

7.2 解析の準備

各 Run につき、プローブ呈示前 3 秒間の磁場データの全チャンネルにわたる 2 乗平均値を雑音の分散 σ^2 とし、雑音標準偏差 σ の見積もり値を得た。

脳を近似する球モデル (近似球) の中心は、ピックアップ・コイルを配置した観測領域を 50% 広げた範囲内の頭部表面を最小 2 乗近似するように算出した (図 7.3 参照)。なお、被験者の頭部形状の入力や直交座標系の導入は、センサ位置指示システムによって前もってなされている。これは、センサ部に取り付けられた送信機と、被験者の頭部の特徴点³に固定された受信機との間の通信により、3 次元的な相対位置関係を把握するシステムである。

再構成領域は、側面投影図 (Sagittal Image) において観測領域を覆い、近似球中心からの距離 r が $R_i=4.0\text{cm} < r < R_o=9.0\text{cm}$ である領域を、5.0mm 間隔でメッシュ点分割して設定した。直交座標軸の原点は、そこから Nasion へ向かって x 軸、Left PA point へ向かって y 軸、Cz へ向かって z 軸がとれる位置に定めた。以上の準備の結果を、表 7.2 に示す。

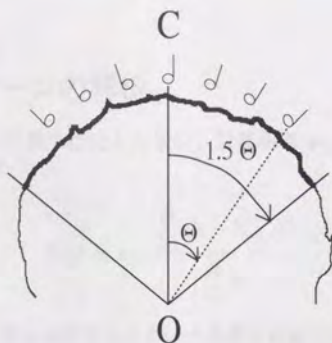


図 7.3: 近似球中心の算出。C は Centroid of Channel Group (下段のコイルの座標の平均位置)、O はセンサ・アレイの極率の中心、C から最も離れたコイルの位置と C を O から見込む角度を θ とする時、 1.5θ までを見込んだ範囲の頭部表面形状を球面として最小 2 乗近似する球を近似球とする。

³ 原理的には 3 点あれば十分だが、位置合わせの誤差が大きい場合にデータを棄却して再計測するチェック機能強化などの理由から、Nasion (鼻の上のくぼみ)、Right PA point (右耳のこめかみの先端)、Left PA point (左耳のこめかみの先端)、Inion (後頭部の出っ張り)、Cz (頭頂部を経由して Nasion と Inion を結ぶ最短曲線の中点) の 5 点を使用した。なお、PA は preauricular の略である。

表 7.2: 脳磁場解析の設定

Run 名	雑音許容幅 ε [fT] (= 雑音標準偏差 σ)	近似球中心 [cm]	メッシュ点の個数 N
TR1	17.62	(0.99, 2.10, 5.48)	1872
TL1	17.84	(0.72, -3.27, 4.85)	800
TR2	16.71	(0.99, 2.10, 5.48)	1872
TL2	17.54	(0.72, -3.27, 4.85)	800
TR3	19.15	(1.23, 3.25, 5.22)	1842
TL3	19.73	(0.66, -2.14, 5.02)	2058
AR4	24.21	(1.07, 0.89, 5.54)	2400
AL4	21.18	(0.87, -3.57, 4.48)	1234
IR2	29.06	(0.33, 0.22, 6.37)	1923
IL2	22.71	(0.42, -1.78, 5.56)	1570
IR3	28.22	(0.66, 1.17, 5.88)	1846
IL3	26.75	(0.45, -1.85, 5.55)	1720
IR4	21.10	(0.79, 1.39, 5.81)	1398
IL4	18.42	(0.22, -1.23, 5.74)	2182

7.3 双極性パターンの解析

脳磁場の発生源を単一双極子推定した場合、計算磁場 \mathbf{b}_{cal} の測定磁場 \mathbf{b} に対する GoF (Goodness of Fit) 値

$$\text{GoF} \equiv 1 - \frac{\sum_{i=1}^M (b_i - b_{\text{cal}, i})^2}{\sum_{i=1}^M b_i^2} \quad (7.1)$$

が何% 以下ならば推定結果を棄却するかという基準は意見の分かれるところである。ここでは、97% ~ 98% とする見解 [81], [82] を参考にし、まず、BTi 社製の単一双極子推定ツール (磁場フィッティング) で $\text{GoF} \geq 97\%$ となった潜時のデータを解析した。そのようなデータを含んだ Run は左脳が 4 つ (TL1, TL2, TL3, IL2) 右脳が 1 つ (TR3) であり、いずれも潜時 270ms 付近である。解析結果を図 7.4~図 7.12 に示し、それらを表 7.3 にまとめる。なお、等磁場線は x - z 投影面で測定磁場を線形補間して描いた。また、MRI 重畳表示は、主要な解双極子が再構成領域端に現れた TL1 以外の Run について行い、当該断面 $\pm 6\text{mm}$ 内にある解双極子の位置をモーメント強度によらず同じ大きさのマークで示した⁴。

