研 究 速 報

バルク・ヘリシティを用いた旋回乱流の逆流条件の解析
——実験との比較——

A Variational Analysis of Flow-Reversal Condition in a Turbulent Swirling Flow Using the Bulk-Helicity Concept, with Special Reference to Experimental Observations

横 井 喜 充*・吉 澤　　徴*・伊 藤 公 孝**・伊 藤 早 苗***
Nobumitsu YOKOI, Akira YOSHIZAWA, Kimitaka ITOH and Sanae-I. ITOH

1. は じ め に

旋回流は理工学のさまざまな分野で重要な役割を担っている．工学的には，遠心分離装置や燃焼室への効率的な燃料補給[1]，射出装置でのジェットのコントロール[2] など，さまざまなところで実用的に利用されている．一方，科学の分野でも旋回流は大きな関心を浴びつつある．例えば，台風や竜巻などの気象上の渦構造の生成過程では，渦運動に加えて，鉛直方向への上昇あるいは下降流が重要な役割を担っていることが認識されてきた[3]．また，天文の分野で脚光を浴びている降着円盤から噴出するプラズマの流れである宇宙ジェットは，円盤の回転運動とジェットの噴出が組み合わさった旋回ジェットとみなすことができる[4]．

旋回を伴わない円管内乱流では，軸方向速度は壁近傍を除いて極めて平坦な分布をもつ．これは層流の円管流が放物線状の分布を見せるのと著しい対照をなしている．このことは，速度差などがあるとたちまちそれを均してしまうという乱流のもつ「拡散的性質」の顕れである．ところが，円管乱流に旋回が加わると軸方向速度の分布は劇的に変化する．円管の中心付近の速度が小さくなり，中央部が凹んだような分布を見せる．軸方向流速が中央部で凹むということは，別の見方をすれば，速度差すなわち勾配をもった構造が乱流中でも維持され続けていることを意味する．乱流の「拡散的性質」からすると不思議なことといえる．

その実用上あるいは理論上の重要性もあって，さまざまな旋回乱流の実験が行われてきた[5,6]．実験は，旋回あるいはそれに伴う渦をどのように与えるかによっていくつかの種類に分類することができる[6]．円管の中心付近に旋回を与えると，渦は中心付近に局在する．このような旋回を集中渦型（Concentrated Vortex: CV型）と呼んでいる．一方，円管の壁近くに旋回を与えるタイプのものもあり，これらは壁ジェット型（Wall Jet：WJ型）と呼ばれている．中でもCV型の旋回では中心付近での減速が顕著であり，旋回を強くすると減速の程度が進み，中心付近で逆流が生じるまでになる．強い逆流は装置自体の損傷を惹き起こす場合もあり，逆流の予測や制御は実用上重要な意味を持つ．旋回がどのくらい強くなると逆流が生じるかという問題に，流量とヘリシティ総量あるいはバルク・ヘリシティという観点から取り組むことが本研究の主目的である．

これまでのところ，旋回の強さを表現する量としては，周方向の速度と軸方向速度の比や，単位流量当りの角運動量流れなどが用いられてきた．本研究ではこれらに替えて，流れのらせん度を表すヘリシティという量を考える．よく知られているようにヘリシティは，エネルギーと並んで非圧縮流体を支配する方程式系の保存量である．特に系の鏡映対称性が破れている場合には，流れの中の構造を表す指標として重要な役割を果たすことが期待される[7]．ヘリシティを用いた変分解析を旋回乱流に適用することで，軸方向流速の減速など旋回乱流の基本的性質を説明できることが示されてきた[8]．ここでは，その変分解析よって得られた結果を利用して，旋回乱流中で逆流が生じる条件をヘリシティという概念で整理し直すことを試みる．さらに，変分解析による理論的結果が実験事実とどのくらい一致するかを吟味する．

本稿は以下のように構成されている．続く第2節でヘリシティを用いた変分解析とその結果を概説する．第3節で旋回乱流における中心付近での軸方向流速の減速の度合いを評価し，逆流が生じる条件を明示する．第4節ではこれまでの実験結果をヘリシティ総量という概念から解析する．第5節で理論的結果と実験結果との比較が行われる．最終節でまとめと今後の展望が述べられる．

*東京大学生産技術研究所　情報・システム部門
**核融合科学研究所
***九州大学応用力学研究所

2. 旋回流の変分解析とその結果

2.1 旋回乱流の変分解析

旋回乱流の大きな特徴の一つは，旋回に伴って主流速が中心軸付近で減速され凹みを示すことである．これは乱流一般がもつ強い拡散性（乱流拡散）の観点からは不思議な現象といえる．旋回乱流のこのような特徴を調べるために，平均場の構造を表す函数，すなわち平均場のエンストロフィー（enstrophy）総量：

$$\Phi=\int_V \Omega^2 dV=\int_V (\nabla\times\mathbf{U})^2 dV \quad\cdots\cdots(1)$$

を考える．ここでVは考える流体の体積である．旋回流は軸のまわりを回転する流れと軸に沿った主流とからなる．平均場のヘリシティはこの特徴を表す重要な量である．そこでΦに加えて，平均流のヘリシティ総量：

$$\Psi=\int_V \mathbf{U}\cdot\Omega dV=\int_V \mathbf{U}\cdot(\nabla\times\mathbf{U})dV \quad\cdots\cdots(2)$$

を定義する．

以下では，ヘリシティで表される旋回の強さを与えたときに，どのような平均速度場が実現されるかを考える[8]．これは変分法ではΨ一定という条件下でΦの極値を求める問題といえる；

$$\Phi=\text{extremum under } \Psi=\text{const.} \quad\cdots\cdots(3)$$

通常の変分法の議論に従うと，条件付きの変分問題［(3)式］はラグランジュの未定乗数λを用いて自由変分問題；

$$\Phi+\lambda\Psi=\text{extremum} \quad\cdots\cdots(4)$$

に置き換えることができる．速度の変分$\delta\mathbf{U}$を考え，極値を与えるための条件

$$\delta(\Phi+\lambda\Psi)=0 \quad\cdots\cdots(5)$$

を調べる．変分の境界条件としては，考える境界S上で速度の変分がゼロ，すなわち

$$\delta\mathbf{U}=0 \text{ at } S \quad\cdots\cdots(6)$$

を考える．

平均速度の変分$\delta\mathbf{U}$に対してΦは

$$\delta\Phi=\int_V 2(\nabla\times\Omega)\cdot\delta\mathbf{U}dV-\int_S 2(\mathbf{n}\times\Omega)\cdot\delta\mathbf{U}dS \quad\cdots\cdots(7\text{a})$$

$$=\int_V 2(\nabla\times\Omega)\cdot\delta\mathbf{U}dV \quad\cdots\cdots(7\text{b})$$

