数理科学実践研究レター 2018–9 July 26, 2018

平面結晶群の既約表現について

by

大井雅雄

UNIVERSITY OF TOKYO
GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES
KOMABA, TOKYO, JAPAN

平面結晶群の既約表現について

大井雅雄[1]（東京第大学大学院数理科学研究科）
Masao Oi (Graduate School of Mathematical Sciences, the University of Tokyo)

概 要

結晶の対称性を表す結晶群は概ね，平行移動からなる部分と一点を保つ変換からなる部分によって作られており，その群論的構造は比較的単純である．本論文では，そのような群論的構造に着目して Mackey の理論を用いることで，平面結晶群の場合に既約表現を分類することを目指す．

1 はじめに

結晶群とは概ね結晶の対称性を表す群のことである．一方，群の表現を分類・記述することは，その群を「理解する」ということの一つの数学的定式化であると言える．そこで本論文では，結晶群の既約表現を Mackey の理論によって分類する試みについて説明する．なお本研究は社会数理実践研究の一環として行われた．定期的な会合を開催し意見交換の場を与えてくださった特任助教の若林泰央氏および，問題提供と数々の有益な示唆を与えていただいた中川淳一氏 (新日鐵住金) に感謝いたします．

2 結晶群の既約表現の分類の方針

まず結晶と結晶群の定義を思い出しておく．$\mathbb{R}^n$ の等長変換群 $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ を考える．$\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ の離散部分群であって，一次独立な n つの平行移動を含む群 G のことを**結晶群**と呼ぶ．この平行移動から生成される G の正規部分群 H を**格子群**と呼び，$\mathbb{R}^n$ の各点の H 軌道を**結晶**と呼ぶ．この時 $K := G/H$ は有限群になり，これを**点群**と呼ぶのであった（詳しくは [5, 125 結晶群] などを参照）．
結晶群の affine 変換による同値類は有限であることが知られており，更に n が小さい数の場合にはその分類も知られている．たとえば**平面結晶群**，すなわち $n = 2$ の場合には，結晶群の同値類は全 17 種類に分類される．そしてこれらのうち 13 種類は，格子群 H と点群 K の半直積 $H \rtimes K$ として書くことができる．本論文の目的は，これら 13 種類の平面結晶群に対して，既約（ユニタリ）表現の同型類を決定することである．
次に既約表現の分類の方針について述べる．半直積群 $H \rtimes K$ の既約表現を理解するためには

(1) H および K の既約表現を分類する．

(2) H および K の既約表現と，G の既約表現の関係を調べる．

という二つの問題を考察すれば良い．
まず (1) については，まず $H \cong \mathbb{Z}^2$ の既約ユニタリ表現の同型類は $(\mathrm{S}^1)^2$ として記述できる．一方で K は往々にしてよく知られた有限群となるため，既約表現の記述は容易である．
他方 (2) の正確な意味は，Mackey の理論によって説明できる．すなわち一般的な定理として以下のもの（この定理をここでは Mackey の理論と呼んでいる）が知られている：

定理 1 ([2, 4.3] など) G を局所コンパクト位相群，H をその指数有限閉部分アーベル群とする．$X \subset \widehat{H}$ を $\widehat{H}$ の G 作用に関する完全代表系とする．各 $\chi \in X$ に対して $\widehat{G_\chi}^{\chi}$ を χ の固定化群 G_χ の既約ユニタリ表現で H タイプが χ のみからなるものとする．このとき，以下が成立する：

$$\widehat{G} = \bigcup_{\chi \in X} \left\{ \mathrm{ind}_{G_\chi}^{G} \pi \,\middle|\, \pi \in \widehat{G_\chi}^{\chi} \right\}.$$

