

数理科学実践研究レター 2018-7 July 26, 2018

レースコースの形状に対する最適化について

by

田内大渡、大橋耕、辻俊輔、滝間太基、
早川拓、山上遥航、本間充、宮田裕生、
松元崇、岩淵由佳、上坂正晃



UNIVERSITY OF TOKYO

GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES

KOMABA, TOKYO, JAPAN

レースコースの形状に対する最適化について

田内大渡¹ (東京大学大学院数理科学研究科)

Taito Tauchi (Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo)

大橋耕² (東京大学大学院数理科学研究科)

Ko Ohashi (Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo)

辻俊輔³ (東京大学大学院数理科学研究科)

Shunsuke Tsuji (Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo)

滝間太基⁴ (東京大学大学院数理科学研究科)

Taiki Takigiku (Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo)

早川拓⁵ (東京大学宇宙線研究所)

Taku Hayakawa (Institute for Cosmic Ray Research, The University of Tokyo)

山上遥航⁶ (東京大学大学院理学系研究科地球惑星科学専攻)

Yoko Yamagami (Department of Earth and Planetary Science, The University of Tokyo)

本間充⁷ (アビームコンサルティング株式会社)

Mitsuru Homma (ABeam Consulting Ltd.)

宮田裕生⁸ (アビームコンサルティング株式会社)

Hiroataka Miyata (ABeam Consulting Ltd.)

松元崇⁹ (アビームコンサルティング株式会社)

Takashi Matsumoto (ABeam Consulting Ltd.)

岩淵由佳¹⁰ (アビームコンサルティング株式会社)

Yuka Iwafuchi (ABeam Consulting Ltd.)

上坂正晃¹¹ (北海道大学電子科学研究所)

Masaaki Uesaka (Research Institute of Electron Sciences, Hokkaido University)

概要

カーレースにおいてウイングの角度はレースの結果に影響を与える重要なファクターの一つである。ここでウイングは風の抵抗を受け車体に揚力(ダウンフォース)を与えることでカーブを曲がりやすくし、逆に直線ではその揚力によって車体の加速を阻害する。本研究の目的はレースの形状に関しての最適なウイングの角度を調べることである。

1 はじめに

ウイングとは車体の一部であり、空気抵抗により負の揚力(ダウンフォース)を発生させるものである。ダウンフォースはウイングを水平に近づけると弱くなり、水平より立てていくと強くなる。カー

¹taito@ms.u-tokyo.ac.jp

²ohashi@ms.u-tokyo.ac.jp

³tsujish@ms.u-tokyo.ac.jp

⁴takigiku@ms.u-tokyo.ac.jp

⁵taku1215@icrr.u-tokyo.ac.jp

⁶yamagami@eps.s.u-tokyo.ac.jp

⁷homma@abeam.com

⁸hiromiyata@abeam.com

⁹takashmatsumoto@abeam.com

¹⁰iwafuchi@abeam.com

¹¹muesaka@es.hokudai.ac.jp

ブを高速で曲がるためにダウンフォースは不可欠であるが、強すぎるダウンフォースは直線での加速を阻害する。従って直線の多いコースではウイングはより水平にするべきであり、カーブの多いコースではウイングを立てることが望ましい。

本論文ではカーレースにおいて、与えられたコースの形状に対して最適なウイングの角度を求めるための一つのアプローチを紹介する。未熟な試みであるため、計算例としては非常に単純なつまらないものしか取り上げないが、ここに紹介する「コースを組み合わせた的に見て、コースの形状に依存して車体の調整を行う」という視点に興味を持ってもらえれば幸いである。