と変化する．ここで$\mathbf{n}$は境界S上での外向き法線ベクトルである．また，(7 b) 式では境界上で$\delta\mathbf{U}$がゼロである条件［(6) 式］を用い表面積分を落とした．全く同様にして，$\delta\mathbf{U}$に対するΨの変分$\delta\Psi$を計算すると

$$\delta\Psi=\int_V 2\Omega\cdot\delta\mathbf{U}dV-\int_S 2(\mathbf{n}\times\mathbf{U})\cdot\delta\mathbf{U}dS \quad\cdots\cdots(8\text{a})$$

$$\int_V 2\Omega\cdot\delta\mathbf{U}dV \quad\cdots\cdots(8\text{b})$$

となる．ここでも境界条件［(6) 式］を用いた．(7 b) 式と (8 b) 式から

$$\delta(\Phi+\lambda\Psi)=\int_V 2(\nabla\times\Omega+\lambda\Omega)\cdot\delta\mathbf{U}dV=0. \quad\cdots\cdots(9)$$

となる．$\delta\mathbf{U}$は任意なので (9) 式が成り立つためには

$$\nabla\times\Omega+\lambda\Omega=0. \quad\cdots\cdots(10)$$

が必要である．これが変分問題［(5) 式］のオイラー＝ラグランジュ方程式である．この関係をもう一度用いると

$$(\nabla^2+\lambda^2)\Omega=0 \quad\cdots\cdots(11)$$

を得る．

2.2 結果

z軸が管軸と一致した円筒座標系(r,θ,z)を考える．簡単のため，以下の議論では，管軸まわりの対称性；

$$\frac{\partial}{\partial\theta}=0 \quad\cdots\cdots(12)$$

と，さらに軸に沿っての一様性；

$$\frac{\partial}{\partial z}=0 \quad\cdots\cdots(13)$$

を仮定する．(12) 式と (13) 式の仮定と平均速度場のソレノイダル条件;

$$\nabla\cdot\mathbf{U}=0 \quad\cdots\cdots(14)$$

を考えあわせると，動径方向速度は恒等的にゼロとなる

$(U^r=0)$．したがって，平均速度場は

$$\mathbf{U}=(U^r,U^\theta,U^z)=\left[0,U^\theta(r),U^z(r)\right],\quad\cdots\cdots(15)$$

平均渦度場は

$$\mathbf{\Omega}=(\Omega^r,\Omega^\theta,\Omega^z)=\left[0,\Omega^\theta(r),\Omega^z(r)\right]=\left[0,-\frac{dU^z(r)}{dr},\frac{1}{r}\frac{d}{dr}rU^\theta(r)\right]\quad(16)$$

となる．このような系で，(11) 式から渦度の軸方向あるいは z 成分 Ω^z はベッセルの常微分方程式

$$\frac{d^2\Omega^z}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\Omega^z}{dr}+\lambda^2\Omega^z=0\quad\cdots\cdots(17)$$

に従う．この方程式は

$$\Omega^z(r)=\Omega_C J_0(\lambda r)\quad\cdots\cdots(18\,a)$$

の形の解を持つ．また，(10) 式より平均渦度の周方向あるいは θ 方向成分 Ω^θ は

$$\Omega^\theta(r)=\frac{1}{\lambda}\frac{d\Omega^z}{dr}=-\Omega_C J_1(\lambda r)\quad\cdots\cdots(18\,b)$$

で与えられる．ここに，Ω_C は中心軸上での軸方向渦度であり，

$$\Omega_C=\Omega^z(0)=\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}rU^\theta\right]_{r=0}\quad\cdots\cdots(19)$$

で定義される．(18) 式で，$J_n(x)$ は n 次の第一種ベッセル函数である．$J_0(x)$ と $J_1(x)$ の振る舞いを図1に示した．$J_0(x)$ と $J_1(x)$ の第一番目と第二番目のゼロ点は

$$\alpha_1^{(0)}=2.4,\ \alpha_2^{(0)}=5.5,$$
$$\alpha_1^{(1)}=3.8,\ \alpha_2^{(1)}=7.0\quad\cdots\cdots(20)$$

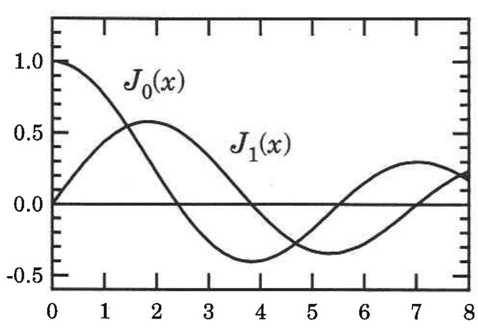

図1　第一種ベッセル函数 $J_0(x)$ と $J_1(x)$

と表される．ここで $\alpha_m^{(n)}$ は $J_n(x)$ の第 m 番目のゼロ点を意味する．

(10) 式を積分すると

$$\mathbf{U}=-\frac{1}{\lambda}\nabla\times\mathbf{U}+\nabla\phi,\quad\cdots\cdots(21)$$

を得る．ここで，ϕ は任意の調和函数である $(\nabla^2\phi=0)$．(21) 式より軸方向速度と周方向速度はそれぞれ

$$U^z(r)=-\frac{\Omega_C}{\lambda}J_0(\lambda r)+\frac{\partial\phi}{\partial z}=-\frac{\Omega_C}{\lambda}J_0(\lambda r)+U_\infty,\quad\cdots\cdots(22\,a)$$

$$U^\theta(r)=\frac{\Omega_C}{\lambda}J_1(\lambda r)+\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}=\frac{\Omega_C}{\lambda}J_1(\lambda r),\quad\cdots\cdots(22\,b)$$

