

直円管内旋回流の $k-\epsilon-h$ モデルによる数値解析

—圧力-速度相関項効果を組み込んだ $k-\epsilon$ 型モデルの検討—

Numerical Simulation of Turbulent Swirling Flow in a Straight Pipe Using Nonlinear $k-\epsilon-h$ Models

西島 勝一*・吉澤 徹*・横井 喜充*

Shoiti NISIZIMA, Akira YOSHIKAWA and Nobumitsu YOKOI

1. はじめに

工学における乱流の数値解析では、 $k-\epsilon$ モデルが多用されている。このモデルについては工学上重要な幾つかの乱流を的確に予測出来ないという欠点が指摘され、その一つに旋回流での特性再現の問題点があげられている。その欠点の改良を目指して多くの試みがなされている¹⁻⁴⁾。

本論文では、横井・吉澤により提案されたヘリシテイ (h) 式を含む $k-\epsilon-h$ 3 方程式乱流モデル⁵⁾を、直円管内旋回流の数値解析に適用する。実験結果や応力方程式モデルによる数値解析結果等との比較・検討を行ない、3 方程式乱流モデルの評価をおこなう。

吉澤は、後方ステップ乱流や建物後方の流れにおいては、乱流エネルギー (k) 式中の圧力-速度相関項が有意義な役割を持っているとの直接数値解析 (Direct Numerical Simulation : DNS) 結果を、 $k-\epsilon$ モデルへ反映させることを試みた。統計理論 (Two-Scale Direct-Interaction Approximation : TSDIA) を用いて圧力-速度相関項を乱流エネルギー (k) 式へ組み込んだモデルを、最近提案した⁶⁾。このモデルを直円管内旋回流の数値解析に適用し、その結果を、特に実測における管軸中心部分での k 増大現象に注目し、解析・検討を行なう。

2. $k-\epsilon-h$ 3 方程式乱流モデル

2-1 低レイノルズ数型 $k-\epsilon$ モデル

ここでは、壁乱流へ適用するために安倍らの低レイノルズ数型 $k-\epsilon$ モデル⁷⁾と結合させ、次の諸式を連立させて解析をすすめる。その際、安倍らが最適化した定数値は変化させないで用いる⁸⁾。

$$\frac{D\bar{v}_\alpha}{Dt} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{v}_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \right) \bar{v}_\alpha = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(R_{\alpha\alpha} + \nu \frac{\partial \bar{v}_\alpha}{\partial x_\alpha} \right) \dots (1)$$

$$\frac{\partial \bar{v}_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0 \dots (2)$$

$$\frac{Dk}{Dt} = R_{ab} \frac{\partial \bar{v}_b}{\partial x_a} - \epsilon + \frac{\partial}{\partial x_a} \left\{ \left(\nu + \frac{\nu_{TN}}{C_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_a} \right\} \dots (3)$$

$$\frac{D\epsilon}{Dt} = C_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{k} R_{ab} \frac{\partial \bar{v}_b}{\partial x_a} - C_{\epsilon 2} f_\epsilon \frac{\epsilon^2}{k} + \frac{\partial}{\partial x_a} \left\{ \left(\nu + \frac{\nu_{TN}}{C_{\epsilon 3}} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_a} \right\} \dots (4)$$

ヘリシテイは、 $h \equiv (\bar{v}'_\alpha \omega'_\alpha)$ と定義され、その発展方程式は、

$$\begin{aligned} \frac{Dh}{Dt} &= R_{ab} \frac{\partial \bar{\omega}_b}{\partial x_a} - \bar{\omega}_a \frac{\partial R_{ab}}{\partial x_b} - C_{h1} f_\epsilon \frac{\epsilon}{k} h + \frac{\partial}{\partial x_a} \left\{ \left(\nu + \frac{\nu_{TN}}{C_{h2}} \right) \frac{\partial h}{\partial x_a} \right\}, \\ C_{h1} &\approx 3., \quad C_{h2} \approx 1. \end{aligned} \dots (5)$$

で与えられる^{5,9)}。

ここで、 (\bar{v}, v') は速度のアンサンブル平均部分とそれからのずれ (擾乱部分)、 \bar{p} は圧力、 k は乱流エネルギー、 ϵ はエネルギー散逸率、 $(\bar{\omega}, \omega')$ は渦度の平均部分と擾乱部分を各々表している。