⁴ ハードコピーの限界により、本文中の MRI 重畳表示は元画像と階調が異なっている。

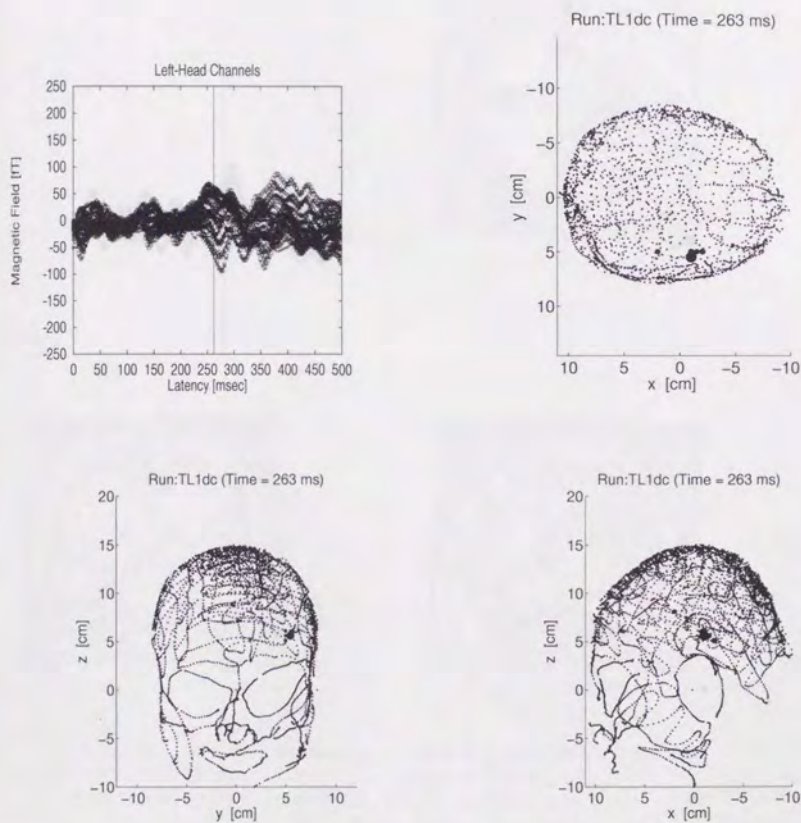


図 7.4: TL1 の $t=262.1\text{ms}$ における解双極子分布図と測定磁場の時間波形 (37 チャンネルすべてのデータの重畳表示). モーメント強度は丸印の面積に比例 (最大のものが 0.915nAm). $\text{GoF}=98.1\%$ の単一双極子推定解との誤差 $\Delta d=2.80\text{mm}$.

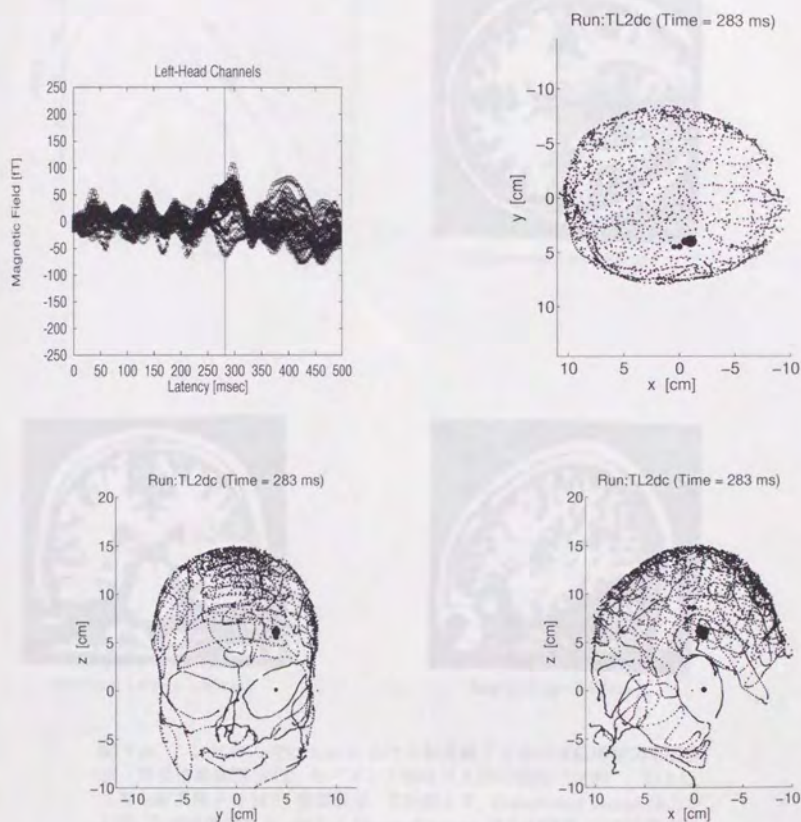


図 7.5: TL2 の $t=282.3\text{ms}$ における解双極子分布図と測定磁場の時間波形 (37 チャンネルすべてのデータの重畳表示). モーメント強度は丸印の面積に比例 (最大のものが $1.11\mu\text{A}\cdot\text{m}$). $\text{GoF}=98.0\%$ の単一双極子推定解との誤差 $\Delta d=4.91\text{mm}$.

