研究速報

複数気泡系に存在する未知の特徴周波数
——遷移周波数——
An Unknown Characteristic Frequency Appearing in a Multibubble System in an Acoustic Field
—— the Transition Frequency ——

井田真人*・谷口伸行**・小林敏雄***
Masato IDA, Nobuyuki TANIGUCHI and Toshio KOBAYASHI

1．はじめに

音場中での複数気泡のダイナミクスは様々な分野で研究されてきており[1-12]，気泡間の音響的相互作用が気泡自身の音響的性質を変化させることが知られている[1-6,8,9]．Shima[1]は非粘性液体中で相互作用する異なるサイズの二気泡の共振周波数を見積もるための理論式を導出し，それぞれの気泡が二つの共振周波数を持つことを示した．それらの共振周波数は気泡間距離の減少に伴い上昇もしくは下降する．Zabolotskaya[2]はその共振周波数の変化が気泡間の位相差の変化を引き起こし，結果として時にsecondary Bjerknes force（体積振動する気泡間に働く相互作用力[10]）の符号の反転を引き起こすだろうことを理論的に示した．Doinikov and Zavtrak[3,4]は，気泡間の多重散乱をより正確に取り込んだ理論モデルによってZabolotskayaの結果とほぼ同等な結果を得た．彼らの結果は音場中での安定な気泡群 "bubble grape"[4]の発生を説明するものと考えられている．Feuillade[5]はself-consistentモデルを用い，二気泡が逆相で振動し，放射減衰が熱的減衰や粘性減衰と比較して支配的であるとき，実効的な減衰効果の減少によってsuper-resonance[6]が起こりうるであろうことを示している．Ye and Alvarez[7]はself-consistentモデルにより，ランダムに分布する同一の気泡を含んだ液体中の音波の伝播に関する数値実験を行い，特定の周波数において音波の局在（localization）が起こりうることを示した．この現象には気泡間の多重散乱が大きな影響を与えていると考えられている．Mettinら[8]やDoinikov[9]は強音場中での気泡間相互作用が気泡の受ける放射圧（secondary[10]およびprimary[15,16] Bjerknes forces）に与える影響について議論した．この二つの仕事はmultibubble sonoluminescence[17,18]に関連する．

*東京大学生産技術研究所　計算科学技術連携研究センター
**東京大学生産技術研究所　人間・社会部門
***東京大学生産技術研究所　情報・システム部門

気泡動力学は乱流と絡めても研究されている．例えば水中で高速に回転するスクリューの周りでは乱流が発生するのと同時に，強い負圧からくるキャビテーションによって無数の気泡が発生する．キャビテーションによって発生したばかりの気泡は大変不安定であり，大振幅の体積振動を起こすのと同時に，固体壁であるスクリューに高圧のジェットを噴射する．このジェットの状態が気泡間相互作用によって大きく変化することが知られている[19]．また，乱流場中での気泡群の振る舞いは航空や船舶の分野で重要な研究テーマとなっている．

本報告の目的は，簡単な理論モデルによって複数気泡系に現れる「遷移周波数」の存在を示しその性質について議論した我々の最近の仕事を紹介するところにある．この研究では遷移周波数を「入射音波と気泡の体積振動の間の位相差を$\pi/2$にする駆動周波数」と定義する[13]．この定義はよく知られた単一気泡の性質 −共振周波数（より正確には自然周波数）において入射波と体積振動の間の位相差が$\pi/2$になる[12,20]—に基づいている．本研究には二つの主目的が有る：（1）複数気泡系において一つの気泡が幾つの遷移周波数を持つのかを示すこと[13,14]．度々報告されているように，気泡間の音響的相互作用からくる体積振動の位相の変化は，一気泡のモデルからは予測できない様々な現象を引き起こす[1-9,19]．ところが，上のように定義された遷移周波数に関する研究は非常に少ない．これまでに行われた仕事のほとんどは共振周波数あるいは自然周波数に関するものである[1-5]．つい最近になって，我々が始めて遷移周波数に関する研究に取り組んだ[13]．そして，二気泡系においてはそれぞれの気泡が三つの遷移周波数を持つことをcoupled-oscillatorモデルを用いた理論解析によって示した．また，そのアプローチを発展させ，任意の数の気泡が含まれた系についての議論も行い，その系においてはそれぞれの気泡が$2N+1$個の遷移周波数を持つことを示した[14]．（2）遷移周波数と共振周波数の違いについて明らか