2-2 レイノルズ応力表現

式 (5) までに含まれるレイノルズ応力 R_{ab} 、渦粘性 ν_{TN} は、次の通り吉澤・横井らにより提案されている^{5,10,11)}。

$$\begin{aligned} R_{ij} &= - \frac{2}{3} k \delta_{ij} + \nu_{TN} S_{ij} \\ &\quad - C_{h\Omega} \frac{\nu_{TN}^2}{\epsilon} \left[\epsilon_{ilm} \Omega_{jm} \frac{\partial h}{\partial x_l} + \epsilon_{jlm} \Omega_{im} \frac{\partial h}{\partial x_l} \right]_D, \\ S_{ij} &= \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i}, \quad \Omega_{ij} = \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \end{aligned} \dots (6)$$

渦粘性表現は次の通りとする。

*東京大学生産技術研究所 情報・システム部門

研 究 速 報

$$v_{TN} = v_i \frac{(1 + C_{v\chi} C'_v)}{(1 + C'_v \chi^2)^{2/3}}, \quad v_i = C_{v\chi} f \frac{k^2}{\varepsilon}, \quad C'_v = 0.0214,$$

$$C_{v\chi} = 14.5, \quad S = \sqrt{S_{ij} S_{ij}}, \quad \Omega = \sqrt{\Omega_{ij} \Omega_{ij}}, \quad C_s = 0.5,$$

$$\chi = \frac{k}{\varepsilon} \sqrt{C_s S^2 + (1 - C_s) \Omega^2 \left\{ 1 + C_{h3\Omega} \left(\frac{k^2}{\varepsilon^2} \nabla h \right)^2 \right\}},$$

$$C_{h3\Omega} = 0.2 \left(\frac{\Omega_s}{\Omega_s \text{ inlet}} \right), \quad \Omega_s = 2\pi\rho \int_0^{r_0} \frac{\bar{v}_z \bar{v}_\theta r^2}{\rho \pi r_0^3 V_{zm}^2} dr \quad \dots (7)$$

ここで、 Ω_s は旋回**の強さ**、 ρ は密度、 V_{zm} は軸方向流速の平均値を表している。

式 (7) の χ は、 S や Ω 、 h の影響を乱流長さスケールへ反映させることと、 S_{ij} 等の異常な振る舞いを抑制し、数値安定性を向上させるために導入されている⁸⁾。定数 $C_{h3\Omega}$

の $\left(\frac{\Omega_s}{\Omega_s \text{ inlet}} \right)$ は、 Ω_s が弱くなる (旋回**の無くなる**円管内乱

流へ近づいて行く) 下流で発生し易い数値不安定を押さえるために附加した。

2-3 直円管内旋回乱流への適用

図1の通り座標をとり、計算領域入口において旋回**の強さ** $\Omega_s = 0.24$ 、レイノルズ数 $Re = (V_{zm} 2r_0) / \nu = 50,000$ の実験値¹²⁾に合わせて数値解析¹³⁾を進め、その結果を実験結果¹²⁾や応力モデルによる数値解析結果^{14,15)}と比較し、モデルの検討を行なった。なお、本論文では、(6)のレイノルズ応力式 R_{ij} の右辺第3項を省いて、すなわち $C_{h\Omega} = 0$ として解析を行なった。

図2、図3は、管軸方向流速 \bar{v}_z と旋回方向流速 \bar{v}_θ の解析結果を、実測値等と比較している。 \bar{v}_z に関しては、管軸領域での減速特性を過度に評価し過ぎていることが判る。図3の \bar{v}_θ は、下流 (計算領域出口: □印) 域での過

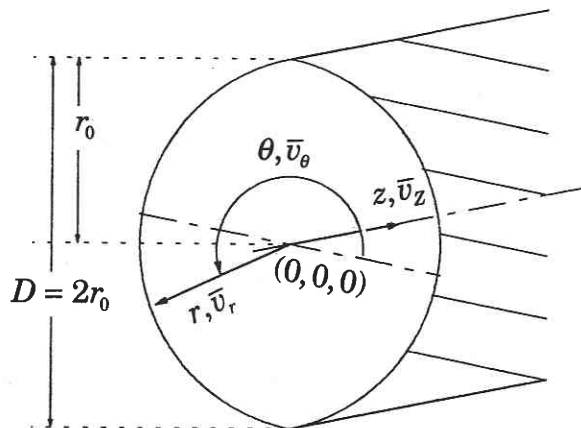


Fig. 1 Cylindrical coordinate system of a pipe flow.