で与えられる．ここで ϕ として

$$\phi=U_\infty z+\phi_0,\quad\cdots\cdots(23)$$

を用いた．ただし，U_∞ はレイノルズ数無限大の極限 $(Re\to\infty)$ での一様流速であり，ϕ_0 は定数である．

$J_0(x)$ と $J_1(x)$ の間の漸化式から

$$\frac{d}{dx}J_0(x)=-J_1(x),\quad\cdots\cdots(24)$$

となる．よって，軸流速 U^z ［(22 a) 式］の動径方向の勾配は

$$\frac{dU^z}{dr}=\frac{d}{dr}\left[-\frac{\Omega_C}{\lambda}J_0(\lambda r)+U_\infty\right]=\Omega_C J_1(\lambda r)\quad\cdots\cdots(25)$$

で与えられる．このことから，平均軸方向流速が最大となる点 r_M は

$$\lambda r_M=\alpha_1^{(1)}\quad\cdots\cdots(26)$$

の関係を充たす．この点 r_M が円管の内部に存在するために

$$0\le r_M=\frac{\alpha_1^{(1)}}{\lambda}\le a\quad\cdots\cdots(27)$$

が成り立たねばならない．ただし，a は円管の半径である．このことから，ラグランジュの未定乗数について，条件

$$\lambda\ge\frac{\alpha_1^{(1)}}{a}=\frac{3.8}{a}\quad\cdots\cdots(28)$$

が成り立つことがわかる．

3. 逆 流 条 件

第2節で，平均流のエンストロフィー総量 [(1) 式] とヘリシティ総量 [(2) 式] を用いた変分解析の結果をまとめた．円筒座標系ではベッセル函数型の解；すなわち，平均渦度 [(18) 式] と平均速度 [(22) 式] の表式が成り立つ．第1節で述べたように，渦度が中心に集中する型（CV型）の旋回乱流では，中心軸付近で流れが減速し逆流になる可能性がある．前節の結果を利用して本節では，流れの減速や逆流の程度を表す式を導出し，逆流が生じるための条件を導く．

3.1 バルク量

平均流の性質を反映するバルク量を考える．ひとつは

$$F(r_*) = 2\pi\int_0^{r_*} U^z r dr. \quad (29)$$

で定義される単位質量当りの運動量の軸方向流れ，すなわち軸方向流量である．もうひとつは

$$H(r_*) = 2\pi\int_0^{r_*} \mathbf{U}\cdot\mathbf{\Omega} r dr. \quad (30)$$

で定義される（単位長さ当りの）ヘリシティ総量である．ここで $r_*(0 \le r_* \le a)$ は円管内の位置を表している．F や H の引数はこれらの量が $r=0$ から $r=r_*([0, r_*])$ にわたって積分された量であることを示している．例えば，$r_* = a$（a：円管の半径）は計算が管の全領域で行われることに対応する．以下の解析では

$$r_* = r_{\mathrm{M}} \quad (31)$$

と置く．ここで r_{M} は軸方向流速が最大となる位置である [(26) 式]．このように選ぶ理由は以下の通りである；

(i) 粘性効果の無視：我々の変分解析では粘性の直接的効果は無視している．そのため，壁近傍の流れの性質を記述することはできない．したがって，変分解析結果の適用は円管の中心およびコア部分までに限られる．

(ii) 変分計算の簡単化：軸方向流速が最大となる位置，r_{M} は $J_1(x)$ の最初のゼロ点 $\alpha_1^{(1)}$ [(26) 式] と関連する [$J_1(\lambda r_{\mathrm{M}})=0$]．このことは以下で見られるようにバルクな量の計算を著しく簡単化する．

(iii) 流量の保存：すぐ後の計算で見るように，積分領域 [0, r_{M}] に基づいて計算する場合，旋回乱流の軸方向流量は旋回のないときの軸方向流量と一致する．積分領域 [0, r_{M}] に付随するこの流量保存の性質は，第5節で見るように実験観測の結果と一致する．

(iv) バルク・ヘリシティの不変性：積分領域を [0, r_{M}] としていると，バルク・ヘリシティ $H(r_{\mathrm{M}})$ は軸方向のガリレイ変換に対して不変な量となる[8]．

さて，(22 a) 式を (29) 式に代入すると，軸方向流量は

$$F(r_{\mathrm{M}}) = 2\pi\int_0^{r_{\mathrm{M}}} U^z r dr$$

$$= 2\pi\int_0^{r_{\mathrm{M}}}\left[U_\infty - \frac{\Omega_{\mathrm{C}}}{\lambda}J_0(\lambda r)\right] r dr = \pi r_{\mathrm{M}}^2 U_\infty . \quad (32)$$

となる．これは上の (iii) で述べたように，ベッセル函数型モデルにおいて旋回があるときの軸方向流量と旋回のないときの軸方向流量が積分領域 [0, r_{M}] で一致することを示している．バルク速度 U_{M} が単位断面積を通過する流量：

$$U_{\mathrm{M}} \equiv \frac{2\pi\int_0^a U^z r dr}{\pi a^2} = \frac{F}{\pi a^2}, \quad (33)$$

で定義されることを考え併せると，U_{M} とレイノルズ数無限大での旋回を伴わない一様流 U_∞ とが一致することがわかる；

$$U_{\mathrm{M}} = U_\infty \ \mathrm{at}\ Re = \infty. \quad (34)$$

一方，(18) 式と (22) 式を (30) 式に代入すると（単位長さ当りの）ヘリシティ総量が

$$H(r_{\mathrm{M}}) = 2\pi\int_0^{r_{\mathrm{M}}} \mathbf{U}\cdot\mathbf{\Omega} r dr = 2\pi\int_0^{r_{\mathrm{M}}} (U^z\Omega^z + U^\theta\Omega^\theta) r dr$$

$$= 2\pi\int_0^{r_{\mathrm{M}}}\left\{\left[U_\infty - \frac{\Omega_{\mathrm{C}}}{\lambda}J_0(\lambda r)\right]\Omega_{\mathrm{C}}J_0(\lambda r) + \frac{\Omega_{\mathrm{C}}}{\lambda}J_1(\lambda r)\left[-\Omega_{\mathrm{C}}J_1(\lambda r)\right]\right\} r dr$$

$$= -2\pi r_{\mathrm{M}}^2\frac{\Omega_{\mathrm{C}}^2}{\lambda}\left[J_0(\alpha_1^{(1)})\right]^2. \quad (35)$$