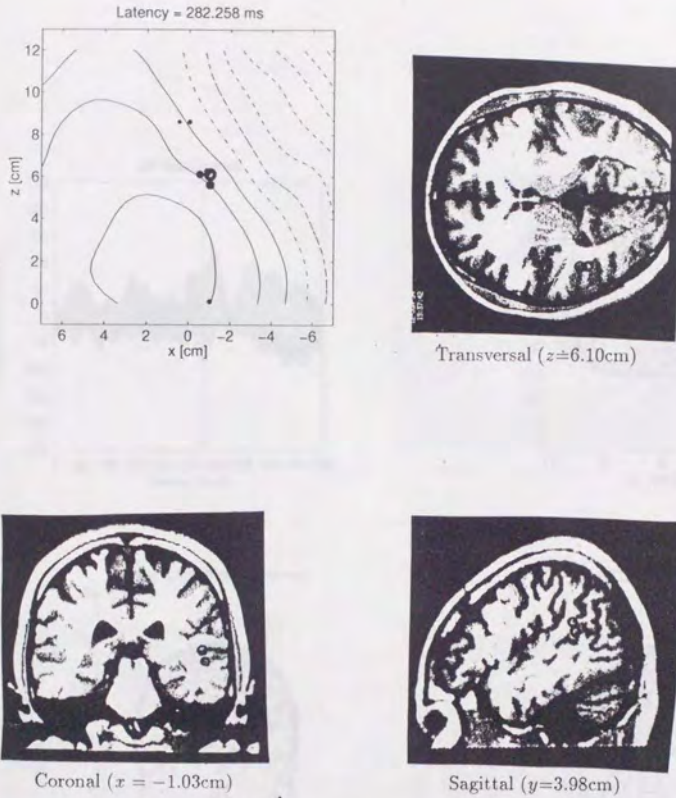


図 7.6: TL2 の $t=282.3\text{ms}$ における解双極子分布の等磁場線図重畳表示 (等磁場線間隔 20fT , モーメント強度は丸印の面積に比例), および、主要な解双極子の MRI 重畳表示. 本紙面上で, Transversal Image は上が右脳, 左が前頭である. 同じく Coronal Image は上が頭頂, 左が右脳である. 同じく Sagittal Image は上が頭頂, 左が前頭である. MRI 上の双極子は, モーメントによらず丸印で位置を示した.

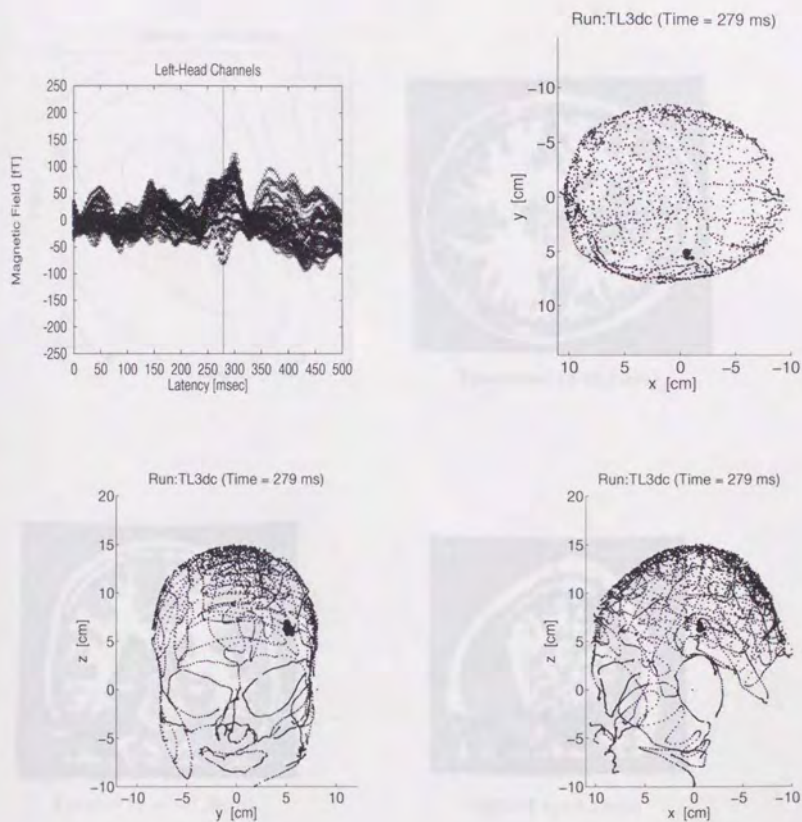
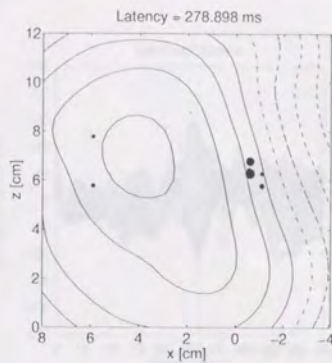


