

数理科学実践研究レター 2018-1 July 05, 2018

ハードコンタクトレンズにおける周辺カーブの提案

by

後藤ゆきみ、三浦達哉、細野元気、児玉大樹



UNIVERSITY OF TOKYO
GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES
KOMABA, TOKYO, JAPAN

ハードコンタクトレンズにおける周辺カーブの提案

後藤ゆきみ ^{*1} (東京大学数理科学研究科)

Yukimi Goto (Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo)

三浦達哉 ^{*2} (東京大学数理科学研究科)

Tatsuya Miura (Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo)

細野元気 ^{*3} (東京大学数理科学研究科)

Genki Hosono (Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo)

児玉大樹 ^{*4} (東京大学数理科学研究科)

Hiroki Kodama (Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo)

概要

ハードコンタクトレンズの設計において、中心部は光学的な要請によって決められたものを採用し、周縁部は患者の角膜形状と一致するように作成されることがある。本研究では、中心部と周縁部の繋ぎ目を設計する手法を二階微分の最小化問題として定式化する。一次元の場合、解の一意性と明示的な表示が得られた。本来の二次元問題についてもこの解を用いてレンズの形状を提案することができる。

1 導入

本研究の目的は、ハードコンタクトレンズの曲面形状を数理的手法により提案することである。円錐角膜をはじめとする高度不正乱視眼においては、一般にソフトコンタクトレンズでの視力矯正が期待できない。そのため、高度不正乱視眼の多くにハードコンタクトレンズが処方されている。角膜の形状は各々の患者によって違うため、装着感や視力について満足な結果を得るには角膜形状に適したハードコンタクトレンズを作成することが望ましい。近年、レンズ掘削技術の発達により、自由形状のレンズを製造できるようになった。また、光干渉層画像診断 (OCT) が発達したことで、患者の眼球の形状を精密に計測できるようになった。これらの技術によって、レンズの周縁部の形状を患者の角膜の形状と一致するように作成することが可能になった。

一方、レンズの中心部の形状は光学的な要請から球面とすることが多い。本論文では、そうして得られた周縁部と中心部の間を適切に繋ぐ形状を設計する、という問題を考える。この繋ぎ目の形状については、周縁部と中心部をある意味で「滑らか」に繋ぐものが適切だと考えられる。しかし、ここで考える「滑らかさ」の正確な意味は明らかではない。本研究では、繋ぎ目になる曲面の「滑らかさ」を数学的に定式化し、その意味で滑らかな曲面の統一的構成法を提案する。ただし本論文の手法では、中心部と周辺部の形状は、球面や患者の実際の角膜形状以外にも、単に境界条件として任意にとってよいことを注意しておく。

ここでは以下のような技術上の問題に着目し、その観点から最適化を行うことを考える。レンズを製造する際は回転するレンズに円環状の刃を接触させて掘削することになるが、このとき曲面にカドができると正確に削れなくなり、ずれが生じる。この原因については、削られる曲面の曲率半径が刃の曲率半径よりも十分大きい必要があること、及び回転による動作の不正確性にあると予想される。よって、可微分性の意味での滑らかさだけでは不十分であり、曲面にカドができないことを保証する構成法を考えたい。そこで、問題を以下のように二階微分の最小化問題とし定式化する。

レンズの形状は、ある二次元開集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 上の関数 f として与えられる。われわれの問題ではレンズは円板上の関数であり、繋ぎ目は円環として与えられている。上述の事情を考慮して、レンズの設計に

