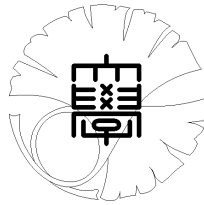


数理科学実践研究レター 2018–12 August 20, 2018

オーストラリア西岸沖における
大気海洋結合方程式の特殊解について

by

佐藤謙太



UNIVERSITY OF TOKYO
GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES
KOMABA, TOKYO, JAPAN

オーストラリア西岸沖における 大気海洋結合方程式の特殊解について

佐藤謙太¹ (東京大学数理科学研究科)

Kenta Sato (Graduate School of Mathematical Science, the University of Tokyo)

概要

オーストラリア西岸沖における海面水温の大幅な上昇現象をニンガルー・ニーニョ現象という。本小論では、ニンガルー・ニーニョ現象の理解の為、大気海洋結合方程式を考え、その特殊解の一つを考察し、そのような形の特殊解が存在するための条件を与える。

1 はじめに

エル・ニーニョ現象とは、東太平洋赤道域における海面水温が平年より高くなる現象である。一方で、低くなる現象はラ・ニーニャ現象と呼ばれる。エル・ニーニョ現象やラ・ニーニャ現象は数年おきに発生しており、その現象は世界的な異常気象を引き起こすことが知られている。これらの現象のメカニズムは [3] においてよく調べられている。実際 [3] では、大気海洋結合方程式の特殊解を考察することにより、現実の現象とよく符合する数理モデルを組み立てることに成功した。

本小論では、エル・ニーニョ/ラ・ニーニャ現象に類似の現象である、ニンガルー・ニーニョ及びニンガルー・ニーニャ現象を扱う。ニンガルー・ニーニョ現象とはオーストラリア西岸沖における海面水温が平年より高くなる現象である。一方で、低くなる現象は、ニンガルー・ニーニャ現象と呼ばれる。これらの現象もエル・ニーニョ/ラ・ニーニャ現象と同様に周辺の気候や生態系に多大な影響を与えており、その現象の解明が急務である。

ニンガルー・ニーニョ(ニーニャ)現象は、[1] や [2] などで研究が進んでいるものの、数理的に完全な解明にはまだ至っていない。実際、これらの現象はエル・ニーニョ/ラ・ニーニャ現象と比べて、次の二つの点で異なっている：

- 1) 緯度が違うため、コリオリパラメータ等のデータが異なる。また、その為、微分方程式の近似の仕方にも違いがある。
- 2) 岸の影響を考える必要がある。

そのため、[3] をはじめとするエル・ニーニョ/ラ・ニーニャ現象に関する先行研究の手法の多くは通用しない。本小論では、ニンガルー・ニーニョ/ニーニャ現象を数理的に理解する為に、大気海洋結合方程式の特殊解の一つに注目し考察を行った。

謝辞 本研究の推進にあたって多大なアドバイスや支援をいただいた、東塚知己先生、柏原崇人先生、齊藤宣一先生、李煥元さんに感謝いたします。また JAMSTEC 見学の際に、案内及び解説をしていただいた土井威志さんと板倉憲一さんに感謝を申し上げます。多くの御指摘・御助言を下された査読者の方々にも深くお礼申し上げます。

2 大気海洋結合方程式

オーストラリア西岸沖を含む広い領域を Ω で表す。 Ω は \mathbb{R}^2 の開集合とみなしてよい。初期時刻を $t=0$ とする。この小論では 6 つの写像

$$U, V, H, u, v, h : \Omega \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$$

を考える。それぞれの写像は次のような物理量を表している：

$(x, y) \in \Omega$ と $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ について