図 7.7: TL3 の $t=278.9\text{ms}$ における解双極子分布図と測定磁場の時間波形. モーメント強度は最大で 0.799nAm . $\text{GoF}=97.4\%$ の単一双極子推定解との誤差 $\Delta d=4.50\text{mm}$.



Transversal ($z=6.77\text{cm}$)



Coronal ($x=-0.59\text{cm}$)



Sagittal ($y=5.11\text{cm}$)

図 7.8: TL3 の $t=278.9\text{ms}$ における解双極子分布の等磁場線図重畳表示 (等磁場線間隔 20fT) , および, 主要な解双極子の MRI 重畳表示.

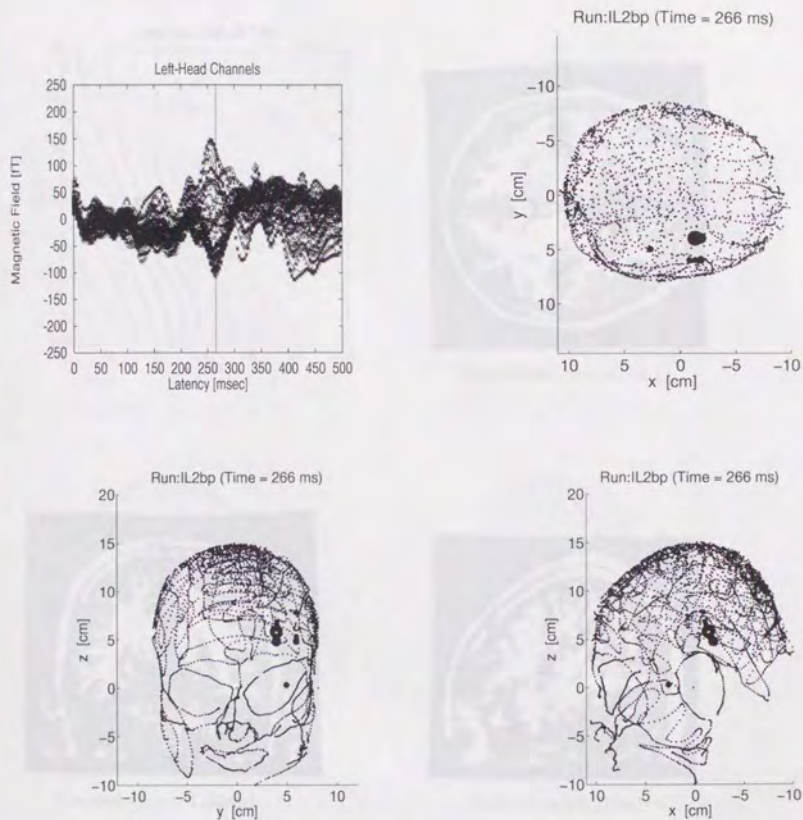
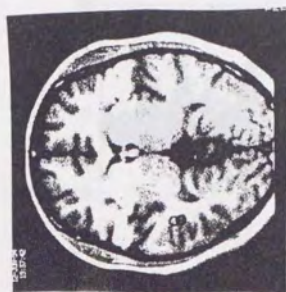
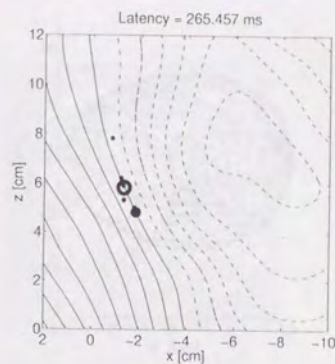


図 7.9: IL2 の $t=265.5\text{ms}$ における解双極子分布図と測定磁場の時間波形。モーメント強度は最大で 1.63nAm 。GoF=97.1% の単一双極子推定解との誤差 $\Delta d=2.20\text{mm}$ 。



Transversal ($z=5.81\text{cm}$)



Coronal ($x=-1.33\text{cm}$)



Sagittal ($y=3.97\text{cm}$)

図 7.10: IL2 の $t=265.5\text{ms}$ における解双極子分布の等磁場線図重畳表示 (等磁場線間隔 20fT) , および, 主要な解双極子の MRI 重畳表示.