にすること[14)]．我々が既に見出したように，気泡の数Nが1以上の場合には，遷移周波数は共振周波数とは異なる物理的意味を持つ．上で簡単に振り返ったように，Shima[1)]やZabolotskaya[2)]は$N=2$の場合には二つの共振周波数が存在することを予測した．この共振周波数の数はIda[13)]によって示された遷移周波数の数とは一致しない．本論文で我々は，一般的に言って両特徴周波数の数は一致しないということを示す[14)]．この結果は，$N=1$の場合とは異なり$N\geq 2$の場合には体積振動の位相の反転（例えば入射波と同相だったものが逆相へ）が共振周波数においてのみでなく他の幾つかの周波数でも起こりうることを示している．

Ⅱ．モ　デ　ル

まず相互作用する気泡の体積振動を記述する線形の微分方程式を導出する．（ここで用いるモデルは過去の幾つかの研究[1,2,5,21)]で用いられてきたものとほとんど同じものである．）半径R_{i0}（$i=1,2,\cdots,N$）のN個の気泡が粘性を持った液体に沈められているとする．入射音波の振幅が十分低い場合，気泡の体積振動は線形の二階常微分方程式で記述される[22,23,12)]：

$$\ddot{e}_i+\omega_{i0}^2 e_i+\delta_i\dot{e}_i=-\frac{1}{\rho R_{i0}}p_{\mathrm{d}i}. \quad\cdots\cdots(1)$$

ここで気泡の変形は無視し，時間依存の気泡半径$R_i(t)$は$R_i(t)=R_{i0}+e_i(t)$（$|e_i|\ll R_{i0}$）と書けると仮定した．また$\omega_{i0}(=\sqrt{[3\kappa P_0+(3\kappa-1)2\sigma/R_{i0}]/\rho R_{i0}^2})$は共振（角）周波数，$\delta_i$はダンピング係数[24)]，$p_{\mathrm{d}i}$は気泡$i$が受ける音圧，$\rho$は周囲媒質の密度，$\kappa$は気泡内ガスのポリトロープ指数，$P_0$は液体内の静圧，$\sigma$は表面張力係数，上付きの点は時間微分を示す．複数の気泡が存在する場合，音圧$p_{\mathrm{d}i}$は入射波の音圧p_{ex}と他の気泡による散乱波の音圧p_{sij}の総和で与えられる[25)]：

$$p_{\mathrm{d}i}=p_{\mathrm{ex}}+\sum_{j=1,j\neq i}^{N}p_{sij}\approx p_{\mathrm{ex}}+\sum_{j=1,j\neq i}^{N}\frac{\rho R_{j0}^2}{D_{ij}}\ddot{e}_j. \quad\cdots\cdots(2)$$

ここで周囲媒質は非圧縮とし，またD_{ij}は気泡iと気泡jの中心間距離である．式（2）を式（1）に代入することにより

$$\ddot{e}_i+\omega_{i0}^2 e_i+\delta_i\dot{e}_i=-\frac{p_{\mathrm{ex}}}{\rho R_{i0}}-\frac{1}{R_{i0}}\sum_{j=1,j\neq i}^{N}\frac{R_{j0}^2}{D_{ij}}\ddot{e}_j \quad\cdots\cdots(3)$$

を得る．この種の連立常微分方程式をcoupled-oscillatorモデルあるいはself-consistentモデルと呼ぶ．ここで$p_{\mathrm{ex}}=P\exp(\mathrm{i}\omega t)$，$e_i=A_i\exp(\mathrm{i}\omega t)$と仮定する．なお，$P$は正の実数であり，$A_i$は複素振幅を表す．これらの仮定は式（3）を以下のように変形させる：

$$R_{i0}\left[(\omega^2-\omega_{i0}^2)-\mathrm{i}\omega\delta_i\right]A_i+\sum_{j=1,j\neq i}^{N}\frac{R_{j0}^2}{D_{ij}}\omega^2 A_j=\frac{P}{\rho}. \quad\cdots\cdots(4)$$

