

数理科学実践研究レター 2018-22 September 07, 2018

交通流の連続体モデル

by

庄田宗人、渡邊真隆



UNIVERSITY OF TOKYO
GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES
KOMABA, TOKYO, JAPAN

交通流の連続体モデル

庄田宗人¹, 渡邊真隆 (東京大学理学系研究科)

Munehito Shoda, Masataka Watanabe (School of Science, The University of Tokyo)

概要

交通流を支配する法則を明らかにすることは将来の自動運転社会の実現に向けた重要課題である。特に、どのような要因によって理想的な所要時間に比べ実際の所要時間が遅延するかを理解しなければならない。本論文では交通流を連続体の流れと近似し、流れの非線形性がもたらす効果を取り入れた交通流モデル及びその数値計算法を提案する。支配方程式は車の総台数の保存則であり、密度と密度流束の間には経験的な関係を与えた。車の最大速度が密度に依存するという形で非線形効果を取り入れられている。数値計算結果から、信号待ちの行列が解消するまでの過程がよく再現されていることがわかる。

1 はじめに

来たる自動運転社会の実現に向け、交通流の制御及び最適化は最重要課題の一つと言える。近年では車一台一台を追跡した高精度交通流シミュレーションが行われつつあるが、一方で交通流を支配する普遍的な法則の理解はまだまだ乏しい。したがって現実的な数値計算だけでなく、現実の系よりもはるかに単純化した系での基礎法則の理解が重要であると言える。

合原らは交通流の時間発展を常微分方程式で記述し、混雑具合の最適化の方法を議論した [1]。しかしこの方法では車の流れを追跡することはできず、定量的な遅延の評価は難しい。そこで本研究では偏微分方程式を用いた交通流の記述方法を提案する。この手法では車の流れを時間的に追跡できるだけでなく、信号待ちに由来する遅延効果も取り入れることが可能である。以下 2 章では定式化とその数値解法を記述し、3 章で結果を議論する。

2 連続体近似

2.1 定式化

簡単のため、一本道の交通流を考慮する。ある時間 t 、地点 x における車の密度を $\rho(t, x)$ とする。途中での車の生成や消失がない場合 ρ の時間発展は以下の保存則で記述される。

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \frac{\partial}{\partial x}f = 0. \quad (1)$$

ここで f は車の密度流束 (フラックス) である。もし時間、空間、車の速度が密度によらず一定 (v_{\max}) であるならば、フラックスは以下で与えられる。

$$f = \rho(t, x)v_{\max}. \quad (2)$$

これはいわば「理想的」な状況を反映している。以下のような表式の方がより現実的である。

$$f = \rho(t, x)v(t, x)\Psi(t, x). \quad (3)$$

$\Psi(t, x)$ は信号の効果を表す。例えば $x = x_0$ に $t_{\min} < t < t_{\max}$ の間赤になる信号がある場合

$$\Psi(t, x) = \begin{cases} 0 & (x = x_0 \text{ and } t_{\min} < t < t_{\max}), \\ 1 & (\text{otherwise}). \end{cases} \quad (4)$$

本研究では v の定式化が特に重要である。 v が ρ に依存せず一定の場合は以下が成り立つ。

$$v(t, x) = v_{\max}. \quad (5)$$

¹shoda@eps.s.u-tokyo.ac.jp

これは車の速度が車間距離に依存せず常に一定（最大速度）であることを表す。実際の交通流では明らかに車の速度と車間距離は正の相関をもつ。すなわち、車間距離が短いほど（密度が大きいほど）速度も遅くなるはずだ。したがって以下のようなモデルの方がより現実的な交通流を反映していると考えられる。

$$v(t, x) = v_{\max} \left(1 - \frac{\rho(t, x + \varepsilon)}{\rho_{\max}} \right). \quad (6)$$

ただし ε は十分小さな正の数を表す。これは車の速度がその場の密度ではなく目の前の密度（車間距離）で決まることに由来する項である。式 (6) を式 (1) に代入すると支配方程式が非線形であることが容易に確かめられる。

2.2 数値計算法

交通流は保存則で記述され、さらに信号待ち行列といった不連続面が各所に出現するため数値解法は風上差分法（リーマンソルバー）が適している。一方、記述すべき最小スケール＝車の幅（数メートル）と交通流のマクロスケール（数百～数万メートル）の間には高々4桁程度しかギャップは存在せず、交通流が本質的に道路に沿った一次元系であることを考えると高次精度化したスキームは必要ない。