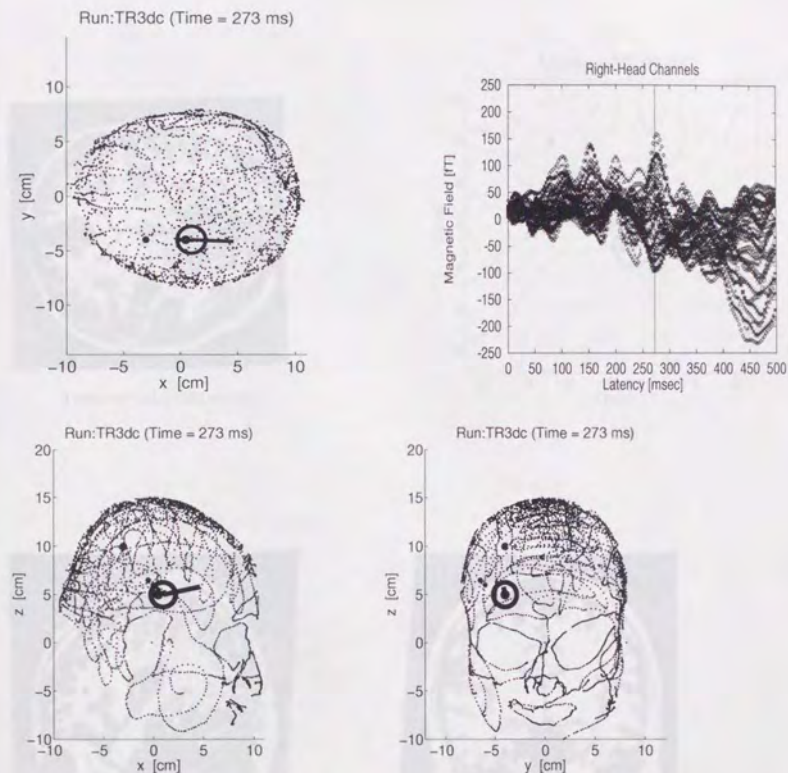
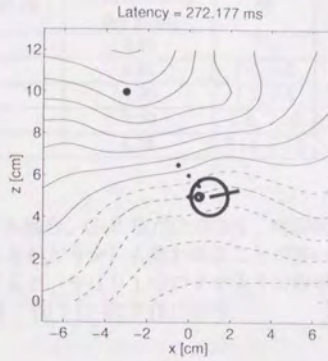


図 7.11: TR3 の $t=272.2\text{ms}$ における解双極子分布図と測定磁場の時間波形。モーメント強度は最大で 4.59nAm 。GoF=97.1% の単一双極子推定解との誤差 $\Delta d=4.28\text{mm}$ 。



Transversal ($z=4.97\text{cm}$)



Sagittal ($y=-4.00\text{cm}$)



Coronal ($x=0.98\text{cm}$)

図 7.12: TR3 の $t=272.2\text{ms}$ における解双極子分布の等磁場線図重畳表示 (等磁場線間隔 20fT) , および、主要な解双極子の MRI 重畳表示.

表 7.3: MEG 双極性パターンの解析. なお, 選択的最小ノルム解の Location of Mean と単一双極子推定解との距離を位置推定誤差とした.

Run 名	潜時 [ms]	単一双極子推定の GoF [%]	位置推定誤差 Δd [mm]	図
TL1	262.1	98.1	2.80	7.4
TL2	282.3	98.0	4.91	7.5, 7.6
TL3	278.9	97.4	4.50	7.7, 7.8
IL2	263.5	97.1	2.20	7.9, 7.10
TR3	272.2	97.1	4.28	7.11, 7.12

単一双極子で近似できる解の信頼性を議論する場合, GoF 値だけでなく, 時間的な安定性 (その前後の潜時でも近い位置に推定されるかどうか) も問われることが多い。そこで, 以上の解析の前後の潜時も解析した。すると, やはり1つのクラスタに集中した解が得られた。その Location of Mean の軌跡を, 図 7.13-図 7.16 に示す。

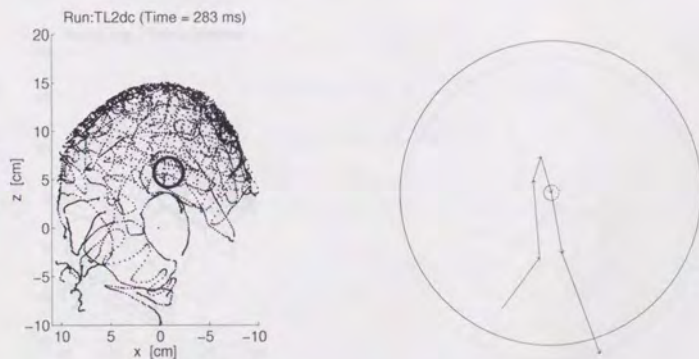


図 7.13: 選択的最小ノルム解の平均位置の軌跡 (Run: TL2). 右図は, 潜時 268.8ms から 289.0ms までの 20.2ms の間の軌跡を矢状断面に投影した図で, 円の中心が図 7.5 の解双極子分布の平均位置を示す. 外側の円はそこを中心とする半径 2cm の円であり, 左図に太線の円で示した領域に対応する.

