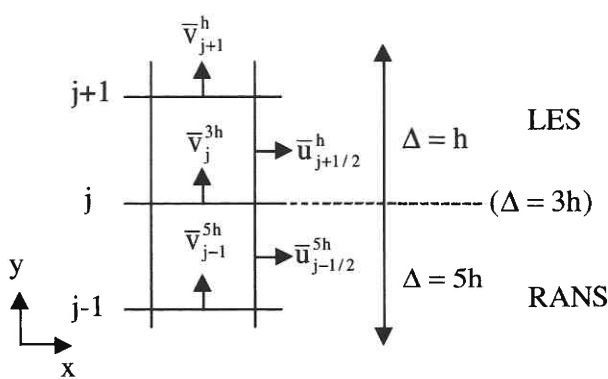


図4 計算格子と速度成分 (古いスキーム)

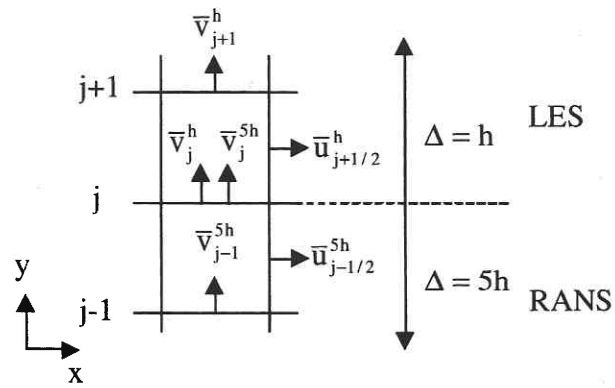


図5 計算格子と速度成分 (新しいスキーム)

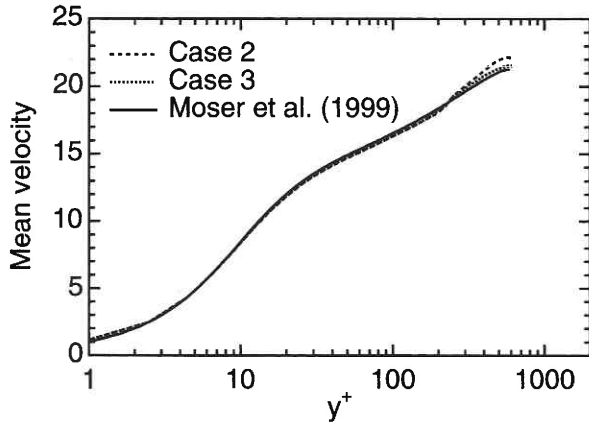


図6 平均速度分布 (Case 2, Case 3)

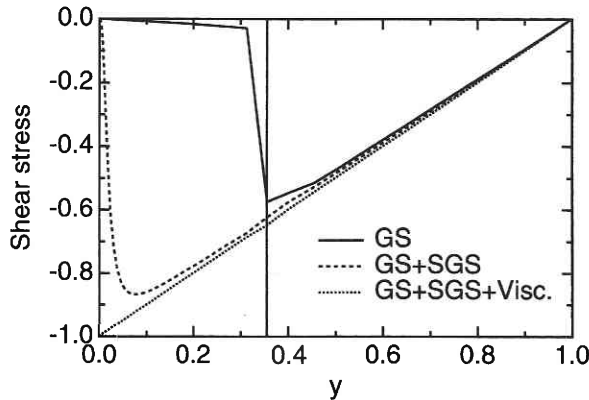


図7 レイノルズ剪断応力の分布 (Case 2)

図6に Case 2と Case 3の平均速度分布を示す．図1と比べると明らかに速度の段差が減っていることがわかる．また緩衝層を設けた Case 3の方が Case 2より勾配が小さく，DNSの結果に近い．図7に Case 2のレイノルズ応力の分布を示す．期待されたように $y = 0.4$ でGS成分が十分大きくなっている．剪断応力のGS成分の過小評価が修正されたために速度分布も改善されたと考えられる．