[1] masaooi@ms.u-tokyo.ac.jp

今回我々が考察したい $G = H \rtimes K$ という半直積群の場合，各 χ に対してその固定化群 G_χ も半直積 $H \rtimes K_\chi$ として書くことができる．すると $\widehat{G_\chi}^\chi$ とは $\widehat{K_\chi}$ に他ならないため，$H \rtimes K$ の既約表現は，$\chi \in X$ と $\pi \in \widehat{K_\chi}$ の組によってパラメトライズされていると言える．これにより，平面結晶群の既約表現の分類は，有限群である点群 K の，二次元平面の商 $X = (\mathrm{S}^1)^2$ への作用を記述することに帰着される．
本論文ではまず，半直積で書ける平面結晶群全 13 種類の分類（生成元と関係式による記述）を思い出す．次にその分類を用いて，各場合に上述の手順に従って固定化群 K_χ を各 χ に対して決定する．

3 平面結晶群の点群

平面結晶群の点群として現れうる有限群は全て巡回群（回転群）もしくは二面体群から成り，具体的には次のいずれかで与えられる（詳しくは [4] あるいは [1] の Section 7 および 8 などを参照）：

$$C_1, \quad C_2, \quad C_3, \quad C_4, \quad C_6,$$

$$D_1, \quad D_2, \quad D_3, \quad D_4, \quad D_6.$$

ここで，C_n は位数 n の巡回群，D_n は位数 $2n$ の二面体群を表すものとする．
また，C_n と D_n の既約表現の次元と個数は，それぞれ以下のように与えられることも思い出しておく（表現としての記述も簡単にできる．詳しくは [3, Section 5] などを参照）：

巡回群 C_n：1 次元表現が n 個.

二面体群 D_{2m}：1 次元表現が 4 個，2 次元表現は $m-1$ 個.

二面体群 D_{2m+1}：1 次元表現が 2 個，2 次元表現は m 個.

4 平面結晶群の既約表現の分類：具体例

この節では，以下の結晶群を具体例にとって，既約表現の分類の説明をする：

$$\langle a,\, b,\, r,\, s \mid ab = ba,\, s^3 = 1,\, a^s = a^{-1}b,\, b^s = a^{-1},\, r^2 = 1,\, a^r = a,\, b^r = ab^{-1},\, (sr)^2 = 1 \rangle$$

この結晶群は 2 節の記法に合わせると，格子群が $H = \langle a,\, b\rangle \cong \mathbb{Z}^2$，点群が $\langle r,\, s\rangle \cong D_3$ となっている．そこで H の既約表現を $(S^1)^2$ によって，$(p,q) \in (\mathrm{S}^1)^2$ と次の一次元表現が対応するようにパラメトライズする：

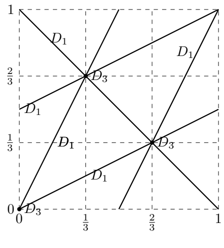
$$\chi_{(p,q)} \colon \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{C}^\times;\ (n,m) \mapsto p^n \cdot q^m.$$

更に S^1 と $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ の同型 $\exp(2\pi i x) \leftrightarrow x$ を固定することで，$[0,1) \times [0,1)$ を H の既約表現の同型類の集合と見なす．すると，$[0,1) \times [0,1)$ の各点 $\chi = (p,q)$ に対して，点群 K における固定化群 K_χ は次のように与えられる：

・$(p,q) \equiv (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}), (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$：$K_\chi = D_3$.

・$2b \equiv a$ または $b \equiv 2a$ または $a + b \equiv 0$：$K_\chi = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

・その他：$K_\chi = 1$．これを図示したものが以下である：



たとえば $\chi = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ の場合には固定化群が D_3 となるため，Mackey の理論（定理 1）における $\widehat{K_\chi}$ は，前節で説明した通り 3 元から成る．あるいは直線部分を除いた大半の generic な点については，固定化群 $\widehat{K_\chi}$ は自明となる．