¹ktsato@ms.u-tokyo.ac.jp

- 1) $U(x, y, t)$ と $V(x, y, t)$ はそれぞれ, 時刻 t における, 点 (x, y) の大気の x 方向, y 方向の速度
- 2) $u(x, y, t)$ と $v(x, y, t)$ はそれぞれ, 時刻 t における, 点 (x, y) の海面の x 方向, y 方向の速度
- 3) $H(x, y, t)$ と $h(x, y, t)$ はそれぞれ, 時刻 t における, 点 (x, y) の上空の大気の層の高さ, 海水の温度躍動層の深さの基準値からのずれ

このとき, 次の連立偏微分方程式を大気海洋結合方程式と呼ぶ ([3, 第 2 章]):

$$\begin{aligned} U_t - fV + gH_x &= -AU \\ V_t + fU + gH_y &= -AV \\ H_t + D(U_x + V_y) &= -BH - \alpha h \\ u_t - fv + gh_x &= -au + \gamma U \\ v_t + fu + gh_y &= -av + \gamma V \\ h_t + d(u_x + v_y) &= -bh \end{aligned}$$

ここで, $U_t = H/t$ などと表記している. また, 方程式に現れるパラメータの意味は次の通りである:

- 1) 定数 $A, B > 0$ はそれぞれ大気に関する Rayleigh 摩擦, Newtonian 冷却の係数
- 2) 定数 $a, b > 0$ はそれぞれ海水に関する Rayleigh 摩擦, Newtonian 冷却の係数
- 3) 定数 $D, d > 0$ はそれぞれ大気, 海洋の層の厚さ
- 4) 定数 $g > 0$ は重力加速度, 定数 f はコリオリパラメータ
- 5) 定数 $\alpha \geq 0$ は上空の熱量変化 (Q) と h との比を表す量
- 6) 定数 $\gamma \geq 0$ は大気と海洋の速度の関係を表す量

3 問題設定

まず, パラメーター A, B, a, b, d, D, γ の値は東太平洋赤道域と同じ値, つまり [3] にならって, 次のように設定する:

$$\begin{aligned} A &= 2 \times 10^{-6} [\text{s}^{-1}], \quad B = 2/3 \times 10^{-6} [\text{s}^{-1}], \quad a = 10^{-7} [\text{s}^{-1}], \quad b = 10^{-7} [\text{s}^{-1}], \\ D &= 400 [\text{m}], \quad d = 0.2 [\text{m}], \quad \gamma = 5 \times 10^{-7} [\text{s}^{-1}] \end{aligned}$$

更に, 重力加速度 g は $g = 10 [\text{m}/\text{s}^2]$ と近似して考える.

また, コリオリパラメータ f は地球の自転角速度 ω と緯度 ϕ について, $f = 2\omega \sin \phi$ であることが知られている. そのため, 以下では $f = 10^{-4}$ と近似して議論を行う.

最後に, 定数 α の値については, 一般に岸が近い場合にはその値が大きくなる傾向があり, [3] のデータは使えない. そこで, 本小論では α は具体的な値を代入せずに, 変数として扱うことにする.

次に, 大気海洋結合方程式の特殊解を考える. [3] において, 最も単純な形の特殊解として,

$$(U, V, H, u, v, h) = \text{Re}((U_0, V_0, H_0, u_0, v_0, h_0) \cdot e^{i(kx+ly-\omega t)})$$

のような形のを考察していた. ただし, $U_0, V_0, H_0, u_0, v_0, h_0, \omega \in \mathbb{C}$ は定数で, $k, l \in \mathbb{R}$ は実定数, 更に $\text{Re}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ は実部への射影である.

この特殊解において, x, y 方向への波長はそれぞれ $2\pi/k$ 及び $2\pi/l$ であり, 現実的な波の波長と照らし合わせることで,

$$10^{-7} \leq \sqrt{k^2 + l^2} \leq 10^{-5}$$

という条件を得る.