この方程式系は行列を用いて書き直すことができる：

$$\mathbf{MA}=\mathbf{B}. \quad\cdots\cdots(5)$$

ここで$\mathbf{M}$はその要素m_{ij}が以下のように定義される$N\times N$の行列である：

$$m_{ij}=\begin{cases}R_{i0}[(\omega^2-\omega_{i0}^2)-\mathrm{i}\omega\delta_i], & \text{for } i=j,\\ \dfrac{R_{j0}^2}{D_{ij}}\omega^2, & \text{otherwise,}\end{cases} \quad\cdots\cdots(6)$$

$$\mathbf{A}=(A_1,A_2,\cdots,A_N)^T, \quad\cdots\cdots(7)$$

$$\mathbf{B}=(P/\rho)(1,1,\cdots,1)^T. \quad\cdots\cdots(8)$$

Ⅲ．解析と議論

この行列方程式について解析する．式（5）の解は以下のように書ける：

$$\mathbf{A}=\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}. \quad\cdots\cdots(9)$$

よく知られているように，$\mathbf{M}^{-1}$は形式的に

$$\mathbf{M}^{-1}=\frac{\mathbf{C}}{|\mathbf{M}|} \quad\cdots\cdots(10)$$

と書くことができる．ここで$|\mathbf{M}|$と$\mathbf{C}$はそれぞれ$\mathbf{M}$の行列式と余因子行列である．行列式と余因子行列の定義より以下のことが分かる：

$$\deg(|\mathbf{M}(\omega)|)=2N, \quad\cdots\cdots(11)$$

$$\deg(\mathbf{C}(\omega))=2(N-1). \quad\cdots\cdots(12)$$

ここで$\deg(m_{ij}(\omega))=2$であることに注意されたい．式（10）を式（9）に代入することで以下を得る：

$$\mathbf{A}=\frac{1}{|\mathbf{M}|}\mathbf{CB}.$$

前に定義したように，気泡iの遷移周波数は以下の方程式で決定される：

$$\mathrm{Re}\,(A_i)=0. \tag{13}$$

ここで以下のように仮定する：

$$|\mathbf{M}|=a+\mathrm{i}b, \tag{14}$$

$$g_i=c_i+\mathrm{i}d_i. \tag{15}$$

ここでa, b, c_i, d_iは実数で，g_iは**CB**の要素である．この仮定から

$$A_i=\frac{c_i+\mathrm{i}d_i}{a+\mathrm{i}b}=\frac{ac_i+bd_i+\mathrm{i}(ad_i-bc_i)}{a^2+b^2}$$

および

$$\mathrm{Re}\,(A_i)=\frac{ac_i+bd_i}{a^2+b^2} \tag{16}$$

を得る．この方程式を用い，さらに$|\mathbf{M}|\neq 0$（つまり$a=0$と$b=0$が同時に成り立つことはない）と仮定する（この仮定は特異解を否定するものであるため，物理的に妥当だと考えることができるだろう．二気泡の場合については13）に詳細な証明を記した．）と，式（13）は以下のように簡単化される：

$$ac_i+bd_i=0. \tag{17}$$

この方程式は二気泡系では

$$ac_1+bd_1=H_1F+M_2G=0 \tag{18}$$

となる．ここで

$$F=L_1L_2-\frac{R_{10}R_{20}}{D_{21}^2}\omega^4-M_1M_2,$$

$$G=L_1M_2+L_2M_1,\ H_1=L_2+\frac{R_{20}}{D_{21}}\omega^2,$$

$$L_1=(\omega_{10}^2-\omega^2),\quad L_2=(\omega_{20}^2-\omega^2),$$

$$M_1=\delta_1\omega,\quad M_2=\delta_2\omega$$

である[13]．

ここで，この方程式が幾つの根を持つかを議論しよう．式（11）と（12）および定義（14）と（15）より，deg $(ac_i+bd_i)=2N+2(N-1)=4N-2$であることが分かる．さらに，定義（6）を用いると以下のようにして式（17）がωについての偶数次の項のみを持つことを示すことができる：m_{ij}の実部はωについて二次，虚部は一次である．したがってA_iの実部には偶数次の項のみが残る．なぜならば，m_{ij}の虚部から得られる偶数次の項（例えば$\mathrm{i}\omega\delta_1\times\mathrm{i}\omega\delta_2=-\delta_1\delta_2\omega^2$）は実数となり，また奇数次の項（例えば$\mathrm{i}\omega\delta_1\times\mathrm{i}\omega\delta_2\times\mathrm{i}\omega\delta_3=-\mathrm{i}\delta_1\delta_2\delta_3\omega^3$）は虚数となるからである．たとえこれらに幾つかの実部が掛け合わされても，その項が偶数次であるか奇数次であるかに変化はない．結果として，式（17）は以下のように書くことができる：

$$F(X)\equiv ac_i+bd_i=0. \tag{19}$$

また，

$$\deg\,(F(X))=2N-1 \tag{20}$$

であることが分かる．ここで$X=\omega^2$である．これらの方程式は一つの気泡が$2N-1$個（もしくは，それ以下）の遷移周波数を持つことを予測している．（正の根のみが物理的意味を持つことに注意．）例えば$N=2$の場合には$2N-1=3$となる．この結果はIdaによる二気泡のモデルを用いた詳細な解析結果と矛盾しない[13]．