と与えられる．この式から

$$\lambda H(r_{\mathrm{M}}) = -2\pi r_{\mathrm{M}}^2 \Omega_{\mathrm{C}}^2\left[J_0(\alpha_1^{(1)})\right]^2 < 0 \quad (36)$$

となり，λH の符号は負となることがわかる．

3.2 逆流条件

流れの減速あるいは逆流を議論するために，減速や反転の程度を表すさまざまな尺度が考えられるが，ここでは，最も簡単に円管中心軸での主流速：

$$U^z(0)=U_\infty-\frac{\Omega_C}{\lambda}\quad\cdots\cdots(37)$$

を用いる．(32) 式からレイノルズ数無限大での一様な軸方向流速U_∞は

$$U_\infty=\frac{F}{\pi r_M^2}.\quad\cdots\cdots(38)$$

となる．また，(35) 式からΩ_C/λは

$$\frac{\Omega_C}{\lambda}=+\frac{1}{(2\pi)^{1/2}\alpha_1^{(1)}J_0(\alpha_1^{(1)})}|\lambda H|^{1/2}.\quad\cdots\cdots(39)$$

と表せる．これらから，中心での軸流速$U^z(0)$［(37) 式］は，軸方向流量Fと平均流のヘリシティ総量Hを用いて

$$U^z(0)=\frac{F}{\pi r_M^2}-\frac{1}{(2\pi)^{1/2}\alpha_1^{(1)}J_0(\alpha_1^{(1)})}|\lambda H|^{1/2}\quad\cdots\cdots(40)$$

と表せる．この式から直ちに，$U^z(0)<0$となる条件，すなわち中心軸で逆流が生じる条件が

$$\frac{F}{\pi r_M^2}<\frac{1}{(2\pi)^{1/2}\alpha_1^{(1)}J_0(\alpha_1^{(1)})}|\lambda H|^{1/2}.\quad\cdots\cdots(41)$$

と表せることがわかる．軸方向流量Fと平均流のヘリシティ総量Hとの関係を表すF–Hダイアグラムは図2のようになる．

(41) 式より，平均流のヘリシティ総量$|H|$が

$$H_C=\frac{2\alpha_1^{(1)}\left[J_0(\alpha_1^{(1)})\right]^2}{\pi}\frac{F^2}{r_M^3}.\quad\cdots\cdots(42)$$

で定義される臨界ヘリシティH_Cを超えたときに中心軸で逆流が生じることがわかる．ただし，λとr_Mの関係［(26) 式］を用いている．(42) 式で$\alpha_1^{(1)}$と$J_0(\alpha_1^{(1)})$は定数である．また，主流速が最大となる位置r_M（あるいはλ）は旋回の強さあるいはHの大きさに応じて変化する．λあるいはr_Mが決まった流れでは，臨界バルク・ヘリシティH_Cは軸方向流量の二乗F^2に比例することがわかる．

4. 実験結果の解析

理工学のさまざまな分野での重要性のため，旋回乱流の実験はCV型やWJ型などさまざまな条件下で行われてきている．このうち，第1節でも述べたように，軸流の反転が報告されているのはCV型の旋回乱流においてのみである．この型の旋回乱流を研究した近年の代表的な例として，Kitohの実験[5]とSteenbergenの実験[6]を挙げることができる．本稿では前者の結果を用いて解析を行なう．

4.1 速度分布

Kitohの実験での平均速度分布は図3のようになっている．平均周方向速度U^θ［図3(a)］は典型的な集中渦型（CV型）の分布を示している．すなわち，U^θは中心付近で剛体回転をし（$U^\theta\propto r$），その後，中心からの距離が遠くなるにしたがって距離に反比例して小さくなっている（$U^\theta\propto r^{-1}$）．ただしここで，管中心での周方向速度がゼロとは限らないことに注意されたい．このことは局所的な旋回中心と円管中心が必ずしも一致しないことを示している．前節までの理論解析では円管中心軸まわりの対称性を仮定していた．そのため，実験結果に見られるこの非対称性は軸流の減速の定量的な評価に影響を及ぼす可能性がある．一方，平均軸方向速度U^z［図3(b)］は流れのコア領域で減速を見せている．減速の度合いは大きく，管中心付近では逆流が生じている．中心軸上の軸流速$U^z(0)$で評価すると減速あるいは逆流の度合いは初期の段階（$z/d=5.7$から25.7まで）ではさらに大きくなっていき，やがて減衰し始める．

軸流速が最大となる位置r_M［(26) 式］は平均流に与えられるヘリシティによって変化する．ヘリシティの違いは実験での軸方向位置（z）の違いに対応すると考えられる．図3(b) からr_Mは

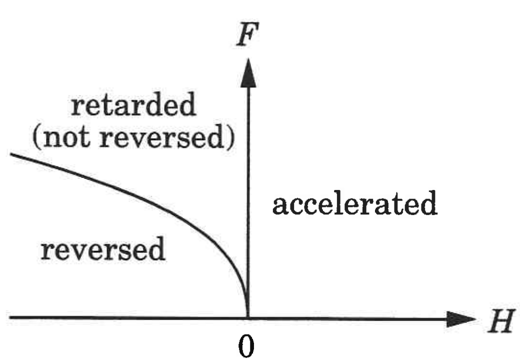

図2　F–Hダイアグラム

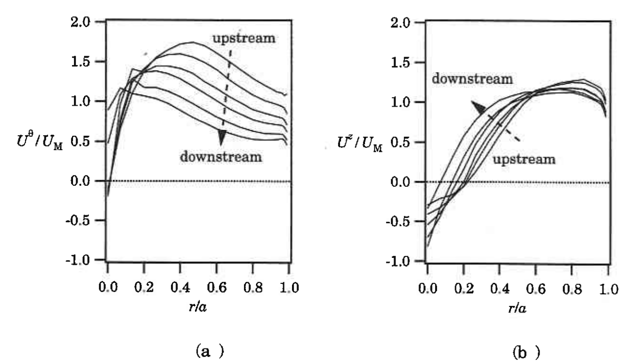

図3　平均速度の動径分布 (a) 周方向速度U^θ (b) 軸方向速度U^z

$$r_M/a = 0.84(z/d{=}5.7), 0.82(12.3), 0.80(19.0), 0.76(25.7), 0.76(32.4), 0.71(39.0). \quad \cdots(43)$$