大評価と、中流域 (△印) での過小評価の両方が見られる。なお、図中において実測値は大きな○・△・□印で、応力モデルによる解析結果は二重の三角 (中流域) ・四角形 (最下流) 印で表され、k-εモデルによる解析結果は点線で記されている。

図4、図5はレイノルズ応力 R_{rr} 、 $R_{r\theta}$ の振る舞いを示している。円周方向流速の特性再現への寄与が大きい $R_{r\theta}$ (図5) 分布からは、計算領域入口 (○印) の $r/r_0 \approx 0.05$ で $R_{r\theta} < 0$ を算出している k-ε-h モデルの解析値と、ゼロに近い実験値との差異が目立つ。なお、図中の応力モデルによる解析結果¹⁴⁾は、計算領域入口でレイノルズ応力値が実験値と合致するように決定されたもので、k-ε型モデルに見られる上記問題点は現れていない。式 (6) の右辺第3項を省く ($C_{h\Omega} = 0$) と $R_{r\theta}$ は、

$$R_{r\theta} = v_{TN} S_{r\theta}, \quad S_{r\theta} = r \frac{d}{dr} \left(\frac{\bar{v}_\theta}{r} \right) = \frac{d\bar{v}_\theta}{dr} - \frac{\bar{v}_\theta}{r} \quad \dots (8)$$

となる。このような k-ε 型モデルは、(8) から \bar{v}_θ の管軸

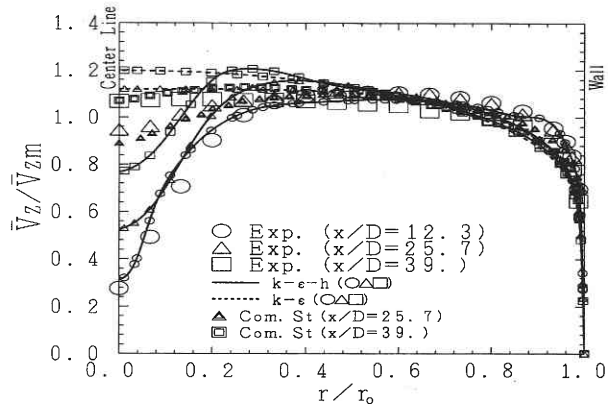


Fig. 2 Axial velocity \bar{v}_z of a swirling flow.

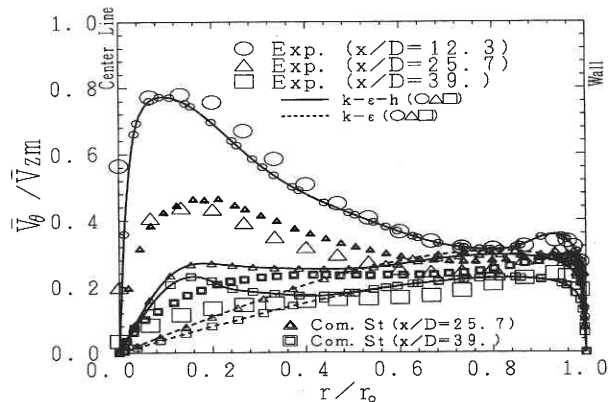


Fig. 3 Tangential velocity \bar{v}_θ of a swirling flow.