5 平面結晶群の既約表現の分類：既約表現の同型類の図示

この節では前節で説明した手順に従って，各結晶群に対して固定化群の図を列挙する．ただし結晶群として，格子群と点群の半直積となるもののみを扱うことにする．詳しい分類は [1, Section 7, 8] を参照．なお結晶群は，点群の形に沿って場合分けする．

点群が巡回群 C_1 の場合： 平面結晶群は

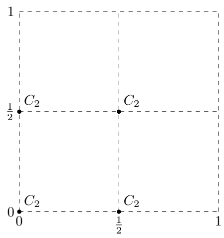
$$\langle a, b \mid ab = ba \rangle$$

として与えられるもののみで，固定化群の図は自明になる．

点群が巡回群 C_2 の場合： 平面結晶群は

$$\langle a, b, s \mid ab = ba, s^2 = 1, a^s = a^{-1}, b^s = b^{-1} \rangle$$

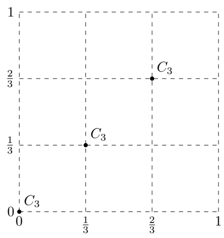
として与えられるもののみで，固定化群の図は以下の通り：



点群が巡回群 C_3 の場合： 平面結晶群は

$$\langle a, b, s \mid ab = ba, s^3 = 1, a^s = a^{-1}b, b^s = a^{-1} \rangle$$

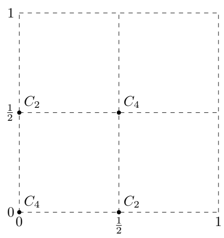
として与えられるもののみで，固定化群の図は以下の通り：



点群が巡回群 C_4 の場合： 平面結晶群は

$$\langle a, b, s \mid ab = ba, s^4 = 1, a^s = b, b^s = a^{-1} \rangle$$

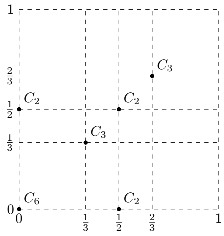
として与えられるもののみで，固定化群の図は以下の通り：



点群が巡回群 C_6 の場合： 平面結晶群は

$$\langle a,\, b,\, s \mid ab = ba,\, s^6 = 1,\, a^s = b,\, b^s = a^{-1}b \rangle$$

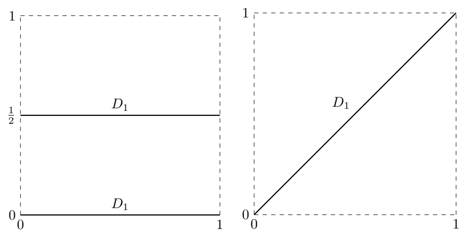
として与えられるもののみで，固定化群の図は以下の通り：



点群が二面体群 D_1 の場合： 平面結晶群は

$$\langle a,\, b,\, r \mid ab = ba,\, r^2 = 1,\, a^r = a,\, b^r = b^{-1} \rangle$$
$$\langle a,\, b,\, r \mid ab = ba,\, r^2 = 1,\, a^r = b,\, b^r = a \rangle$$

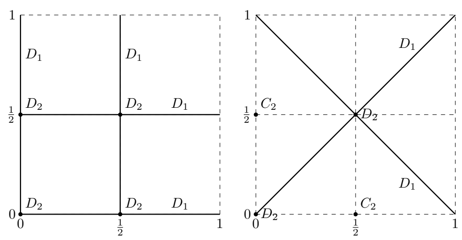
として与えられる二種類があり，固定化群の図はそれぞれ以下の通り：



点群が二面体群 D_2 の場合： 平面結晶群は

$$\langle a,\, b,\, r,\, s \mid ab = ba,\, s^2 = 1,\, a^s = a^{-1},\, b^s = b^{-1},\, r^2 = 1,\, a^r = a,\, b^r = b^{-1},\, (sr)^2 = 1 \rangle$$
$$\langle a,\, b,\, r,\, s \mid ab = ba,\, s^2 = 1,\, a^s = a^{-1},\, b^s = b^{-1},\, r^2 = 1,\, a^r = b,\, b^r = a,\, (sr)^2 = 1 \rangle$$