更に, $\omega \in \mathbb{C}$ の虚部 $\omega_i \in \mathbb{R}$ について考える. ω_i の大きさは, 各関数の t に関する増大度に関係している. たとえば, $\omega_i \geq 10^{-5}$ とすると, 10^6 秒 (約 2 週間) で各関数の値は e^{10} 倍以上されることになり, 現実には比べ大きすぎる. 一方, ニンガルー・ニーニョ現象では時間の経過に伴い現象のスケールが大きくなっていくので, $0 \leq \omega_i$ という条件も必要である. 以上より

$$0 \leq \omega_i \leq 10^{-5}$$

という条件も仮定する.

以下では, すべての関数を複素数値に拡張して考え, 特殊解を次のように定義する.

定義 1. 1) $U_0, V_0, H_0, u_0, v_0, h_0, \omega \in \mathbb{C}$ と $k, l \in \mathbb{R}$ に対して,

$$(U, V, H, u, v, h) = (U_0, V_0, H_0, u_0, v_0, h_0) \cdot e^{i(kx+ly-\omega t)}$$

の形の関数で, 大気海洋結合方程式を満たすものを, 大気海洋結合方程式の特殊解と呼ぶ.

2) 大気海洋結合方程式の特殊解のうち,

$$10^{-7} \leq \sqrt{k^2 + l^2} \leq 10^{-5}, \quad 0 \leq \omega_i \leq 10^{-5}$$

を満たすものを, 条件 (*) を満たす特殊解と呼ぶ.

本小論ではこのような形の特殊解がいつ存在するかについて考えた.

問題 2. α がどのような値の時, 条件 (*) を満たす大気海洋結合方程式の特殊解が存在するか?

4 主結果

まず, $b = a$ に注意しながら微分方程式を整理すると, 条件 (*) は次のように言い換えることができる.

補題 3. $\alpha, \omega_i, \kappa > 0$ を固定する. この時, 次は同値.

1) ある $U_0, V_0, H_0, u_0, v_0, h_0, k, l, \omega$ が存在して,

$$(a) \quad \kappa = \sqrt{k^2 + l^2},$$

$$(b) \quad \omega \text{ の虚部は } \omega_i,$$

$$(c) \quad (U, V, H, u, v, h) = (U_0, V_0, H_0, u_0, v_0, h_0) \cdot e^{i(kx+ly-\omega t)} \text{ が大気海洋結合方程式の解である.}$$

2) 次の二つの方程式のうちいずれかが成立

$$8(\omega_i + a)^3 - 2E(\omega_i + a) + F = 0 \tag{1}$$

$$(\omega_i + a)^3 - E(\omega_i + a) - F = 0, \tag{2}$$

ただしここで, E, F は κ, α に依存する実数で,

$$S = \frac{dg\gamma\alpha\kappa^2}{B(A^2 + f^2) + Dg\kappa^2 A}$$

$$E = -(f^2 + dg\kappa^2) + SA$$

$$F = -Sf^2.$$

ここに出てくる方程式を考察することで, 次のような結果を得た.

命題 4. $2 \times 10^{-3} \leq \alpha \leq 12$ の時, 条件 (*) を満たす特殊解は存在する.

証明. 式 (1) を変形すると,

$$\alpha = \frac{B(A^2 + f^2) + Dg\kappa^2 A}{dg\gamma\kappa^2} \cdot \frac{8\tilde{\omega}_i^3 + 2\tilde{\omega}_i(f^2 + dg\kappa^2)}{f^2 + 2A\tilde{\omega}_i},$$

ただし $\tilde{\omega}_i := \omega_i + a$ とおいた.

この右辺を κ と $\tilde{\omega}_i$ に関する連続関数とみなし $\alpha(\kappa, \tilde{\omega}_i)$ と書く. κ と ω_i が $10^{-7} \leq \kappa \leq 10^{-5}$, $0 \leq \omega_i \leq 10^{-7}$ で動くときの $\alpha(\kappa, \tilde{\omega}_i)$ の最小値を α_{\min} , 最大値を α_{\max} とおく. この時, 中間値の定理より $\alpha_{\min} \leq \alpha \leq \alpha_{\max}$ なる任意の α に対し, 条件を満たすような κ と ω_i が存在する. したがって $\alpha_{\min} < 2 \times 10^{-3}$ 及び $12 < \alpha_{\max}$ を示せば十分.

