数理科学実践研究レター　2018–13 August 20, 2018

信号制御の最適化のための目的関数

by

松澤陽介、片岡武典

UNIVERSITY OF TOKYO

GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES

KOMABA, TOKYO, JAPAN

信号制御の最適化のための目的関数

松澤陽介[1]（東京大学大学院数理科学研究科）
Yohsuke Matsuzawa (Graduate School of Mathematical Sciences, the University of Tokyo)
片岡武典[2]（東京大学大学院数理科学研究科）
Takenori Kataoka (Graduate School of Mathematical Sciences, the University of Tokyo)

概 要

交通量が与えられた時，信号をどのように制御するのが最も車の総待ち時間を少なくできるかという問題に対し，一つのモデルを与えた．信号のスプリットとオフセットの滑らかな関数 W であって，W を最小にする点が最適制御になっていると考えられるものを構成した．

1 はじめに

いくつかの交差点と信号からなる，道路網を考える．信号の 1 サイクルにかかる時間は全ての信号で共通とし考慮しない．車の量が与えれているとき (正確に何を与えるかは後で述べる)，信号のスプリット (指定した方向が青の時間)，オフセット (基準となる交差点を決め，その交差点の指定された方向が青に変わる時間と，考えている交差点の指定された方向が青に変わる時間のずれ) をどのように指定するのが最も効率的かを考える．この問題に対する一つの定式化と，一つのアプローチを紹介するのが本稿の目標である．本稿の結果の特徴は以下の二点にある．

- 交通ネットワークのモデルに対しオフセットとスプリットを変数とする滑らかな関数 (目的関数) を構成し，それを最小化する点を見つけるという形に問題を設定した．
- 我々の目的関数は滑らかなので，計算機で最小値を求めることが容易である．

2 謝辞

本研究に度々有益なコメントをくださった，日産自動車の貴志泰久氏，東京大学大学院数理科学研究科の金井雅彦氏，間瀬崇史氏，黄欣馳氏，高橋和音氏，吉田純氏，東京大学大学院理学系研究科の渡邉真隆氏，庄田宗人氏に感謝いたします．本研究は数物フロンティア・リーディング大学院 (FMSP) の援助を受けたものです．

3 目的関数

一般的な交通ネットワークに対する目的関数の定義を述べる前に，具体例を一つあげる．

Example 3.1. 以下のような道路で 6 から 7 に向かう車の待ち時間を考える．

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & — & 2 & — & 3 & — & 4 \\
| & & | & & | & & | \\
5 & — & 6 & — & 7 & — & 8 \\
| & & | & & | & & | \\
9 & — & 10 & — & 11 & — & 12
\end{array}$$

- 信号の 1 サイクルは 1 とする．
- 交差点 i で横方向が青の時間を s_i とする．

[1] myohsuke@ms.u-tokyo.ac.jp
[2] tkataoka@ms.u-tokyo.ac.jp

- 交差点 i で横方向が青の間の中央の時刻を x_i とする．
- p_{67} を 6 から 7 に向かう車で 5 から来たものの 1 サイクルあたりの台数とする．
- q_{67} を 6 から 7 に向かう車で 2 または 10 から来たものの 1 サイクルあたりの台数とする．
- a_{67} を 6 から 7 に行くのにかかる時間とする．

6 から 7 に向かう車の 7 での待ち時間の総和の目安として以下の量を考えることができる．

$$(1-s_7)^2\Bigg\{\frac{p_{67}}{s_7}p_{67}\Bigg(1-s_7\big(1-d(a_{67}+x_6,x_7)\big)\Bigg) \\ +\frac{q_{67}}{s_7}q_{67}\Bigg(1-s_7\big(1-d(a_{67}+x_6+1/2,x_7)\big)\Bigg)\Bigg\}$$

但し，$d(x,y)=\frac{1}{2}\big\{1-\cos(2\pi(x-y))\big\}$ は単位円周上の距離関数の近似である．各項が表している量は以下の通りである．(正確には，数式の後ろに書いている量に比例するという意味．)

1. $(1-s_7)^2$：一台の車の信号の平均待ち時間.
2. $p_{67}/s_7, q_{67}/s_7$：通過に必要なサイクル数.
3. $p_{67}\Bigg(1-s_7\big(1-d(a_{67}+x_6,x_7)\big)\Bigg), q_{67}\Bigg(1-s_7\big(1-d(a_{67}+x_6+1/2,x_7)\big)\Bigg)$：信号に引っかかる台数.

さて一般に有限単純グラフ $G=(V,E)$ を考える．ここで $V=\{1,\ldots,n\}$ は頂点集合，E は辺集合である．ただし，全ての辺は両側向き付きとする．つまり頂点 i,j が辺で結ばれているとき，$(i,j),(j,i)\in E$ である．このグラフに以下の量が付随させられているとする．頂点 $i\in V$ に対し，(オフセット) $x_i\in[0,1)$, (スプリット) $s_i\in(0,1)$．辺 $(i,j)\in E$ に対し，(所要時間/サイクル) $a_{ij}\in\mathbb{R}_{\geq 0}$，$p_{ij},q_{ij}\in\mathbb{R}_{\geq 0}$，$e_{ij}\in\{1,-1\}$.
これを交通ネットワークだと思い，交差点 i から j へ向かう車の j での “待ち時間” の総和を次でモデル化:

$$L(x_1,\ldots,x_n,s_1,\ldots,s_n,i,j)=\frac{\Big((1-s_j)(1-e_{ij})+s_j(1+e_{ij})\Big)^2}{s_j(1-e_{ij})+(1-s_j)(1+e_{ij})}\times \\ \Bigg\{p_{ij}^2\Bigg(1-\frac{1}{2}\Big(s_j(1-e_{ij})+(1-s_j)(1+e_{ij})\Big)\Big(1-d\left(a_{ij}+x_i,(e_{ij}+1)/4+x_j\right)\Big)\Bigg) \\ +q_{ij}^2\Bigg(1-\frac{1}{2}\Big(s_j(1-e_{ij})+(1-s_j)(1+e_{ij})\Big)\Big(1-d\left(a_{ij}+x_i+1/2,(e_{ij}+1)/4+x_j\right)\Big)\Bigg)\Bigg\}.$$

但しここでも，$d(x,y)=\frac{1}{2}\big\{1-\cos(2\pi(x-y))\big\}$ は単位円周上の距離関数の近似.
各文字の表している量は以下の通りである．

- x_i は i でのオフセット.
- s_i は i でのスプリット (各交差点で指定した方向の青の時間).
- a_{ij} は i から j に行くのにかかる時間/サイクル.
- p_{ij} は i から j に向かう車のうち，s_i の時に出発する台数.

- q_{ij} は i から j に向かう車のうち，$1-s_i$ の時に出発する台数.
- e_{ij} は 1 か -1. i から j に向かう車が j でそのまま通れる青の時間が s_j なら -1.

次の関数を目的関数として採用する.

$$W(x_1,\dots,x_n,s_1,\dots,s_n)=\sum_{(i,j)\in E}L(x_1,\dots,x_n,s_1,\dots,s_n,i,j).$$

交通ネットワークのパラメター $a_{ij},p_{ij},q_{ij},e_{ij}$ が与えられたときに W が最小になる $x_1,\dots,x_n,s_1,\dots,s_n$ が最適に近いオフセットとスプリットになっていると考えられる．W は $x_1,\dots,x_n,s_1,\dots,s_n$ の関数として，$\mathbb{R}^n\times(0,1)^n$ 上滑らかなので，計算機により簡単に極小値を求めることができる.

4 計算例

以下のサンプルデータに対して，W を最小化するオフセットとスプリットを計算した.

Remark 4.1. 下の表は，ネットワークの各場所から入り各場所に出た車の台数を表している．例えば A1 から入って，B1 から出た車の台数は 25 台である.

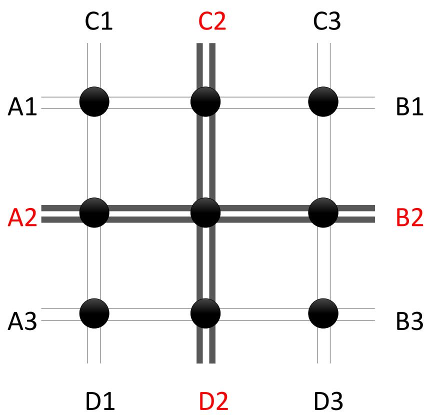
Remark 4.2. 車の量 p_{ij},q_{ij} はこのデータから計算した.（全てのルートを均等に通るとして.）所要時間 a_{ij} は全て 1/4 にし計算は Mathematica で行ったが，実際のコードは長いので割愛する.

面の解析・最適化(シンプル条件)

前提条件：

ネットワーク：　3×3
道路：　片側1車線/対向2車線(太線/赤字は幹線と仮定)、リンク長　300m、規制速度　40㎞/h
交差点：全ての交差点は信号により制御
交通量：1時間当たりの台数(各路線別の交通量は、OD matrix参照)

ネットワーク



OD(Origin-Destination) matrix

		OUT												
		A1	A2	A3	B1	B2	B3	C1	C2	C3	D1	D2	D3	SUM
IN	A1		0	0	25	50	25	25	50	25	25	50	25	300
	A2	0		0	25	400	25	25	50	25	25	50	25	650
	A3	0	0		25	50	50	25	50	25	25	50	25	325
	B1	50	50	25		0	0	25	50	25	25	50	25	325
	B2	25	300	25	0		0	25	50	25	25	50	25	550
	B3	25	50	50	0	0		25	50	25	25	50	25	325
	C1	25	50	25	25	50	25		0	0	50	50	25	325
	C2	25	50	25	25	50	25	0		0	25	300	25	550
	C3	25	50	25	25	50	25	0	0		25	50	50	325
	D1	25	50	25	25	50	25	50	50	25		0	0	325
	D2	25	50	25	25	50	25	25	400	25	0		0	650
	D3	25	50	25	25	50	25	25	50	50	0	0		325
	SUM	250	700	250	225	800	250	250	800	250	250	700	250	

データ提供：貴志 泰久（日産自動車）

オフセットは

0	0.75	0.99
0.26	0.51	0.73
0.52	0.27	0.75

となり，スプリットは

0.49	0.45	0.49
0.54	0.50	0.54
0.50	0.46	0.50

となった．ここで，各表の値はネットワークの各点でのオフセット，スプリットを表している．オフセットは左上の頂点を基準とした (0 とした)．スプリットは横方向が青の時間とした．このサンプルデータでは，中央の縦と中央の横が交通量が多くなっているので，この結果 (特にスプリット) は妥当だと言える．