と変化することがわかる．

4.2　平均流のヘリシティ密度分布

平均速度場の情報から平均流のヘリシティ密度 $h(=\mathbf{U}\cdot\boldsymbol{\Omega})$の分布を求めることができる．このことを詳しく見るためにhを

$$h \equiv \mathbf{U}\cdot\boldsymbol{\Omega} = U^\theta \Omega^\theta + U^z \Omega^z \equiv h^{(\theta)} + h^{(z)}. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(44)$$

のように二つの部分に分ける．つまり，周方向の速度と渦度のカップリングによるもの $[h^{(\theta)}(=U^\theta\Omega^\theta)]$ と軸方向速度と渦度のカップリングによるもの $[h^{(z)}(=U^z\Omega^z)]$ である．それぞれの動径分布を図4に列記した．この図から$h^{(\theta)}$は中心領域($0\leq r \lesssim 0.2$) とコア領域($0.2 \lesssim r \lesssim 0.7$) で必ず負であることがわかる．一方，$h^{(z)}$は中心領域で負，コア領域で正の寄与をしている．周方向速度U^θは全領域で常に正であるため，$h^{(\theta)}$の符号は $\Omega^\theta(=-dU^z/dr)$ の符号で完全に決まる．U^zの動径方向の勾配は$r=0$からr_Mの間で正であり，$r > r_M$で小さいながら負である．それゆえ，$h^{(\theta)}$は$r<r_M$で負であり，$r>r_M$で微小な正である．一方，軸方向渦度 $\Omega^z = [(1/r)d(rU^\theta)/dr]$ は全領域で正である．よって，$h^{(z)}$の符号はU^zの符号で決まる．それは，流れの逆転領域($0\leq r\leq r_R$)で負，他の領域で正である［r_R：軸方向速度がゼロになる動径位置］．それゆえ，$h^{(z)}$は($0\leq r<r_R$)の領域で負，その他で正となる．中心領域では$h^{(z)}$が支配的である．一方，コア領域では$h^{(z)}$と$h^{(\theta)}$は互いに逆符号でほぼ同じくらいの大きさをもっている．

これら二つの寄与を合わせたものが平均流のヘリシティ密度の動径分布を与える（図5）．円管の中心領域とコア領域で，平均流のヘリシティ密度 $h(=\mathbf{U}\cdot\boldsymbol{\Omega})$ は負である．

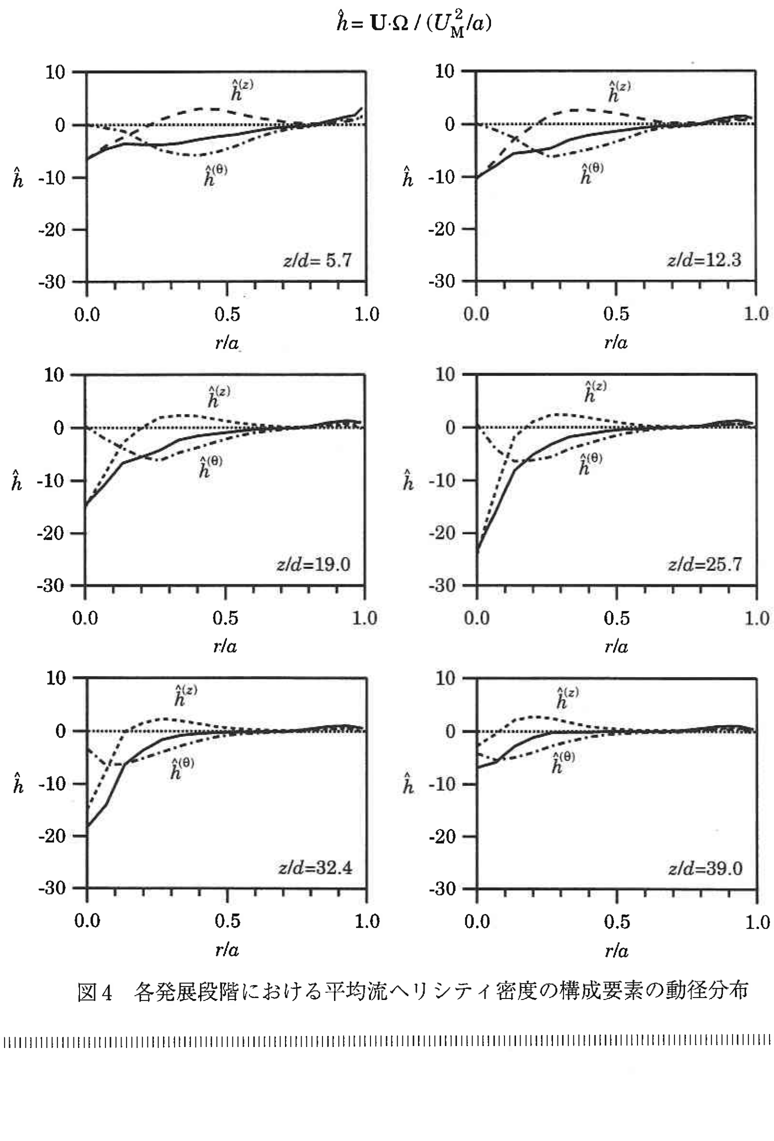

図4　各発展段階における平均流ヘリシティ密度の構成要素の動径分布

中心軸（$r=0$）で最小値（負で絶対値は最大）となっている．中心からの距離が増えると h の値はゼロに近づく．ヘ

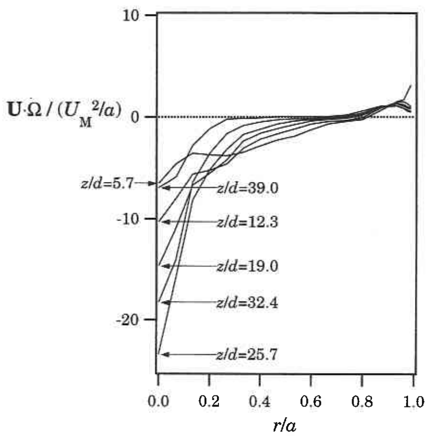

図5　平均流ヘリシティ密度 h の動径分布

リシティ密度の発展に関しては，$z/d=5.7$ から 25.7 にかけて中心の凹みあるいは逆流は大きくなっていき，その後小さくなる．中心近くのヘリシティ密度の発展は主流速 U^z の発展をそのまま反映している［図3(b)］．