近くの変曲点で極端な負の $R_{r\theta}$ 値を算出するものとなっており、実験結果と異なるこの点を解消しなければ旋回流特性再現は難しいと考えられる。

その一つの改良法として、本モデルを検討した。このモデルでは、(7) 式の $C_{h3\Omega}$ 項を有値として、 χ 値を大きくし、 $v_{TN} \cdot R_{r\theta}$ 値を抑制する効果を試みている。図2-図5から、このモデルによって定性的には旋回流特性を再現出来ることがわかった。しかし、本モデルは χ と v_{TN} を通して全 R_{ij} 成分を一様に抑制するものとなっており、小林・依田¹⁾が数値実験的に検証した $R_{r\theta}$ 成分だけが(旋回流の管軸付近で)他成分と比較して(非等方的に)ゼロに近い(図4, 図5の実験結果からも見てとれる)現象を再現することは困難と予想される。

例えば、(6) R_{ij} 式の右辺第3項の定数 $C_{h\Omega}$ を、 $R_{r\theta}$ 成分上で右辺第2項と同第3項が打ち消しあう様に決定し、 $R_{r\theta}$ 値を実験結果に近い値に近似するなどの改良が考えられる。このような、レイノルズ応力各成分の(特に管軸付近における)非等方性の強いモデルの検討は興味ある課題である。

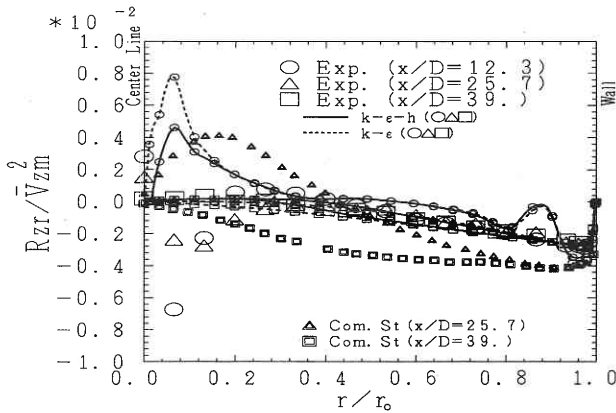


Fig. 4 Reynolds stress $R_{r\theta}$ of a swirling flow.

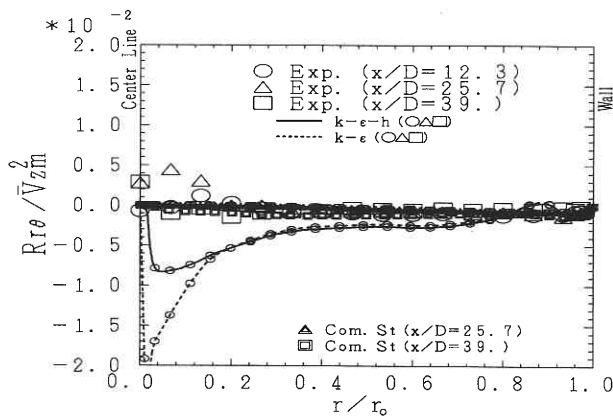


Fig. 5 Reynolds stress $R_{r\theta}$ of a swirling flow.

3. 圧力-速度相関項を組み入れた $k-\epsilon-h$ モデル

3-1 円管内旋回流における乱流エネルギー特性

$k-\epsilon$ 型モデルによる解析で再現できない旋回流特性の一つの問題点に、 r 方向で管軸へ向かって乱流エネルギー k 値が増大しその突起形状が持続する現象が挙げられる。図6の実験結果¹²⁾でも、最下流(大きな□印)においてさえ、 k が $r=0$ へ向かって突起的に増加し、その形状が持続していることがわかる。同様の現象は、W. Steenbergenの実験結果¹⁶⁾からも報告されている。

応力モデルにより同じ直円管内乱流の解析を行なった鷲津¹⁵⁾や大瀧¹⁷⁾は、この突起持続現象は円管中心付近での流れの中心の振れに起因したり、実験時のスワラーからの長周期の乱れに起因するもので、レイノルズ平均モデルで再現出来なくても問題ないとの、知見を示している。

図6に、2-3の数値解析で得られた k の分布を示す。それを $k-\epsilon$ モデルの解析結果と比較すると、管軸中心部分での k 値を多少増加させる傾向は見られるが、定量的には不十分である。応力モデルによる解析結果は、突起の形状は見られないが、領域で $r \approx 0$ の k 値の顕著な増大を実験値と同様に再現していることが判る。

森西・中林・小林はDNSによって直円管内旋回流の解析¹⁸⁾を行なったが、その結果からは、管軸付近での k の突起の増大現象が見られ、 k 式内の圧力拡散項の振る舞いによって $r \approx 0$ 域での乱流エネルギー増大現象が引き起こされていることが示されている。