2 走行モデル

本節では直線とカーブそれぞれにおいて車体の走行モデルを立て、その完走にかかる時間をウイングの角度 θ を変数とする関数で表すことを考える。

2.1 直線上でのモデル

まず直線の走行モデルについて考え、そのモデルから直線の走行タイムを計算する。本研究では直線を速度 v で走る車体にかかる力は推進力 F (定数) と抗力 $F_D = C_D v^2$ で与えられるとした。ここで $C_D = C_D(\theta)$ は抗力係数と呼ばれ、ウイングの角度 θ に依存している (時間には依存しない)。すると車体の質量を m 、車体の時刻 t における位置を $x(t)$ として運動方程式は次で与えられる。

$$m \frac{d^2}{dt^2} x(t) = F - F_D.$$

この微分方程式を解くことにより終端速度 $v_s(\theta)$ は次で与えられる。

$$v_s(\theta) = \sqrt{\frac{F}{C_D(\theta)}}. \quad (1)$$

簡単のため直線上で車体は終端速度 (1) による等速直線運動を行うと仮定する。このとき車体が長さ L の直線の完走にかかる時間 $T_s(\theta)$ は次で与えられる。

$$T_s(\theta) = L \sqrt{\frac{C_D(\theta)}{F}}. \quad (2)$$

2.2 カーブ上でのモデル

半円上を走るためには摩擦力 F_{fric} が遠心力 F_{cen} 以上である必要がある。つまり半円上では次が成り立つ。

$$F_{cen} \leq F_{fric}. \quad (3)$$

半円の半径を R 、角速度を ω 、摩擦係数を μ 、重力加速度を g として摩擦力と遠心力はそれぞれ次で与えられる。

$$F_{cen} = mR\omega^2, \quad (4)$$

$$F_{fric} = \mu(mg + F_L) = \mu(mg + C_L v^2). \quad (5)$$

ここで F_L は揚力を表しウイングの角度 θ に依存する (時間には依存しない) 揚力係数 $C_L = C_L(\theta)$ を用いて $F_L = C_L v^2$ で与えられる。式 (3), (4), (5) より半円上での速度の上限 $v_c(\theta)$ が与えられる。

$$v_c(\theta) = \sqrt{\frac{\mu R m g}{m - \mu R C_L(\theta)}}. \quad (6)$$

簡単のため車体は半円上で常にこの速度 $v_c(\theta)$ で走行すると仮定する．このとき半円 R 上を完走するのにかかる時間 $T_c(\theta)$ は次で与えられる．

$$T_c(\theta) = \pi R \sqrt{\frac{m - \mu R C_L(\theta)}{\mu R m g}}. \quad (7)$$

3 一般のコース

長さ L_i の直線が m_i 本 ($0 \leq i \leq N$) 半径 R_j の半円が n_j 個 ($0 \leq j \leq M$) あるコースを考える．ただしコースがつながっているかどうか (閉曲線となっているかどうか) は考えないこととする．このとき式 (2) と (7) よりこのコースを完走するのにかかる時間 $T(\theta)$ は次で与えられる．

$$T(\theta) = \sum_{i=1}^N m_i L_i \sqrt{\frac{C_D(\theta)}{F}} + \sum_{j=1}^M n_j \pi R_j \sqrt{\frac{m - \mu R_j C_L(\theta)}{\mu R_j m g}}. \quad (8)$$

4 具体的なコース

本節では具体的に以下の図 1 のようなコースを考え，3 節で得られた式 (8) の妥当性について議論する．

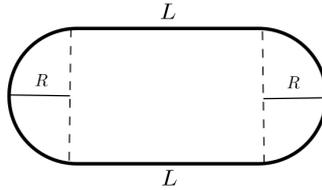


図 1: コース

式 (8) よりこのコースを完走するのにかかる時間 $T(\theta)$ は次で与えられる．

$$T(\theta) = 2L \sqrt{\frac{C_D(\theta)}{F}} + 2\pi R \sqrt{\frac{m - \mu R C_L(\theta)}{\mu R m g}}. \quad (9)$$

式 (9) はこのままでは複雑で扱いづらいので抗力係数 C_D と揚力係数 C_L が (ウイングの角度 θ に依存しない) 車体の抵抗からの寄与 C_D^{car}, C_L^{car} とウイングからの寄与 $C_D^{wing}(\theta), C_L^{wing}(\theta)$ に次のように分解すると仮定をおく．

$$C_D(\theta) = C_D^{car} + C_D^{wing}(\theta), \quad (10)$$

$$C_L(\theta) = C_L^{car} + C_L^{wing}(\theta). \quad (11)$$

式 (10) と (11) を式 (9) に代入し θ に依らない部分を定数 $A, B, C, D \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ とおくと次のようになる．

$$T(\theta) = \sqrt{A + B \cdot C_D^{wing}(\theta)} + \sqrt{C - D \cdot C_L^{wing}(\theta)}. \quad (12)$$