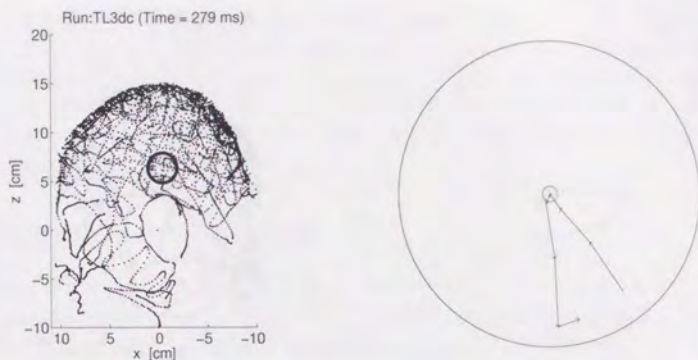


図 7.14: 選択的最小ノルム解の平均位置の軌跡 (Run: TL3). 右図は、潜時 268.8ms から 292.3ms までの 23.5ms の間の軌跡を矢状断面に投影した図で、円の中心が図 7.7 の解双極子分布の平均位置を示す。外側の円はそこを中心とする半径 2cm の円であり、左図に示した領域に対応する。

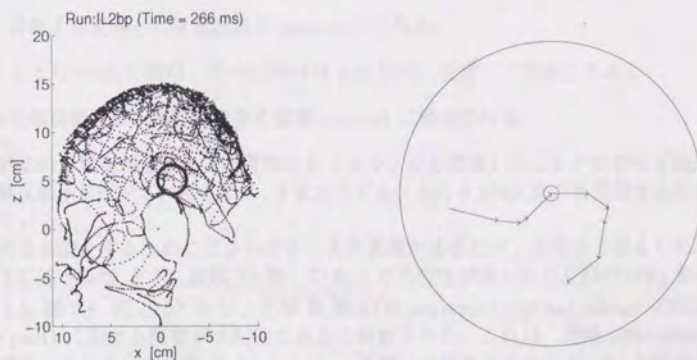


図 7.15: 選択的最小ノルム解の平均位置の軌跡 (Run: IL2). 右図は、潜時 252.0ms から 282.3ms までの 30.3ms の間の軌跡を矢状断面に投影した図で、円の中心が図 7.9 の解双極子分布の平均位置を示す。外側の円はそこを中心とする半径 2cm の円であり、左図に示した領域に対応する。

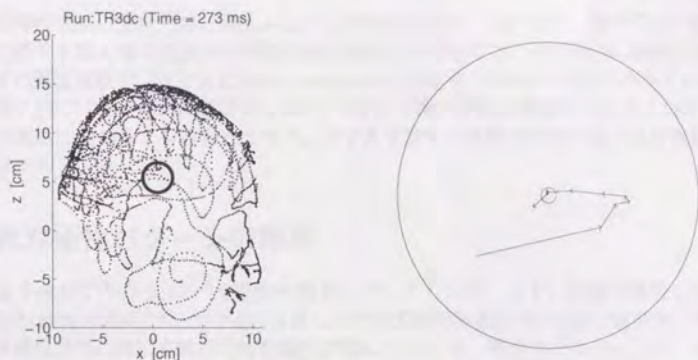


図 7.16: 選択的最小ノルム解の平均位置の軌跡 (Run: TR3). 右図は、潜時 258.7ms から 289.0ms までの 30.3ms の間の軌跡を矢状断面に投影した図で、円の中心が図 7.11 の解双極子分布の平均位置を示す。外側の円はそこを中心とする半径 2cm の円であり、左図に示した領域に対応する。

本節の解析結果で、次の 3 点が明らかとなった。

- 単一双極子推定解との位置誤差が 5mm 以内である。
- 少なくとも 20ms の間は、その近傍はほぼ 2cm 以内に安定して推定される。
- 主要な解双極子は、白質ではなく脳溝 (sulcus) に推定される。

特に、解剖学的先験情報を使わず白質内にもメッシュ点を設置したにもかかわらず脳溝に主要な解双極子が推定されたことは、3次元モデルにおける SMN 法の有効性をあらためて示している。