上で得られた結果を確認するため，$N=3$の場合の数値解を示す．各物理パラメータは$R_{10}=1\,\mu m$，$R_{20}=1.5\,\mu m$，$R_{30}=2.5\,\mu m$，$\rho=1000\,\mathrm{kg/m^3}$，$\kappa=1.4$，$P_0=1\,\mathrm{atm}$，$\sigma=0.0728\,\mathrm{N/m}$とする．ダンピング係数は$\delta_i=4\,\mu/\rho R_{i0}^2$と設定する．ここで$\mu$（$=1.137\times10^{-3}\mathrm{kg/(ms)}$）は15°Cでの水の粘性である．（すなわち粘性減衰を適用する．粘性減衰は医療応用[11]やソノルミネッセンスの実験[17,12]で用いられるような微小気泡の場合にドミナントになる．）また，D_{ij}は$D_{ij}=s\,(R_{i0}+R_{j0})$によって決定する．$s=2.0$としたとき，気泡1は期待通りに五つ（$=2\times3-1$）の遷移周波数$\omega_1=(1.054, 0.723, 0.635, 0.411, 0.328)\times\omega_{10}$を持つ．一方，$s=10.0$としたときには一つの遷移周波数$\omega_1=1.002\omega_{10}$のみが得られる．このような気泡間距離に対する数の依存性は二気泡の場合にも見出されている[13]．

ここで，遷移周波数と共振周波数の違いを示すため，我々の理論と既存の理論との比較検討を行う．Shima[1]とZabolotskaya[2]は二気泡の共振周波数を見積もるための理論式；

$$(X-\omega_{10}^2)(X-\omega_{20}^2)-\frac{R_{10}R_{20}}{D_{21}^2}X^2=0 \tag{21}$$

を導いた．彼らが用いた理論モデルでは，我々の用いたものと同様に気泡の無変形と周囲媒質の非圧縮性が仮定され

ているが，ダンピングの影響は無視されている．この理論式は二つの共振周波数の存在を予測する．この結果は一見，三つの遷移周波数を予測するIdaの結果[13]と矛盾するように見える．次にこの「矛盾」について議論する．

一般的に，ダンピングが存在しない場合（$\delta_i=0$，Im$(\mathrm{m}_{ij})=0$）には共振周波数は

$$|\mathbf{M}|=0 \qquad (22)$$

によって決定される．この条件は良く知られた共振周波数における気泡振動の特異性（無限大の振幅と不連続的な位相の変化[26,15]）を引き起こす．この方程式は一気泡の場合には良く知られた方程式$\omega^2-\omega_{10}^2=0$に，二気泡の場合には式（21）になる．一方，本研究において$\delta_i=0$の場合の気泡iの遷移周波数は以下の独立な方程式によって導かれる：

$$\mathrm{Re}(A_i)=A_i=\frac{g_i}{|\mathbf{M}|}=0, \qquad (23)$$

および

$$\mathrm{Sign}\left(\lim_{\Delta\to-0}A_i(\omega+\Delta)\right)\neq\mathrm{Sign}\left(\lim_{\Delta\to+0}A_i(\omega+\Delta)\right). \qquad (24)$$

ここで

$$\mathrm{Sign}(f)=\begin{cases}1 & \text{for } f>0,\\ -1 & \text{for } f<0.\end{cases}$$

である．式（24）は，この方程式を満たすωにおいて気泡iの位相が反転することを意味している．（$\delta_i\to0$の極限では上で述べた特異性のために，位相差が$\pi/2$になるという条件が式（24）に収束する．すなわち共振周波数においてこれらの条件は本質的に等価なものである．）式（23）と式（24）はそれぞれ$g_i=0$と$|\mathbf{M}|=0$，もしくは