以下では具体的な計算方法を示そう。まず、物理量の離散化は有限体積法で行う [2]。 x 軸上に等間隔で区切り $x_{i+1/2}$ を設ける。

$$x_{i+1/2} = \Delta x \left(i + \frac{1}{2} \right). \quad (7)$$

ただし Δx は区切り幅であり、一般にこの幅が小さいほどより高精度な計算ができる。 ρ の離散値 ρ_i を以下のように定義する。

$$\rho_i(t) = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} dx \rho(x, t). \quad (8)$$

基礎方程式を $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ で積分し Δx で割ると

$$\frac{d}{dt} \rho_i(t) = \frac{1}{\Delta x} [f_{i+1/2} - f_{i-1/2}]. \quad (9)$$

ただし、 $f_{i\pm 1/2} = f(t, x_{i\pm 1/2})$ 。今回は式 (6) の場合のみ考える。

$$\begin{aligned} f_{i+1/2} &= f(t, x_{i+1/2}) = \rho(t, x_{i+1/2}) v_{\max} \left(1 - \frac{\rho(t, x_{i+1/2} + \varepsilon)}{\rho_{\max}} \right) \\ &\approx \rho_i(t) v_{\max} \left(1 - \frac{\rho_{i+1}(t)}{\rho_{\max}} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

最後の近似では、 $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ 内で物理量の大きさが一定であるという仮定を用いた。これは空間に関して一次精度の計算法であることに対応するが先にも述べた通り交通流の数値計算で高次精度計算は必ずしも必要ない。不満であれば $\rho(t, x_{i+1/2})$ の見積もりに MUSCL 法 [3] やその他の高次精度補間法を用いれば良い。式 (9) と (10) を合わせると

$$\frac{d}{dt} \rho_i(t) = \frac{v_{\max}}{\Delta x} \left[\rho_i(t) \left(1 - \frac{\rho_{i+1}(t)}{\rho_{\max}} \right) - \rho_{i-1}(t) \left(1 - \frac{\rho_i(t)}{\rho_{\max}} \right) \right]. \quad (11)$$

あとはこの式を各 i について Runge-Kutta 法などで積分すれば良い。

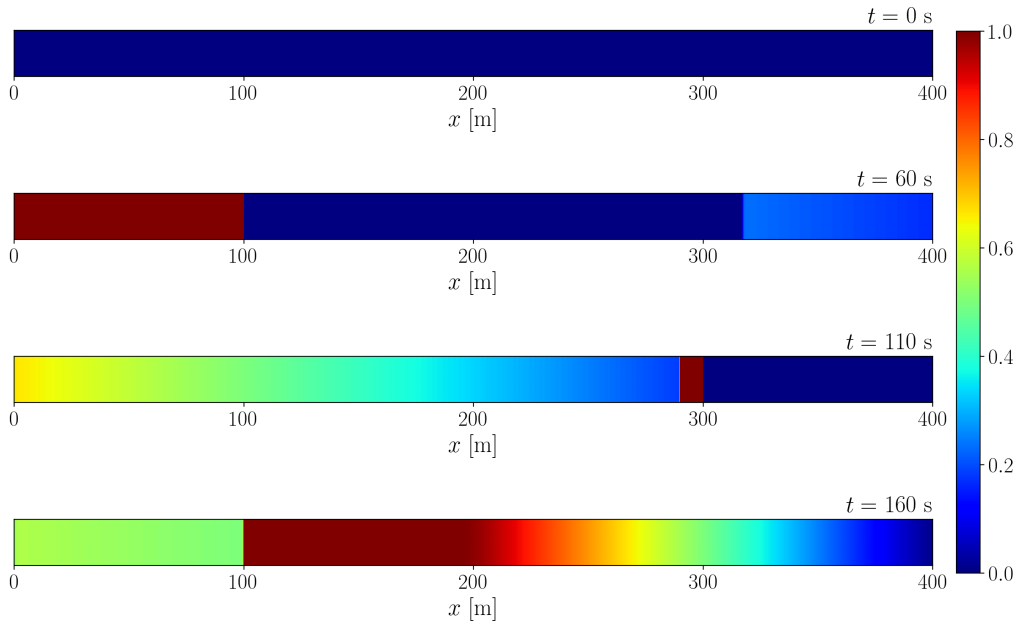


図 1: 非線形効果を考慮した車の伝播の計算。 $t = 0$ s、 $t = 60$ s、 $t = 110$ s、 $t = 160$ s での車の密度 ρ/ρ_{\max} 。