生理学的な結論を得るためにはさらにデータの蓄積が必要だが、現時点で考えられることを以下に述べる⁵⁾。まず、複数 (3 個) の Run で再現性が得られた左脳の MRI 重畳表示 (図 7.6, 図 7.8, 図 7.10) から、上側頭溝 (STS: superior temporal sulcus) の後部 (posterior part) における興奮が支配的であると判断された。これは、潜時 220~400ms で上側頭溝ないしシルビウス溝 (Sylvius sulcus) 後端に磁場源を求めた Kuriki らの結果と一致し、純音刺激で同定された auditory area の下後方に位置する [79],[80]。上側頭溝は、視覚にも聴覚にも関係する高次機能の座であるとも言われている。TL2, TL3, IL2 の結果は、視覚刺激で与えられた表音文字の照合に上側頭溝が深く関与していることを示唆している。

⁵⁾ 例えば、文献 [83] が有力な参考資料となる。

一方、右脳の Run (TR3) では、島 (insula) に局在推定された (図 7.12)。端やごく一部のくびれた部分を除く島の大部分は表面が頭部表面と平行なので、その表面に垂直に発生するはずの電流双極子はほとんど radial component となり、MEG への寄与が小さい。しかし、図 7.12 では島の端に推定されており、MEG で検出可能な興奮だと推測される。なお、島は言語に関わるとも言われており、文字を呈示する実験で活動が起こる可能性のある部分である。

7.4 非双極性パターンの解析

単一双極子推定で十分な GoF 値が得られないデータとして、まず、前節で解析しなかった左脳の Run の潜時 270ms 付近に注目して不等式制約極表示 SMN 法で磁場源を推定した。再構成領域の端に支配的な解双極子が現れた Run と、解双極子のモーメント強度が最大でも 0.5nAm に満たない Run は棄却した。その結果、IL3 で上側頭溝、IL4 でシルビウス溝にある双極子を含む複数双極子解が得られた。それらを図 7.17-図 7.20 に示す。

図 7.18 では、 $z=6.30\text{cm}$ の解双極子が上側頭溝の後部、 $z=0.30\text{cm}$ の解双極子が下側頭回 (inferior temporal gyrus) の下面⁶と思われる位置に推定されている。図 7.20 では、 $z=7.49\text{cm}$ の解双極子 (水平断像、矢状断像、冠状断像ともに右側の列に表示) がシルビウス溝の後端、 $z=2.99\text{cm}$ の解双極子 (水平断像、矢状断像、冠状断像ともに左側の列に表示) が側副溝 (collateral sulcus) と思われる位置に推定されている。

上側頭溝後部とシルビウス溝後部は、十分単一双極子近似できる双極性磁場が観測された Run で、前節の解析や Kuriki らの解析 [79],[80] において局在推定された部位である。今回、それらとはほぼ同じ潜時 ($\approx 270\text{ms}$) の磁場が単一双極子で十分フィッティングできない Run でも、同じ脳溝の興奮が複数双極子磁場源の構成要素として推定された。これは、SMN 法で複数双極子推定することによって、当該実験パラダイムで本来観察したかった神経活動以外の興奮が同時に起こった場合にも対応できる可能性を示している。

次に、同じく前節で解析しなかった右脳の Run の潜時 270ms 付近に注目して不等式制約極表示 SMN 法で磁場源を推定した。再構成領域の端に支配的な解双極子が現れた Run と、解双極子のモーメント強度が最大でも 0.5nAm に満たない Run は棄却した。その結果、図 7.21、図 7.22 に示すように、TR1 で島⁷に局在した解が得られた。これもまた、十分単一双極子近似できる双極性磁場が観測された Run (TR3) で局在推定された部位とよく合っている。左脳の場合と同様、SMN 法で複数双極子推定することによって、当該実験パラダイムで本来観察したかった神経活動以外の興奮が同時に起こった場合にも対応できる可能性を示している。