4.3 バルク・ヘリシティ

平均流のヘリシティ総量あるいはバルク・ヘリシティ H は（35）式で与えられる．実験値から計算したヘリシティ密度［(44）式］に $2\pi r$ を掛け，$r=0$ から r_M まで積分すればよい．図5からわかるように，h の絶対値は中心軸上で最大で，中心から離れるにしたがって小さくなる．他方で，r を掛けるため中心付近のヘリシティ密度はバルク量には効かず，中心から離れたところの寄与が大きくなる．この二つの因子の兼ね合いのため，バルク・ヘリシティ H への寄与として最も重要なのはコア領域ということになる．実際，実験における $r\mathbf{U}\cdot\mathbf{\Omega}$ の動径分布は図6のようになる．

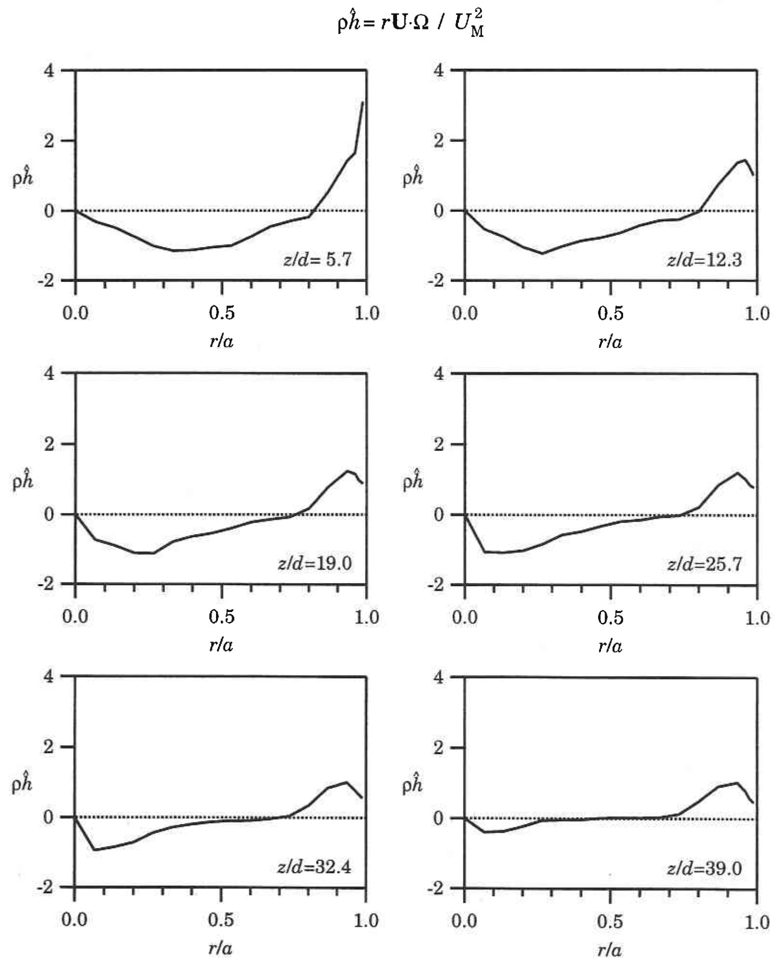

図6　平均流ヘリシティ密度のバルク・ヘリシティ H への寄与の動径分布

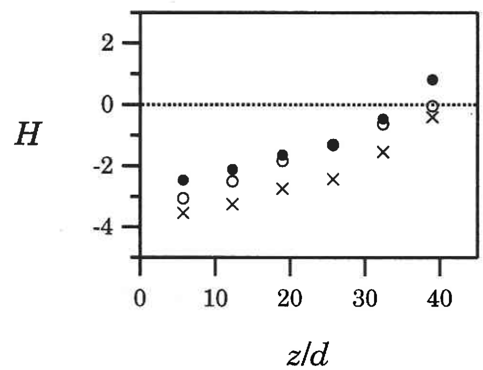

図7　バルク・ヘリシティの軸方向依存性　円管の直径 $d(=2a)$でスケールした軸方向距離 z/dに対するバルク・ヘリシティ H；積分領域［0, r_M］（×），［0, a］（●），［0.2a, r_M］（○）

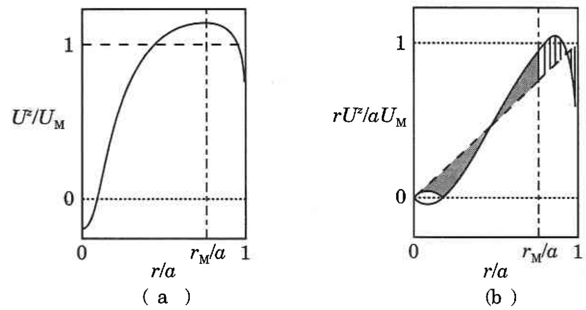

図8　旋回のない一様流と逆流を伴う旋回流の典型的動径分布（a）軸方向速度 U^z；旋回のない一様流（波線），旋回流（実線）（b）軸方向流量 Fへの寄与；旋回のない一様流（波線），旋回流（実線）

図6のそれぞれのグラフで正負の符号も含めた面積がバルク・ヘリシティ H（正確には $H/2\pi$）を与える．積分領域として［0, r_M］を採用して計算したバルク・ヘリシティ $H(r_M)$を軸方向距離 z/d に対してプロットしたのが図7である．$H(r_M)$の絶対値は下流に行くにしたがって小さくなっている．参考のため，積分領域として［0, a］を採用した場合（●）と［0.2a, r_M］を採用した場合（○）の結果も併記する．

5. 議　　論

以上のことを踏まえ，この節では（A）流量の保存性と（B）逆転条件という二つの点について調べていく．

5.1 流量の保存性について

第3節で示したように，積分領域として［0, r_M］を採用した変分解析に付随する大きな特徴の一つは，旋回乱流での軸方向流量とレイノルズ数無限大の極限（$Re \to \infty$）で旋回を伴わない乱流の軸方向流量が一致することである［式(32)］．この点を実験と比較して吟味してみる．

レイノルズ数無限大の極限で，旋回を伴わない円管乱流の平均流の軸方向速度は一様な動径分布をもつ［図8(a)］．この一様速度を $U_\infty(=U_M)$ と書き表した［(22) 式］．このとき，積分領域［0, r_M］での軸方向流量 $F_\infty(r_M)$ は

$$F_\infty(r_M) = 2\pi\int_0^{r_M} rU^z dr = 2\pi\int_0^{r_M} rU_\infty dr = \pi r_M^2 U_M. \quad \cdots\cdots (45)$$