$$|\mathbf{M}|g_i=0 \qquad (25)$$

に書き換えることができるだろう．さらに，定義（14）と（15）を用いると式（25）は以下のようになる：

$$ac_i=0.$$

この方程式は$b=0$と$d_i=0$が成り立つ場合（Im$(\mathrm{m}_{ij})=0$であることから，これらの条件は自然に成り立つ）には式（17）と一致する．上で議論したように，Xについての式（22）の度数はNであるが，式（25）の度数は$N+(N-1)=2N-1$である．$N>1$のとき，それらの度数は互いに異なる．この結果は以下のことを示している：(1)「共振周波数」と「遷移周波数」は異なる物理的意味を持つ；(2) 遷移周波数の数は一般的に共振周波数の数より多い；(3) 体積振動の位相の反転を起こす条件が共振周波数の他にも存在する．$|\mathbf{M}|=0$によって得られる遷移周波数は気泡の共振反応を引き起こすが，$g_i=0$によるものはそうではない．（それらの遷移周波数はそれぞれ，電気回路に現れる直列共振周波数と並列共振周波数に相当すると思われる．前者は0の，後者は無限大のインピーダンスを引き起こす．）

次に，$D_{ij}\approx\infty$と$\delta_i\approx0$が成り立つ場合，つまり，$\mathbf{M}$の非対角要素とその対角要素の虚部が非常に小さい絶対値を持つ場合について議論する．この条件下では

$$a=\prod_{j=1}^{N}R_{j0}(\omega^2-\omega_{j0}^2)+\varepsilon1, \qquad b=\varepsilon2,$$

$$c_i=\frac{P}{\rho}\prod_{j=1,j\neq i}^{N}R_{j0}(\omega^2-\omega_{j0}^2)+\varepsilon3, \qquad d_i=\varepsilon4,$$

となる．ここで$\varepsilon1\sim\varepsilon4$は非常に小さい絶対値を持つ実数である．これらの方程式は式（17）を以下のように変形させる：

$$\left(\prod_{j=1}^{N}R_{j0}(\omega^2-\omega_{j0}^2)\right)\left(\frac{P}{\rho}\prod_{j=1,j\neq i}^{N}R_{j0}(\omega^2-\omega_{j0}^2)\right)\approx0$$

もしくは

$$(\omega^2-\omega_{i0}^2)\prod_{j=1,j\neq i}^{N}(\omega^2-\omega_{j0}^2)^2\approx0.$$

この方程式は，$2N-1$個ある遷移周波数の内のたった一つだけが$D_{ij}\to\infty$でω_{i0}に収束し，また残りの遷移周波数のうち二つずつがω_{j0} $(j\neq i)$に収束することを示している．この結果は$N=2$の結果[13]と無矛盾である．

最後に，一つの特別な場合について簡単に論じる．全ての気泡が同一であり（$R_{10}=R_{20}=\cdots=R_{N0},\delta_1=\delta_2=\cdots=\delta_N$），さらに，全ての気泡間距離が等しいと仮定する．（後者の仮定は$N=4$の場合まで実現可能であろう．）$N=3$のとき，この設定は5）のSec. Ⅲで議論されている“mode A”に相当する．これらの仮定に基づくと$|\mathbf{M}|$の各要素は

$$m_{11}=m_{22}=\cdots=m_{NN}=R_{10}[(\omega^2-\omega_{10}^2)-\mathrm{i}\omega\delta_1],$$

$$m_{12}=m_{21}=m_{13}=\cdots m_{NN-1}=\frac{R_{10}^2}{D_{12}}\omega^2$$

となる．すなわち，対角成分と非対角成分のそれぞれが等しくなる．結果として$A_1=A_2=\cdots=A_N$と

$$A_1=\frac{1}{m_{11}+(N-1)m_{12}}\cdot\frac{P}{\rho}$$

を得る．一般的には$2N-1$個の遷移周波数が得られるはずであるが，この方程式からはたった一つの遷移周波数（共振周波数にも相当する）しか得ることができない．この結果はある特定の条件下では共振および遷移周波数の数が減少することを，また，ここで用いた過剰な仮定が複数気泡系についての正確な理解を妨げることを指摘している．