4. $k-\epsilon$ モデルによる計算

前章で使った混合長モデルではDNSから得た積分長 l を用いたが，これは $Re_\tau = 590$ のチャンネル乱流にのみ有効であり汎用性がない．そこで，実際に乱流計算に広く使われている $k-\epsilon$ モデルをRANSモデルとして使い，新しい接続方法が有効であるかを調べる．またLESとしてはエネルギーを用いた1方程式モデルを用いる．速度 \bar{u}_i の発展方程式は (1) と (2) を使い，渦粘性のモデルとエネルギー k の発展方程式は次のように与えられる．これらは $k-\epsilon$ モデルとLESで共通である．

$$v_i = C_v f_v \frac{k^2}{\epsilon} \dots\dots\dots (17)$$

$$\frac{Dk}{Dt} = -\overline{u_i u_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \epsilon + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\frac{v_i}{\sigma_k} + \nu \right) \frac{\partial k}{\partial x_i} \right] \dots\dots\dots (18)$$

残りの散逸率 ϵ の取り扱いについて， $k-\epsilon$ モデルの場合は輸送方程式を用いて解く．

$$\frac{D\epsilon_R}{Dt} = -C_{\epsilon 1} \frac{\epsilon_R}{k} \overline{u_i u_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - C_{\epsilon 2} f_\epsilon \frac{\epsilon_R^2}{k} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\frac{v_i}{\sigma_\epsilon} + \nu \right) \frac{\partial \epsilon_R}{\partial x_i} \right] \dots\dots (19)$$

ただし f_v と f_ϵ は Van Driest 型減衰関数 ($A_v = 25$, $A_\epsilon = 9.5$) である．一方LESでは散逸率を代数的に求める．

$$\epsilon_L = \frac{k^{3/2}}{C_\Delta \Delta} \dots\dots\dots (20)$$

このときフィルター幅として格子幅を用いるので，通常のLESとなる．この1方程式モデルはチャンネル乱流や混合層ではSmagorinskyモデルとほとんど同じ結果を出すことがわかっている⁹⁾．そしてこの2つのモデルをつなげるために一般の散逸率を次の式で決める．

$$\epsilon = \alpha \epsilon_R + (1 - \alpha) \epsilon_L, \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \dots\dots\dots (21)$$

係数 α が1のとき $k-\epsilon$ モデルに，0のときLESになる．2つのモデルを滑らかにつなげるために，前章の Case 3と同様に緩衝層 $y_A^+ < y^+ < y_B^+$ を設けて，徐々に α を変える．

用いた．こうすれば同じ格子幅の速度を用いて連続の式を評価することができる．さらに速度の方程式は

$$\frac{\partial \bar{u}_{j+1/2}^h}{\partial t} = -\frac{1}{h_y} (\dots - \bar{u}_j^h v_j^h) + \dots \dots\dots (15)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_{j-1/2}^{5h}}{\partial t} = -\frac{1}{h_y} (\widehat{\bar{u}_j^h v_j^h} - \dots) + \dots \dots\dots (16)$$

とする．こうすれば $\bar{u}_{j+1/2}^h$ に対して適切な移流項の値を与え過小評価をなくし段差の解消に役立つことが期待できる．

この新しいスキームを用いて表1の Case 2と Case 3の2つのケースについて計算する．乱流モデルは前章のものと同じである．Case 3では1点でフィルター幅を切替えるのではなく y 方向に3格子点を用いて緩衝層 $y_A^+ < y^+ < y_B^+$ をつくり徐々に切替える．また新しいスキームにおけるフィルタリングもこの緩衝層の4格子点で繰り返す．

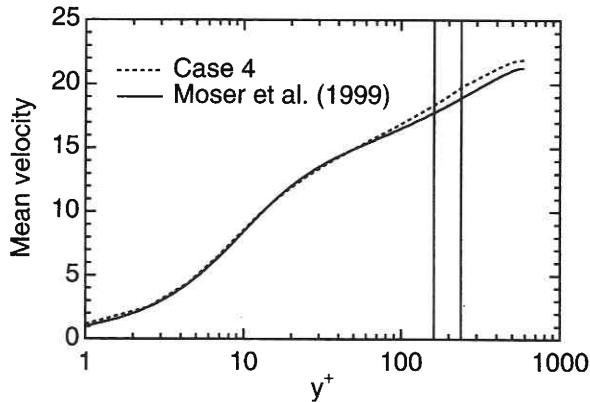


図8 平均速度分布 (Case 4)