となる．一様速度 U_∞ の流量 F への寄与は中心からの距離 r に比例する［図8(b)］．一方，旋回乱流の平均流の軸方向速度の動径分布を模式的に表すと図8(a) のようになる．また，軸方向速度の流量 F への寄与は図8(b) のように描くことができる．

流量に対するこれら二つの寄与の違いは，図8(b) の影領域の正負の符号も含めた面積で表すことができる．内側領域（$0 \leq r/a \leq 0.4$）では一様流からの寄与のほうが，旋回を伴う流れの軸方向速度からの寄与よりも大きく，外側領域（$0.4 \leq r/a \leq r_M$）では逆である．したがって，積分領域［0, r_M］全体にわたって足し合わされた両者の差はわずかであるとみなしてもあながち不適切ではない．このことを詳しく見るために，

$$\Delta F = \frac{F(r_M) - F_\infty(r_M)}{F_\infty(r_M)} \quad \cdots\cdots (46)$$

で定義される相対的な流量の差を考える．ここで，$F(r_M)$ は旋回乱流における積分領域［0, r_M］に基づいた流量である［(29) 式と (31) 式］．流れの各発展段階において，流量への寄与がどのような動径分布をもつかを ΔF とともに図9に示した．ΔF の値は-0.091から$+0.012$，すなわち-9％～$+1$％の範囲に収まっている．この結果は，積分領域として［0, r_M］を用いているかぎり，旋回乱流での軸方向流量と大きなレイノルズ数で旋回を伴わない円管乱流の軸方向流量との間に大きな差はないことを示している．この意味で，ベッセル関数型モデルは実在の旋回乱流をよく記述しているといえる．

5.2 逆流条件について

無次元化したバルク・ヘリシティを

$$\hat{H} = 2\pi\int_0^{\rho_M} \hat{\mathbf{U}}\cdot\hat{\mathbf{\Omega}}\rho d\rho, \quad \cdots\cdots (47)$$

と定義する．ここで ρ は円管の半径 a でスケールされた中心からの距離，$\hat{\mathbf{U}}$ はバルク速度でスケールされた速度，また $\hat{\mathbf{\Omega}}$ はスケールされた渦度であり，それぞれ

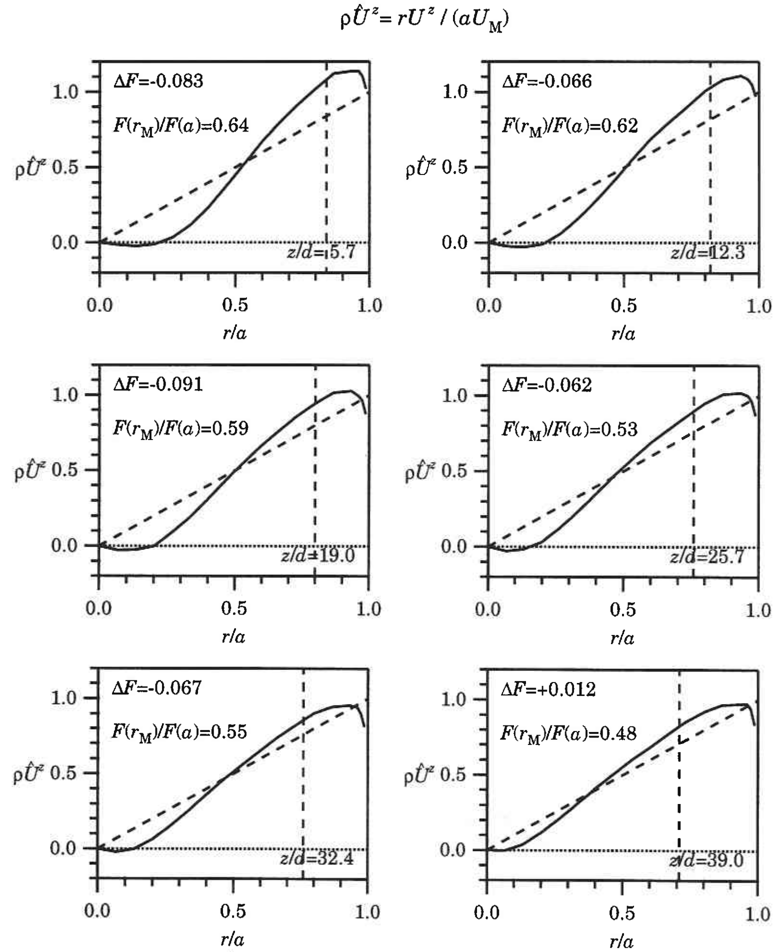

図9　各発展段階での軸方向流量Fへの寄与の動径分布

$$\rho=\frac{r}{a},\ \hat{\mathbf{U}}=\frac{\mathbf{U}}{U_{\mathrm{M}}},\ \hat{\mathbf{\Omega}}=\frac{\mathbf{\Omega}}{U_{\mathrm{M}}/a}. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(48)$$

と定義されている．無次元化されたバルク・ヘリシティ（$\hat{H}$）は本来のバルク・ヘリシティ（H）と

$$\hat{H}=2\pi\int_0^{\rho_{\mathrm{M}}}\hat{\mathbf{U}}\cdot\hat{\mathbf{\Omega}}\rho d\rho=2\pi\int_0^{r_{\mathrm{M}}}\frac{\mathbf{U}}{U_{\mathrm{M}}}\cdot\frac{\mathbf{\Omega}}{U_{\mathrm{M}}/a}\frac{r}{a}d\left(\frac{r}{a}\right)=\frac{1}{aU_{\mathrm{M}}^2}H \quad \cdot(49)$$

の関係で結ばれている．(26) 式を用いると臨界ヘリシティH_{C}［(42) 式］は

$$H_{\mathrm{C}}=2\pi\alpha_1^{(1)}\left[J_0(\alpha_1^{(1)})\right]^2 r_{\mathrm{M}}U_\infty^2. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(50)$$