今,

$$f^2 < f^2 + A^2, f^2 + dg\kappa^2, f^2 + 2A\tilde{\omega}_i < 1.1 \cdot f^2$$

に注意しながら各値を代入すると, 次の不等式評価を得る.

$$\begin{aligned} \frac{(6.6 \cdot 10^{-15} + 8 \cdot 10^{-3}\kappa^2)(8\tilde{\omega}_i^3 + 2 \cdot 10^{-8}\tilde{\omega}_i)}{1.1 \cdot 10^{-14}\kappa^2} &< \alpha(\kappa, \tilde{\omega}_i) \\ &< \frac{(7.4 \cdot 10^{-15} + 8 \cdot 10^{-3}\kappa^2)(8\tilde{\omega}_i^3 + 2.2 \cdot 10^{-8}\tilde{\omega}_i)}{10^{-14}\kappa^2} \end{aligned}$$

左辺の関数を $\beta_1(\kappa, \tilde{\omega}_i)$, 右辺の関数を $\beta_2(\kappa, \tilde{\omega}_i)$ とおくと, どちらも κ に関して減少関数, $\tilde{\omega}_i$ に関して増加関数である. したがって, $\alpha_{\min} < \beta_2(10^{-5}, 0+a)$, $\beta_1(10^{-7}, 10^{-5}+a) < \alpha_{\max}$. 不等式評価により, $\beta_2(10^{-5}, 0+a) < 2 \times 10^{-3}$ 及び $12 < \beta_1(10^{-7}, 10^{-5}+a)$ とわかり, 以上より示された. \square

一方 [3] では, α が十分に小さいという仮定のもとで, 現実の時間スケールに合致した特殊解が存在しないと結論づけていた. 次の結果はその結論の精密化となっている.

命題 5. $\alpha \leq 1.5 \times 10^{-3}$ の時, 条件 (*) を満たす特殊解は存在しない.

証明. $\alpha < 1$, $10^{-7} \leq \kappa \leq 10^{-5}$ の時, 各種データを代入することで, $E, F < 0$ であることがわかる. この時, 三次方程式 (2) は非負の根を持たない.

一方, もし α, κ, ω_i が式 (1) を満たすならば $\alpha \geq \alpha_{\min}$ が必要である. 更に, この時

$$\alpha \geq \alpha_{\min} > \beta_1(10^{-5}, 0+a).$$

となる. しかし, 不等式評価により $1.5 \times 10^{-3} < \beta_1(10^{-5}, 0+a)$ となるため矛盾. したがって補題 3 より示された. \square

5 終わりに

冒頭で述べたように, オーストラリア西岸沖での大気海洋結合方程式を考える為には, 東太平洋赤道域の場合と違って α が小さくない場合を扱わないといけない可能性があり, 定理 4 が役立つと期待できる. しかしながら, 本小論で得られた結果では, まだ完全な数理モデルを組み立てる段階には至っていない. 実際の α の値の算出や, もっと一般的な解の解析, 岸の考慮等が未解決の問題として残されている.

参考文献

- [1] Feng M., McPhaden M. J., Xie S. P. and Hafner, J., La Niña forces unprecedented Leeuwin Current warming in 2011, Scientific reports, **3** (2013), 1277.
- [2] Kataoka T., Tozuka T., Behera S. and Yamagata, T., On the Ningaloo Niño/Niña. Climate dynamics, **43** (5-6) (2014), 1463–1482.
- [3] Yamagata T., Stability of a simple air-sea coupled model in the tropics, Elsevier oceanography series, Vol. **40**, Elsevier, 637–657, 1985.