^{*1} yukimi@ms.u-tokyo.ac.jp

^{*2} miura@ms.u-tokyo.ac.jp

^{*3} genkih@ms.u-tokyo.ac.jp

^{*4} kodama@ms.u-tokyo.ac.jp

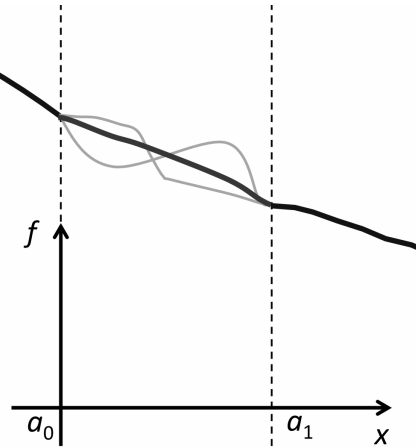


図1 a_0 と a_1 でそれぞれ中心部と周縁部の繋ぎ目を表す

あたっては、 f の曲がり具合が適切な意味で最小のものを選ぶことが重要だと考えられる。すなわち、与えられた境界条件のもとでヘシアン固有値の最大値を最小化する f を求める問題を考える。繋ぎ目の曲面を作る既存の手法としては一の分割を用いた方法があるが、この問題の解にはなっておらず、最小化問題を解くことで改善が期待される。数学上の問題としては、一階微分（勾配）の最大値ノルムの最小化問題に対する先行研究は高次元領域上でも数多くあるが（cf. [1]）、二階微分（ヘシアン）はあまり見られない。また、二階微分（ヘシアン）に関しての問題は二次元でも十分難しいため、本論文では一次元の場合を考察する。一次元の場合、最小化する関数が一意に存在することを示し、その解を具体的に表示することができた。

応用にあたっては、円環領域の各動径方向について一次元の最小化問題を解くことによって、本来の二次元問題に対しても明示的な解を提案することができる。

2 一次元問題

実数 $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}$ ($i = 0, 1$) を与えられたパラメータとする。ただし $a_0 < a_1$ とする。関数空間 X を

$$X := \{f \in C^{1,1}([a_0, a_1]); f(a_i) = b_i, f'(a_i) = c_i, i = 0, 1\}$$

として定める。ここでヘルダー空間 $C^{1,1}([a_0, a_1])$ はソボレフ空間 $W^{2,\infty}(a_0, a_1)$ と同一視できることを思い出すと [2, Proposition 8.4], 最小化問題

$$\min_{f \in X} \|f''\|_\infty \tag{1}$$

が定義できる (図 1)。ここで $\|f''\|_\infty$ は f の二階微分の本質的上限をあらわす。本論文の目的は、最小化問題 (1) の解の一意存在の証明、および解 f の具体的表示を求めることである。問題を単純にするために、以下の正規化を考える。まず $[a_0, a_1]$ を単位区間 $[0, 1]$ とするために、任意の $f \in X$ に対し、関数 $F \in C^{1,1}([0, 1])$ を $F(x) := (a_1 - a_0)^{-1} f(a_0 + (a_1 - a_0)x)$ として定める。また b_0 を 0 とするために、関数 $G \in C^{1,1}([0, 1])$ を $G(x) := F(x) - F(0)$ として定める。特に

$$G(0) = 0, G(1) = \frac{b_1 - b_0}{a_1 - a_0}, G'(i) = c_i \quad (i = 0, 1)$$

となっている。 $G(1) = (b_1 - b_0)(a_1 - a_0)^{-1} =: b$ とおく。導関数 $g = G'$ を考えれば、問題 (1) は関数空間

$$Y := \left\{ g \in C^{0,1}([0, 1]); \int_0^1 g(x) dx = b, g(i) = c_i, i = 0, 1 \right\}$$

における最小解問題

$$\min_{g \in Y} \|g'\|_\infty \tag{2}$$

を考えると同値になる。この問題に対し以下の主定理が成り立つ。

定理 1 最小化問題 (2) はただひとつの解 g をもち、ある $m \in \mathbb{R}$, $r \in [0, 1]$ について

$$g(x) = \begin{cases} mx + c_0 & (x \in [0, r]) \\ m(1-x) + c_1 & (x \in [r, 1]) \end{cases}$$