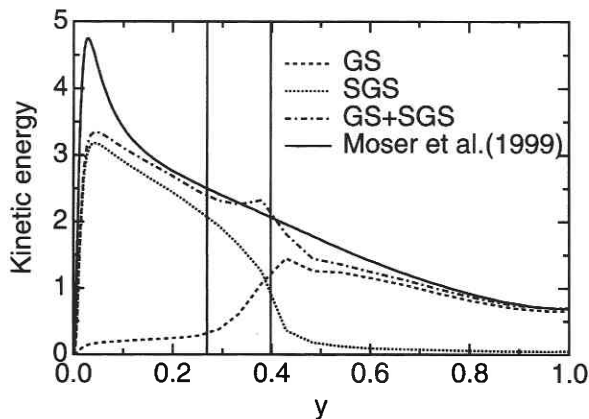


図9 乱流エネルギーの分布 (Case 4)

y_A^+ と y_B^+ の間に3つの格子点を用い、前章で説明した新しい数値スキームを使って計算する (表1のCase 4)。

図8にCase 4の平均速度分布を示す。Case 3と同様に平均速度勾配の段差がなくなっている。しかしDNSに比べてやや値が大きい。これはRANS領域の界面近くで勾配がやや大きいためである。これはこの領域で $k-\epsilon$ モデルの定数やLESとの接続方法を改善する必要性を示している。

図9にCase 4の乱流エネルギーの分布を示す。GS成分は $\langle \bar{u}_i'^2 \rangle / 2$ 、SGS成分は $\langle k \rangle$ で与えられる。壁近くのRANSの領域ではSGS成分が、壁から離れたLESの領域ではGS成分が卓越している。GS成分とSGS成分の和とDNSの結果を比べる。壁付近ではDNSに比べて小さいがこれは今回使った $k-\epsilon$ モデルの減衰関数の性質であり、これを改善するにはより高精度の低レイノルズ数モデルを導入する必要がある。また $y = y_B$ 付近で分布に凹凸が見られる。

これは乱流エネルギーを滑らかにつなげるにはまだ接続方法の改良が必要であることを示している。

5. まとめ

高レイノルズ数の流れのLESを行うには壁近くで膨大な格子点数が必要であり、現実的な計算のためには壁近くの流れ場のモデル化が必要である。その一つとして壁近くでRANSモデルを用いてLESとつなげる方法が試みられてきた。しかしチャンネル乱流への適用を見ると、平均速度分布に段差が見られ十分良い結果が得られていない。本研究で単純なSmagorinskyモデルとそれを拡張した混合長RANSモデルを用いてまず段差の再現とその原因を考察した。

従来の通常の数値スキームでは、モデルやその接続方法をいろいろと変えても平均速度分布に段差が残ってしまう。これはモデルの選択以前に、単にSGS粘性を大きくしてRANS計算を行う際に、場所によって渦粘性が急激に変化する時の根本的な問題であることが示唆された。特にLES領域の界面近くで剪断応力のGS成分が過小評価されたため速度勾配が大きくなってしまったことがわかった。そこでモデルを接続する境界で速度を2種類定義することによってフィルター幅の異なる速度間の不整合をなくす方法を提案した。その結果段差のほとんど見られない平均速度分布を得ることができた。

またこの方法を $k-\epsilon$ モデルと1方程式SGSモデルに適用した。混合長モデルの場合と同様に段差は解消されたが、DNSよりやや大きい分布が得られた。また乱流エネルギー分布では接続境界付近で分布の凹凸が見られた。それらを改善するために乱流モデルや接続方法を改良することは今後の課題である。

(2002年11月12日受理)

参考文献

- 1) 森西：東京大学博士論文 (1989)。
- 2) W. Cabot: Annual Research Briefs, CTR, NASA Ames/Stanford Univ. (1997) 97.
- 3) 小林, 谷口, 小林：生産研究 **53** (2001) 49.
- 4) N. V. Nikitin, F. Nicoud, B. Wasistho, K. D. Squires, and P. R. Spalart: Phys. Fluids **12** (2000) 1629.
- 5) L. Davidson and S. H. Peng: Proc. 2 nd Int. Symp. on Turbulence and Shear Flow Phenomena **2** (2001) 175.
- 6) 半場：生産研究 **52** (2000) 15.
- 7) F. Hamba: Theoret. Comput. Fluid Dynamics **14** (2001) 323.
- 8) R. D. Moser, J. Kim, and N. N. Mansour: Phys. Fluids **11** (1999) 943.
- 9) F. Hamba: J. Phys. Soc. Jpn. **56** (1987) 2721.