3-2 圧力-速度相関項を組み入れたモデル

吉澤は、後方ステップ乱流や建物後方の流れにおいては、乱流エネルギー(k)式中の圧力-速度相関項が有意義な役割を持っているとのDNS結果を、 $k-\epsilon$ モデルへ反映させるを試み、統計理論的に次のモデルを導出した⁶⁾。乱流エ

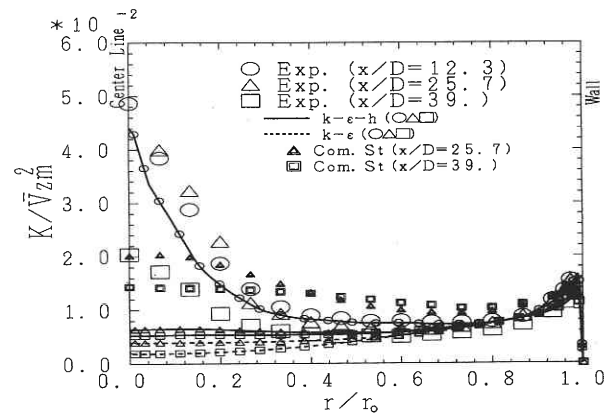


Fig. 6 Turbulence energy K of a swirling flow.

研究速報
 ネルギーk式(3)に、圧力-速度相関項 $T_{KPi}^{(2)}$ を附加し、

$$\frac{\partial k}{\partial t} = -\bar{v}_a \frac{\partial k}{\partial x_a} + R_{ab} \frac{\partial \bar{v}_b}{\partial x_a} - \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_a} \left(\frac{v_{TN}}{C_k} \frac{\partial k}{\partial x_a} \right) + \frac{\partial}{\partial x_a} \left(v \frac{\partial k}{\partial x_a} \right) + T_{KPi}^{(2)} \quad (9)$$

に代替するモデルである。附加される項は、次の通り提案されている。

$$T_{KPi}^{(2)} = -\xi_{kij} \frac{\partial K}{\partial x_j} + \xi_{\varepsilon ij} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} + C_{KP3} \frac{K^4}{\varepsilon^3} \nabla^2 U_i, \quad C_{KP3} = -0.0057 \quad \dots \dots \dots (10)$$

$$\xi_{kij} = C_{KP1} \frac{K^2}{\varepsilon} \left(\frac{3}{10} \frac{K}{\varepsilon} S_{ij} - \frac{1}{6} \frac{K}{\varepsilon} \Omega_{ij} \right), \quad C_{KP1} = 0.12 \quad \dots \dots \dots (11)$$

$$\xi_{\varepsilon ij} = C_{KP2} \frac{K^3}{\varepsilon^2} \left(\frac{3}{10} \frac{K}{\varepsilon} S_{ij} - \frac{1}{6} \frac{K}{\varepsilon} \Omega_{ij} \right), \quad C_{KP2} = 0.064 \quad \dots \dots \dots (12)$$

3-3 新しいモデルの直管管内旋回流への適用

今回は、式(10)第1式の右辺第3項だけを附加し、すなわち

$$C_{KP1} = 0, \quad C_{KP2} = 0, \quad C_{KP3} = -0.006, \quad \dots \dots \dots (13)$$

とし、式(3)を式(9)に置き換えて、2-3と同様の数値解析を行なった。

図7に円周方向流速 \bar{v}_θ の結果を、図8にそれと関連の強いレイノルズ応力 Rr_θ の分布を示している。軸方向流速や R_r の結果も同様であるが、先の圧力-速度相関項無し=式(3)モデルによる解析結果と比べてあまり変化が見ら

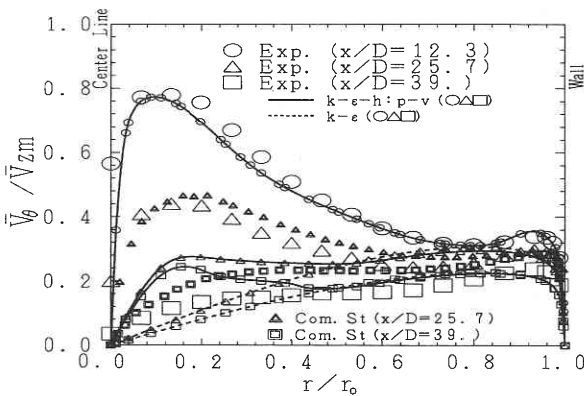


Fig. 7 Tangential velocity \bar{v}_θ of a swirling flow calculated by the $k-\varepsilon-h$ model incorporated with mean-flow effects on the pressure-velocity correlation.