と表示できる。

この定理の証明は次章で与える。

定理 1 において、 m と r は具体的に求めることができる。まず簡単な考察から、 $r = 0$ または $r = 1$ であることと $2b = c_0 + c_1$ が成り立つことは同値である。この場合 $g(x) = (c_1 - c_0)x + c_0$ である。よって以下では $2b \neq c_0 + c_1$, つまり $r \in (0, 1)$ の場合のみ考える。まず、 $x = r$ で g が連続であることから、

$$g(r) = mr + c_0 = m(1-r) + c_1.$$

ここで $r \in (0, 1)$ の仮定から $m \neq 0$ であることに注意すると、

$$r = \frac{1}{2m}(m + c_1 - c_0), \quad g(r) = \frac{1}{2}(m + c_1 + c_0), \tag{3}$$

が成り立つ。あとは m を b, c_0, c_1 で表せばよい。まず、台形の面積の計算より、

$$b = \int_0^1 g(x)dx = \frac{r}{2}(c_0 + g(r)) + \frac{1-r}{2}(c_1 + g(r))$$

がわかり、これと (3) により次の二次方程式が成り立つことがわかる:

$$\begin{aligned} 8mb &= (m + c_1 - c_0)(m + c_1 + 3c_0) + (m + c_0 - c_1)(m + c_0 + 3c_1) \\ \iff m^2 + 2[(c_0 + c_1) - 2b]m - (c_0 - c_1)^2 &= 0. \end{aligned}$$

簡単のため $X := 2b - (c_0 + c_1) (\neq 0)$ とおくと、二次方程式の解の公式より m は

$$X \pm \sqrt{X^2 + (c_0 - c_1)^2}$$

の何れかであることがわかる。ここで $|c_0 - c_1| \leq |c_0 - g(r)| + |g(r) - c_1| = r|m| + (1-r)|m| = |m|$ なので、

$$m = \begin{cases} X + \sqrt{X^2 + (c_0 - c_1)^2} & \text{if } X > 0, \\ X - \sqrt{X^2 + (c_0 - c_1)^2} & \text{if } X < 0, \end{cases}$$

となって、表示が得られた。

定理 1 により元の問題 (1) の解の一意存在もわかる。また上記の正規化の逆を辿れば g から f が一意に復元できるため、与えられた境界条件に対し解 f の具体的な表示も得られる。特に解 f は、線分、放物線、または最高次係数の絶対値が等しい二つの放物線を繋げたもの、の何れかであることがわかる (図 2)。

3 定理 1 の証明

実数 $L \in \mathbb{R}$ に対し、

$$Z_L := \{g \in C^{0,1}([0, 1]); g(i) = c_i, i = 0, 1, \|g'\|_\infty \leq L\}$$

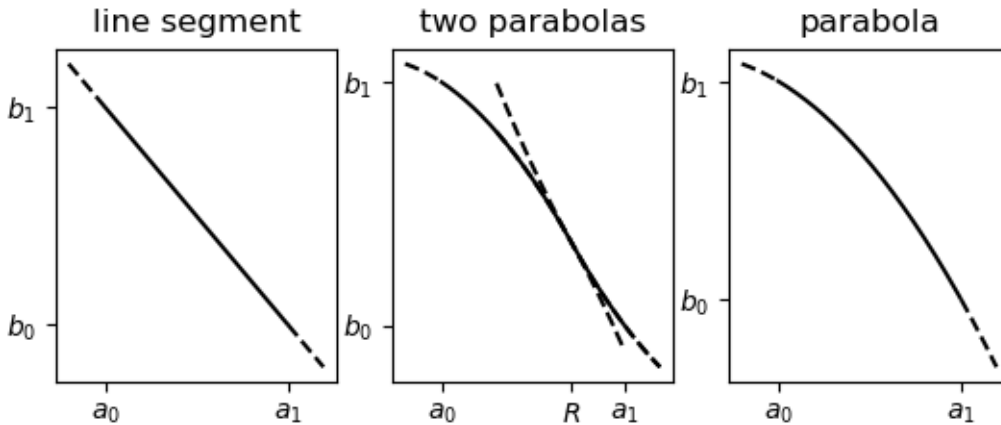


図2 f のグラフ. 中央のグラフの二つの放物線は $x = R$ で接する.