Ⅳ．お わ り に

本論文で我々は，線形coupled-oscillatorモデルを用いて異なるサイズのN個の気泡が含まれる系の「遷移周波数」について検討した．我々の理論によると，その系に含まれる気泡はそれぞれN個の共振周波数と$2N$-1個の遷移周波数を持つことが予測される．これはつまり，共振周波数の前後で気泡の体積振動の位相が反転することを予測した良く知られた一気泡のための理論は複数気泡系では絶対的に正しいとは言えないということを意味している．（奇数個の遷移周波数が存在することの物理的意味は以下のように説明できるだろう：たとえ他の気泡と相互作用している場合でも，駆動周波数が共振周波数より十分に低いか十分に高い場合には気泡は入射音波と同相，あるいは逆相で振動するであろう．この両極端な状態を矛盾なく補間するには奇数回の位相の反転が必要となる．）この結果は位相の変化が重要な役割を担う現象（文献2-4,8,9）で議論されているような）にとってとりわけ重要なものである．（著者の一人は既にsecondary Bjerknes forceの符号反転現象についての解析に遷移周波数の理論を適用し，共振周波数のみを用いてされてきたこれまでの議論[2-4]より正確だと思われる解釈を見出した．[27]）我々はここで用いた行列方程式についての更なる議論が音場中の複数気泡の挙動や気泡流中での音波の伝播の物理についてより豊かな理解を提供することを期待している．

なお，二気泡の例については既に，著者の一人によって提案された直接数値シミュレーション技術[28-30]を用いた検証が行われている[31]．

謝　　辞

この研究はITプログラム2002「戦略的基盤ソフトウェアの開発」の一環として行われた．

（2002年12月2日受理）

参 考 文 献

1) A. Shima, Trans. ASME, J. Basic Eng. **93** (1971) 426.
2) E. A. Zabolotskaya, Sov. Phys. Acoust. **30** (1984) 365.
3) A. A. Doinikov and S. T. Zavtrak, Phys. Fluids **7** (1995) 1923.
4) A. A. Doinikov and S. T. Zavtrak, J. Acoust. Soc. Am. **99** (1996) 3849.
5) C. Feuillade, J. Acoust. Soc. Am. **98** (1995) 1178.
6) I. Tolstoy, J. Acoust. Soc. Am. **80** (1986) 282.
7) Z. Ye and A. Alvarez, Phys. Rev. Lett. **80** (1998) 3503.
8) R. Mettin *et al*., Phys. Rev. E **56** (1997) 2924.
9) A. A. Doinikov, Phys. Rev. E **62** (2000) 7516.
10) L. A. Crum, J. Acoust. Soc. Am. **57** (1975) 1363.
11) P. A. Dayton *et al*., IEEE Trans. Ultrason. Ferroelect. & Freq. Control **44** (1997) 1264.
12) W. Lauterborn *et al*., Adv. Chem. Phys. **110** (1999)295.
13) M. Ida, Phys. Lett. A **297** (2002) 210.
14) M. Ida, J. Phys. Soc. Japan **71** (2002) 1214.
15) A. I. Eller, J. Acoust. Soc. Am. **43** (1968) 170.
16) L. A. Crum and A. I. Eller, J. Acoust. Soc. Am. **48** (1969) 181.
17) L. A. Crum, Phys. Today **47** No. 9 (1994) 22.
18) K.Yasui, Phys. Rev. Lett. **83** (1999) 4297.
19) J. R. Blake *et al*., J. Fluid Mech. **255** (1993) 707.
20) T. G. Leighton, *The Acoustic Bubble* (Academic Press, London, 1994), p. 293.
21) C. Feuillade, J. Acoust. Soc. Am. **109** (2001) 2606.
22) A. Prosperetti, Ultrasonics **22** (1984) 69.
23) T. G. Leighton, *The Acoustic Bubble* (Academic Press, London, 1994), p. 291.
24) 一般にδ_iは粘性減衰，放射減衰，熱的減衰の総和で見積もられる．このうち放射減衰と熱的減衰は駆動周波数に依存する[22,5]．しかし本論文では議論の簡単のためにδ_iを駆動周波数に依存しないと仮定する．二気泡系についての数値解[27]は，たとえ放射減衰と熱的減衰を考慮に入れても遷移周波数の最大数は変化しないことを示している．
25) 散乱波の振幅は例えば，線形音波の運動量方程式 $\partial p/\partial r=-\rho\partial u/\partial t$を発散無し条件$\partial(r^2u)/\partial r=0$と組み合わせ積分することで得ることができる．ここでrは気泡中心から測った半径座標，uはrに沿う速度である．
26) M. Minnaert, Phil. Mag. **16** (1933) 235.
27) M. Ida, e-print, physics/0109005.
28) M. Ida, Comput. Phys. Commun. **132** (2000) 44.
29) M. Ida, Y. Yamakoshi, Jpn. J. Appl. Phys. **40** (2001) 3846.
30) M. Ida, Comput. Phys. Commun. **150** (2003) 300.
31) 井田真人，日本機械学会2002年度年次大会講演論文集，Vol. I, 13.