れない。図7で最下流域(□印付き実線)の \bar{v}_θ 値が $r/r_0 \approx 0.3$ で大きくなっていることが見られる程度である。

しかし、図6と図9を比較すると管軸付近でのkの減衰傾向に大変化が起きていることが判る。図6の式(3)モデルによる結果では、管中央部分において、下流に行くにしたがってkが減衰している。しかし、図9の結果は、中流域よりも最下流のk値の方が増大していることを示している。また、圧力-速度相関項を附加したモデルによる解析結果は、乱流エネルギー値を管中央部で増大させること、突起的形状は実現出来ていないことを示している。この時の、解析領域最下流における乱流エネルギー式の収支を図10に示す。

図中では、式(9)の右辺第1項 $-\bar{v}_a \frac{\partial k}{\partial x_a}$ をCon., 同第2項

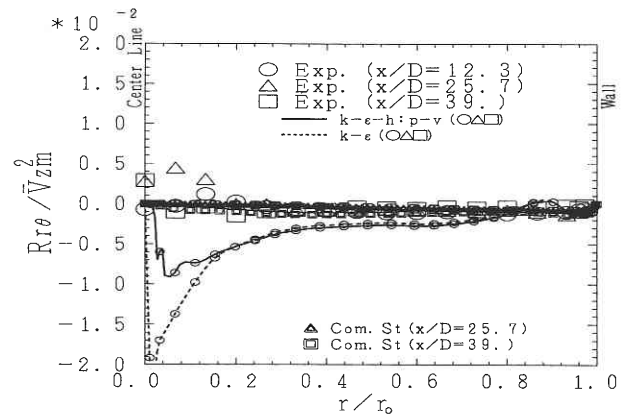


Fig. 8 Reynolds stress Rr_θ of a swirling flow calculated by the $k-\varepsilon-h$ model incorporated with mean-flow effects on the pressure-velocity correlation.

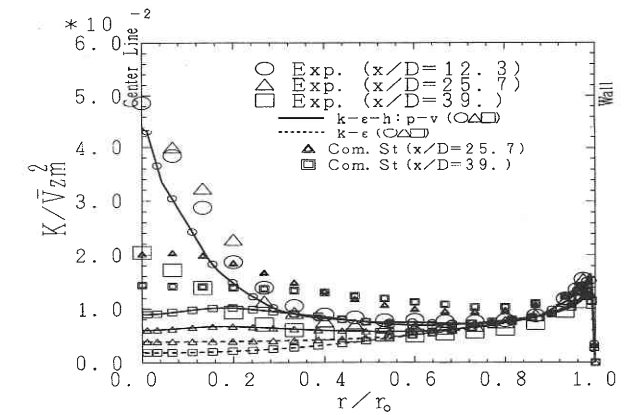


Fig. 9 Turbulence energy k of a swirling flow calculated by the $k-\varepsilon-h$ model incorporated with mean-flow effects on the pressure-velocity correlation.

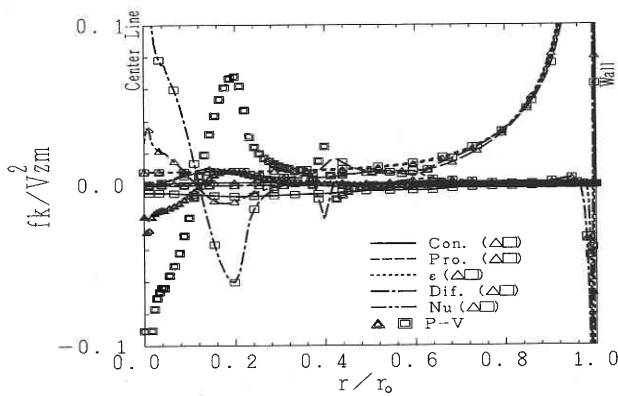


Fig. 10 Budget of turbulence energy profiles of a swirling flow calculated by the $k-\varepsilon-h$ model incorporated with mean-flow effects on the pressure-velocity correlation.