とする. また集合値関数 $\mu : \mathbb{R} \rightarrow 2^{\mathbb{R}}$ を次で定める:

$$\mu(L) := \left\{ \int_0^1 g(x)dx ; g \in Z_L \right\}.$$

ただし $L < L_* := |c_0 - c_1|$ のとき $Z_L = \emptyset$ となるが, このときは $\mu(L) = \emptyset$ と解釈する.

各 L における μ の像について考える. まず $L < L_*$ のとき $\mu(L) = \emptyset$ であった. また $L = L_*$ のとき, Z_L の唯一の元は端点を結ぶ線分であり, 特に $\mu(L_*)$ は一点集合である. 最後に $L > L_*$ の場合を考える. 条件 $\|g'\|_{\infty} \leq L$ より, 任意の $g \in Z_L$ のグラフは点 $(0, c_0)$ を通る傾き $\pm L$ の直線および点 $(1, c_1)$ を通る傾き $\pm L$ の直線で囲まれる平行四辺形にふくまれる. つまり, 任意の $g \in Z_L$ は $g_* \leq g \leq g^*$ を満たす. ここで関数 $g^*, g_* \in Z_L$ はそれぞれ,

$$g^*(x) = \min\{Lx + c_0, L(1-x) + c_1\}, \quad g_*(x) = \max\{-Lx + c_0, -L(1-x) + c_1\}$$

と表される. ここで $M(L) := \int_0^1 g^*(x)dx$ および $m(L) := \int_0^1 g_*(x)dx$ と定めると, 次の重要な補題が成り立つ.

補助定理 2 任意の $L > L_*$ に対し $\mu(L) = [m(L), M(L)]$ が成り立つ. また $g \in Z_L$ であって $\int_0^1 g(x)dx = M(L)$ (または $\int_0^1 g(x)dx = m(L)$) を達成するものは g^* (または g_*) のみである.

証明 [証明] 任意の $g \in Z_L$ に対し $g_* \leq g \leq g^*$ であることおよび積分の順序保存性から, 包含関係 $\mu(L) \subset [m(L), M(L)]$ および最大最小の達成が g^*, g_* のみであることがわかる. また, 連続変形 $g_t = tg_* + (1-t)g^* \in Z_L$ ($0 \leq t \leq 1$) により積分 $\int g_t$ の値も連続に変化することから, 特に $\mu(L) = [m(L), M(L)]$ であることがわかる.

さて, 定理 1 の証明に立ち戻る. いま関数 $M(L)$ は L について単調増加, $m(L)$ は単調減少なので, 補題 2 より, 与えられた $b \in \mathbb{R}$ についてある $L_b \geq L_*$ がただひとつとれて次を満たす:

- $L \geq L_b \implies b \in \mu(L)$, つまり $\int_0^1 g(x)dx = b$ なる $g \in Z_L$ が存在する.
- $L < L_b \implies b \notin \mu(L)$, つまり $\int_0^1 g(x)dx = b$ なる $g \in Z_L$ は存在しない.

よって $\min_{g \in Y} \|g'\|_{\infty} = L_b$. また, $\|g'\|_{\infty} = L_b$ を達成する $g \in Y$ は Z_{L_b} 内の折れ線 g^*, g_* ないし端点を結ぶ線分のいずれかで, 特に一意に存在する (証明終了).

謝辞

本研究の課題を提供して頂いた東京医科大学, レインボーオプティカル研究所, および日本精機株式会社の皆様に感謝する. また, 本研究にあたり有益な助言を頂いた東京大学数理科学研究科の土岡俊介氏,

図 1 を提供して下さった東京大学地球惑星科学専攻の高木悠氏に感謝する。

参考文献

- [1] G. ARONSSON, M. G. CRANDALL, P. JUUTINEN, *A tour of the theory of absolutely minimizing functions*, Bull. Amer. Math. Soc. **41** (2004), 439–505.
- [2] H. BREZIS, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, New York 2010.