2.3 計算設定

計算設定を示そう。長さ 400 m の一本通行道 $0 \text{ m} \leq x \leq 400 \text{ m}$ に信号が二つ ($x = 100 \text{ m}$, $x = 300 \text{ m}$) 存在する場合を考察する。車は x 軸と同じ方向に移動するものとする。 $x = 0 \text{ m}$ の境界からは $\rho/\rho_{\max} = 0.5$ の密度で車が常に流入してくるとする。車の最大速度は $v_{\max} = 10 \text{ m s}^{-1}$ とする。信号は以下のように二箇所に設定する。

$$\Psi(t, x) = \begin{cases} 0 & (x = 100 \text{ m} \text{ and } 30 \text{ s} < t < 80 \text{ s}), \\ 0 & (x = 300 \text{ m} \text{ and } 100 \text{ s} < t < 150 \text{ s}), \\ 1 & (\text{otherwise}). \end{cases} \quad (12)$$

空間解像度 $\Delta x = 0.1 \text{ m}$ 、時間解像度 $\Delta t = 0.01 \Delta x / v_{\max}$ で計算する。速度は線形・非線形の両方の場合で計算する。線形の場合の速度は以下で与えられる。

$$v(t, x) = \begin{cases} 0 & (\rho(t, x + \varepsilon) = \rho_{\max}), \\ v_{\max} & (\text{otherwise}). \end{cases} \quad (13)$$

一方非線形の場合は式 (6) で与えられる。

3 結果

図 1 及び図 2 に計算結果を示した。図 1 には $t = 0$ s、 $t = 60$ s、 $t = 110$ s、 $t = 160$ s での車の密度 ρ/ρ_{\max} を示した。非線形効果が特に顕著なのは $t = 160$ s での分布である。これは $x = 300 \text{ m}$ の信号が青に変わってから 10 秒後の分布であるが、青に変わってから 10 秒経過したにもかかわらず、信号の待ち行列の後方 $x \approx 100 - 200 \text{ m}$ は渋滞が緩和されず止まったままである。これは信号が青に変わっても（特に後ろの）車はすぐに発進できず、前の車の発進を待たなければならないことに由来する。その結果渋滞は徐々に前方からならされ、車の分布はなめらかなグラデーションを形成する。これは流体力学における希薄波 (rarefaction wave) の生成と同じメカニズムである。

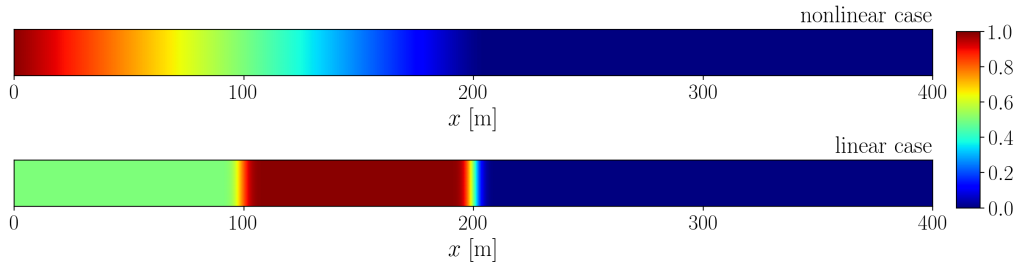


図 2: $t = 90$ s での車の密度 ρ/ρ_{\max} 。上：非線形の場合、下：線形の場合。

非線形効果は線形の場合と非線形の場合の比較でもわかりやすい。図 2 には $t = 90$ s での車の密度 ρ/ρ_{\max} を非線形の場合（上図）と線形の場合（下図）について示した。これは $x = 300$ s の信号が青に変わってから 10 秒後の分布である。線形の場合、待ち行列が全体の形を維持しながら前進している一方、非線形の場合は前から徐々に行列が解消する。明らかに非線形の場合は行列の解消の所要時間による遅延が生じていることがわかる。

4 まとめ

本研究では非線形偏微分方程式による交通流の記述の方法を提案し、その数値計算を行った。非線形効果により、行列の解消に由来する遅延が記述できることがわかった。簡単な偏微分方程式で遅延を記述できることは、将来的な研究に向け極めて有効である。

本研究は著者だけでなく貴志泰久氏、片岡武典氏、松澤陽介氏、黄欣馳氏、高橋和音氏、吉田純氏、金井雅彦氏、間瀬崇史氏との議論により成し遂げられました。心より御礼申し上げます。

参考文献

- [1] Aihara K., Ito K., Nakagawa J., and Takeuchi T., Optimal control laws for traffic flow, Applied Mathematics Letters, 2016, Volume 26, Issue 6, 617-623.
- [2] Toro E. F., *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*, Springer-Verlag, 2nd edition, 1999.
- [3] 藤井孝蔵, 流体力学の数値計算法, 東京大学出版会, 1994.