$$R_{ab} \frac{\partial v_b}{\partial x_a} \text{ を Pro., 同第4項 } \frac{\partial}{\partial x_a} \left(\frac{v_{TN}}{C_k} \frac{\partial k}{\partial x_a} \right) \text{ を Dif., 同第5項}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_a} \left(v_a \frac{\partial k}{\partial x_a} \right) \text{ を Nu, 新たに附加された最後の項 } T_{KPI}^{(2)} \text{ を P-V}$$

と各々記している。新しい圧力-速度相関項が円管中央部で、しかも下流において大きな値を持っていることが判る。

この新しいモデルは、その導出の動機づけとなった後方ステップ乱流や建物後方の流れの解析を通して、モデル定数等の最適化を計る必要が有る。そこで最適化された圧力-速度相関項を附加した $k-\varepsilon-h$ モデルによって、再度直円管内旋回流の解析を試みることは、興味深い課題である。

4. 結 論

統計理論的に導出された $k-\varepsilon-h3$ 方程式乱流モデルを、その定数等の最適化を図りつつ、直円管内旋回流の解析に適用した。この解析結果を、実験値や応力方程式モデル等他の数値解析結果と比較・検討した。その結果、このモデルは、管軸方向流速 \bar{v}_z と旋回方向流速 \bar{v}_θ の旋回特性を、定性的には再現できることがわかった。定量的精度の

改善のために、レイノルズ応力各成分間の強い非等方性も表現出来るモデルへの改良が必要であることが示された。

吉澤は、圧力-速度相関項の効果を取り込んだ $k-\varepsilon$ 型モデルを提案したが、このモデルを直円管内旋回流の解析に適用した。この結果も、実測結果や他の数値解析結果と比較・検討された。検討結果からこのモデルは、旋回流特性の一つである乱流エネルギーの管中央での増大現象を促進する効果があることがわかった。後方ステップ乱流や建物後方の流れの解析を通し、モデル定数等の最適化を行い、改めて直円管内旋回流の解析へ再適用することは、興味深い課題であろう。

(2002年11月12日受理)

参 照 文 献

- 1) 小林・依田, 機論, B 52-481 (1986) 3230.
- 2) 河村・三島, 機論, B 57-536 (1991) 1251.
- 3) 西島・横井, 機論, B 58-553 (1992) 2714.
- 4) 西島, 生産研究, 51-1 (1999) 21.
- 5) Yokoi, N. and Yoshizawa, A., Phys. Fluids, A (1993), Vol. 5, pp. 464-477.
- 6) Yoshizawa, A., Phys. Fluids (2002), Vol. 14, pp. 1736-1744.
- 7) 安倍・長野・近藤, 機論, B 58-554 (1992) 3003.
- 8) 西島, 生産研究, 50-1 (1998) 15.
- 9) 西島, 生産研究, 54-1 (2002) 46.
- 10) Yoshizawa, A., Yokoi, N., Nisizima, S., Itoh, S.-I., and Itoh, K., Phys. Fluids (2001), Vol. 13, pp. 2309-2319.
- 11) Yoshizawa, A., Hydrodynamic and Magnetohydrodynamic Turbulent Flows: Modelling and Statistical Theory (Kluwer, 1998).
- 12) Kitoh, O., J. Fluid Mech. (1991), Vol. 225, pp. 445-479.
- 13) 西島, 生産研究, 52-1 (2000) 27.
- 14) 清水・吉田, 第29回伝熱シンポ (1992), A 234, pp. 385-386.
- 15) 鷲津・島・岡本, 第12回数値流体力学シンポジウム講演論文集 (1998) 185.
- 16) W. Steenbergen, Turbulent Pipe Flow with Swirl. 1995.
- 17) 大瀧元啓, 応力方程式モデルによる円管内旋回流の数値予測, 修士論文 (静岡大学), (2001) 1.
- 18) 森西・中林・中島, 第16回生研 NST シンポジウム講演論文集 (2001), pp. 30-35.