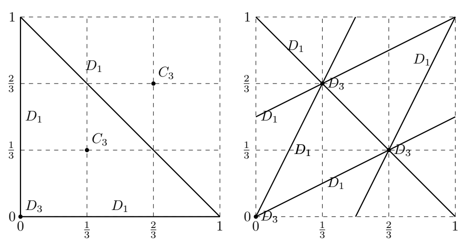
として与えられる四種類があり，固定化群の図はそれぞれ以下の通り：



点群が二面体群 D_3 の場合： 平面結晶群は

$$\langle a,\, b,\, r,\, s \mid ab = ba,\, s^3 = 1,\, a^s = a^{-1}b,\, b^s = a^{-1},\, r^2 = 1,\, a^r = a,\, b^r = ab^{-1},\, (sr)^2 = 1 \rangle$$
$$\langle a,\, b,\, r,\, s \mid ab = ba,\, s^3 = 1,\, a^s = a^{-1}b,\, b^s = a^{-1},\, r^2 = 1,\, a^r = b,\, b^r = a,\, (sr)^2 = 1 \rangle$$

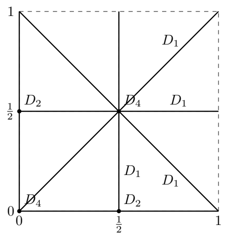
として与えられる二種類があり，固定化群の図はそれぞれ以下の通り：



点群が二面体群 D_4 の場合： 平面結晶群は

$$\langle a,\, b,\, r,\, s \mid ab = ba,\, s^4 = 1,\, a^s = b,\, b^s = a^{-1},\, r^2 = 1,\, a^r = a,\, b^r = b^{-1},\, (sr)^2 = 1\rangle$$

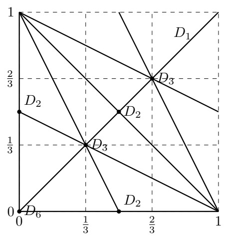
として与えられるもののみで，固定化群の図は以下の通り：



点群が二面体群 D_6 の場合： 平面結晶群は

$$\langle a,\, b,\, r,\, s \mid ab = ba,\, s^6 = 1,\, a^s = b,\, b^s = a^{-1}b,\, r^2 = 1,\, a^r = b,\, b^r = a,\, (sr)^2 = 1\rangle$$

として与えられるもののみで，固定化群の図は以下の通り：



6　終わりに

本論文では全 17 種類の平面結晶群のうち，半直積として表される 13 種類に対して既約表現を分類した．しかし Mackey の理論自体は，半直積として表されない結晶群も適用範囲として含んでいるため，残りの 1 種類も多少複雑にはなれど容易に記述できると期待できる．
一方 3 次元以上の結晶群については，同値類の数が飛躍的に増加するため，一つ一つ考察してゆくのは困難があると思われる．だが分類の仕組み自体は平面の場合と変わらないため，結晶群の構造さえ具体的に与えられれば既約表現の分類は機械的に行えると期待できる．
現在知られている結晶群の分類をまず数学的に分かりやすいかたちに書き換え，その上で本論文の方法に則って既約表現の分類を試みる，というのは次に考えられる課題であると言える．

参考文献

[1] Johnson D.-L., *Symmteries*, *Springer undergraduate mathematics series*, Springer-Verlag, London, 2001.

[2] Kaniuth E., Taylor K.-F., *Induced representations of locally compact groups*, Vol. 197 of *Cambridge Tracts in Mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge, 2013.

[3] J.-P. Serre, *Linear representations of finite groups*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977, Translated from the second French edition by Leonard L. Scott, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 42.

[4] 河野 俊丈, 結晶群, 共立講座 数学探検, 共立出版, 2015.

[5] 日本数学会編集, 岩波数学辞典第 4 版, 2007.