さらに抗力はウイングが完全に水平であるとき 0 であり垂直な時に最大になること，また揚力はウイングが完全に水平であるとき 0 であり $\theta = \pi/4$ であるとき最大であると考え，完全に垂直なとき再び 0 になることを鑑みて例として次のような関数を考える．

$$C_D^{wing}(\theta) = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}, \quad C_L^{wing}(\theta) = \sin(2\theta) \quad (13)$$

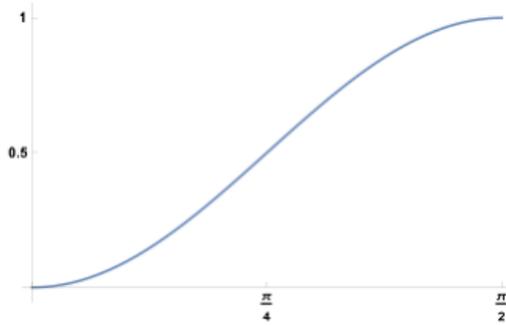


図 2: $\frac{1-\cos(2\theta)}{2}$ のグラフ

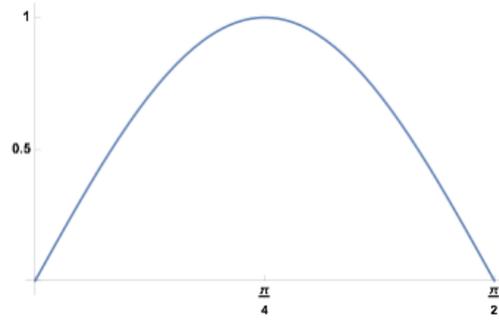
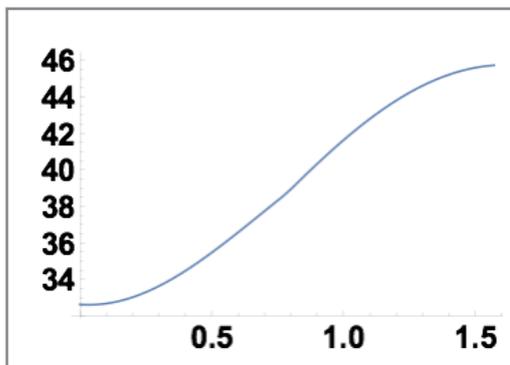


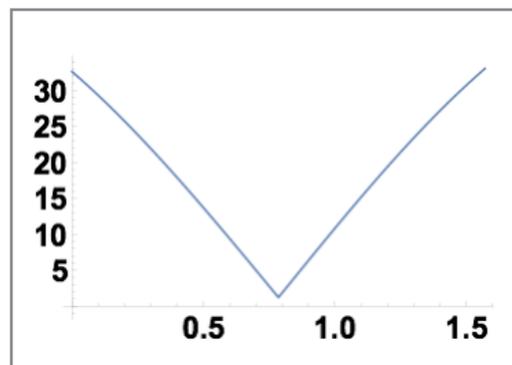
図 3: $\sin(2\theta)$ のグラフ

このときカーブに比べて直線が十分長い場合と逆に直線がカーブにくらべて十分長い場合についてそれぞれ (12) 式のグラフを書くと次のようになる。



$A = B = 1000, C = D = 1$

図 4: 直線が長いときのグラフ



$A = B = 1, C = D = 1000$

図 5: カーブが長いときのグラフ

5 終わりに

本論文では図 1 のような単純なコースや閉曲線とは限らないコースのような実際をあまり反映していないコースについて考察をしていた。また今回用いた走行モデルでは直線とカーブとのつなぎ目において車体の速度が離散的になるという点で現実と大きく異なる。さらに実際のレースにおいては摩擦力の時間変化やドリフト走法などの要因も完走タイムに影響を与える。これらについて反映したモデル化、計算を行うことが今後の課題である。加えて 4 章では抗力係数や揚力係数を簡単な関数において計算しただけであるので、これらを一般の関数で考察することも今後考えていきたいことの一つである。