と表される．よって，スケールされた臨界バルク・ヘリシティ$\hat{H}_{\mathrm{C}}$は

$$\hat{H}_{\mathrm{C}}=\frac{1}{aU_{\mathrm{M}}^2}H_{\mathrm{C}}\simeq 2\pi\alpha_1^{(1)}\left[J_0(\alpha_1^{(1)})\right]^2\frac{r_{\mathrm{M}}}{a} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(51)$$

となる．この表式中，$\alpha_1^{(1)}$と$J_0(\alpha_1^{(1)})$はそれぞれ（20）式および

$$J_0(\alpha_1^{(1)})=-0.4 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(52)$$

で与えられ，またr_{M}/aについては実験値［(43) 式］を用いることができる．したがって，スケールされた臨界バルク・ヘリシティは評価可能な量である．臨界バルク・ヘリシティで規格化されたバルク・ヘリシティは

$$\frac{H}{H_{\mathrm{C}}}=\frac{\hat{H}}{\hat{H}_{\mathrm{C}}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(53)$$

のようにどちらもスケールされたバルク・ヘリシティと臨界バルク・ヘリシティの比で表現することができる．(51) 式と (53) 式から，管中心の軸方向流速［(40) 式］は

$$\frac{|U^z(0)|}{U_M} = 1 - \left(\frac{|H|}{H_C}\right)^{1/2}, \quad \cdots\cdots\cdots (54)$$

と表される．この式は $|U^z(0)|$ がバルク・ヘリシティの1/2乗，$|H|^{1/2}$ で変化することを示している．実験結果を用いて，中心での軸方向速度 $U^z(0)/U_M$ をバルク・ヘリシティ H/H_C に対してプロットすると図10のようになる．

まず，最初の数段階ではバルク・ヘリシティの絶対値 $|H|$ が減少するにもかかわらず，$|U^z(0)|$ すなわち管中心の軸方向速度で表現される逆流の度合いは逆に大きくなっている．これは，円管に流入した旋回流が発達途上で，乱流場として充分に馴染んでいないためと考えられる．

また，バルク・ヘリシティ H が臨界バルク・ヘリシティ H_C より小さい ($|H/H_C|<1$) にもかかわらず，流れの反転が起きている．理論とのこうした不一致が生じる原因は以下のように推察される．すでに述べたように，CV型旋回乱流の実験で，軸方向渦度 Ω^z は管の中心付近に集中している．それに対して，理論でゼロ次の第一種ベッセル函数 J_0 を用いて表現された軸方向渦度 Ω^z［(18 a) 式］はコア領域でも有限の値をもっている．その結果，ヘリシティ密度 h，特に $h(=U^z\Omega^z)$ はコア領域で実験値と比較して大きな値をもつことになる（図4と図5を参照）．バルク・ヘリシティへの寄与は中心から遠いところで相対的に大きくなるので，モデルで計算するバルク・ヘリシティ H は実際よりも大きくなる傾向がある．このことが，ベッセル函数モデル［(18) 式と (22) 式］を基にして評価した臨界バルク・ヘリシティ H_C が過大評価となる理由である．

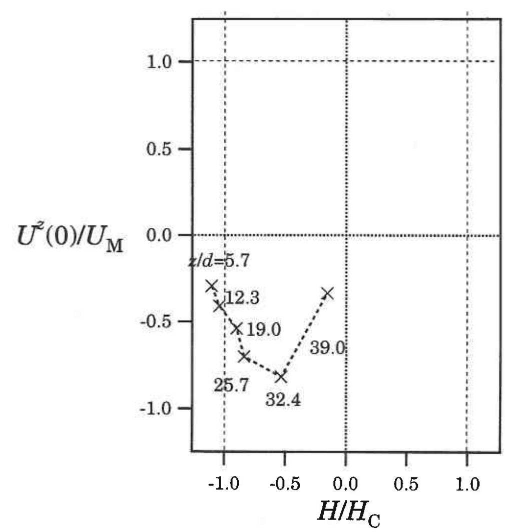

図10　バルク・ヘリシティ H に対する中心での軸方向速度 $U^z(0)$

6. まとめと今後の展望

ヘリシティ概念に基づく変分解析を旋回乱流に適用すると，ベッセル函数型の渦度および速度分布が得られる．この解析を用いて，旋回乱流で軸方向流速が逆転する条件を解析的に求めた．その結果，流量の二乗に比例する臨界バルク・ヘリシティが存在し，平均流のヘリシティ総量が臨界値を超えると逆転が生じることがわかった．理論解析の結果を検証するために，代表的実験研究の結果をヘリシティ概念を用いて整理し，理論と比較した．ベッセル函数型分布の特徴である流量の保存性は実験結果と比較的良く一致した．一方，臨界バルク・ヘリシティに関して理論は過大評価を導くことが示された．現在コア領域まで含む積分領域を中心付近のみに限ることで実験値との一致は良くなると予想される．また，理論では流れが充分発達し乱流としてなじんだ状態を想定していることから，旋回の弱い流れの実験データを解析に加えることで理論解析との差は埋まると期待される．

（2002年12月9日受理）

参　考　文　献

1) C. O. Paschereit, E. Gutmark, and W. Weisenstein, "Coherent structures in swirling flows and their role in acoustic combustion control," Phys. Fluids **11**, 2667 (1999).
2) Elsner and Kurzak, "Characteristics of turbulent flow in slightly heated free swirling jets," J. Fluid Mech. **180**, 147 (1987).
3) J. B. Klemp, "Dynamics of tornadic thunderstorms," Ann. Rev. Fluid Mech. **19**, 369 (1987).
4) K. Shibata and Y. Uchida, "Interaction of molecular bipolar flows with interstellar condensations: Sweeping magnetic twist mechanism and the blobs in Lynds 1551 molecular flow," Publ. Astron. Soc. Japan. **42**, 36 (1990).
5) O. Kitoh, "Experimental study of turbulent swirling flow in a straight pipe," J. Fluid Mech. **225**, 445 (1991).
6) W. Steenbergen, "Turbulent pipe flow with swirl," Dissertation, Eindhoven University of Technology (1995).
7) N. Yokoi and A. Yoshizawa, "Statistical analysis of the effects of helicity in inhomogeneous turbulence," Phys. Fluids A**5**, 464 (1993).
8) A. Yoshizawa, N. Yokoi, S. Nisizima, S.-I. Itoh, and K. Itoh, "Variational approach to a turbulent swirling pipe flow with the aid of helicity," Phys. Fluids **13**, 2309 (2001).