⁶被験者の MRI 走査などが不十分なため、上側頭溝、シルビウス溝、島以外の部位の判定は、推測の域を出ない。

⁷島の中でも、くびれているために MEG 検出可能になっていると思われる位置。

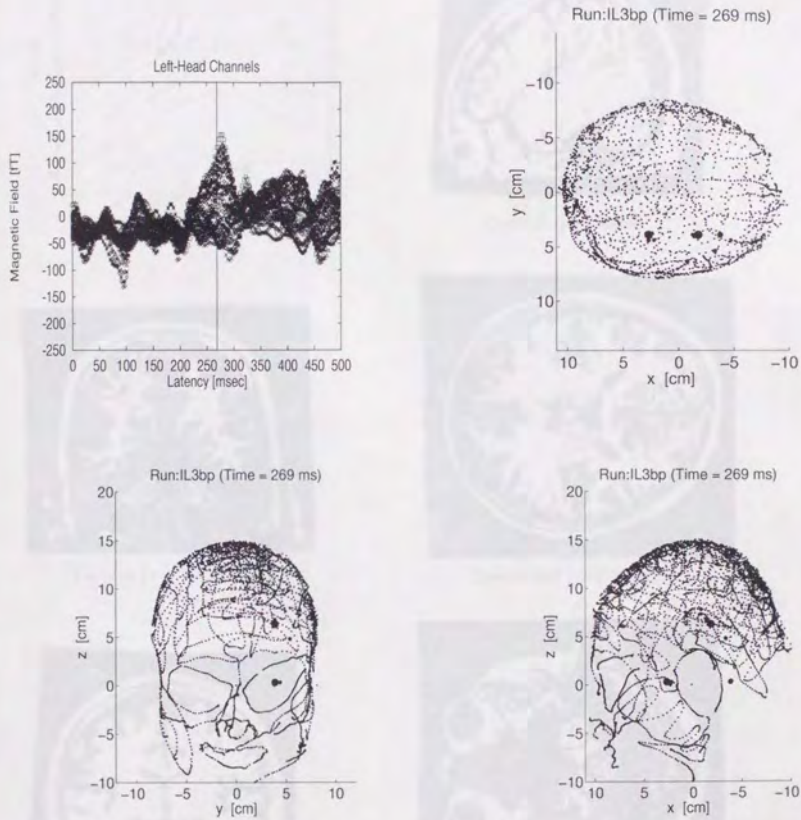
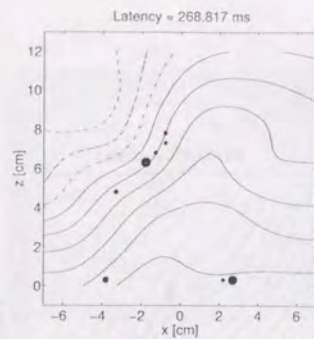


図 7.17: IL3 の $t=268.8\text{ms}$ における解双極子分布図と測定磁場の時間波形. モーメント強度は最大で 0.825nAm .



Sagittal ($y=3.90\text{cm}$)



Coronal ($x=-1.80\text{cm}$)



Transversal ($z=6.30\text{cm}$)



Coronal ($x=2.70\text{cm}$)



Transversal ($z=0.30\text{cm}$)

図 7.18: IL3 の $t=268.8\text{ms}$ における解双極子分布の等磁場線図重畳表示 (等磁場線間隔 20fT)、および、主要な解双極子の MRI 重畳表示.

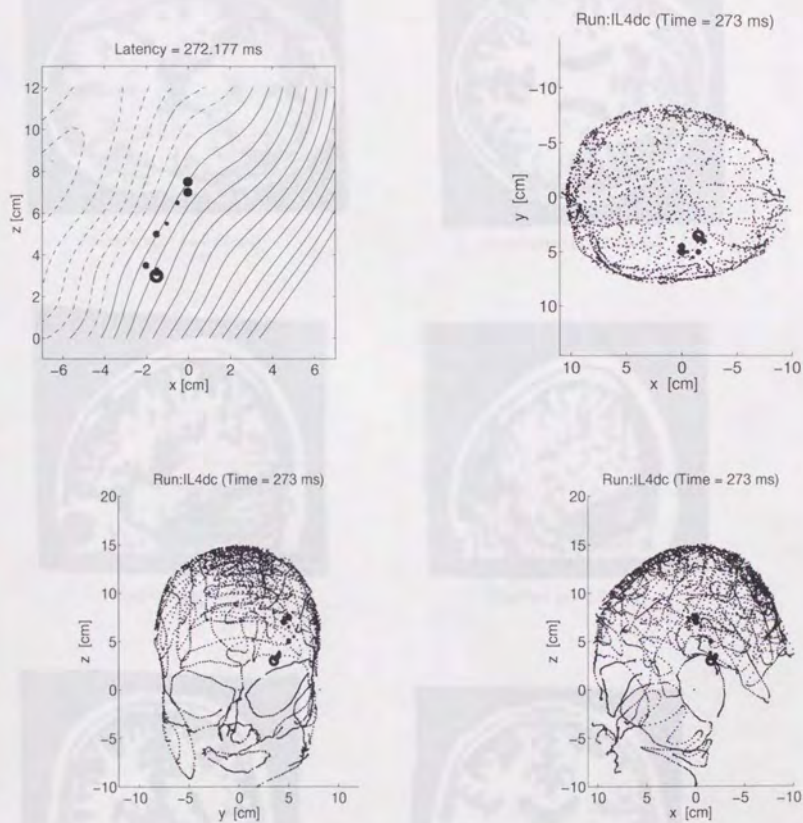


図 7.19: IL4 の $t=272.2\text{ms}$ における解双極子分布図と等磁場線図重畳表示 (等磁場線間隔 20fT)。モーメント強度は最大で 1.46nAm 。



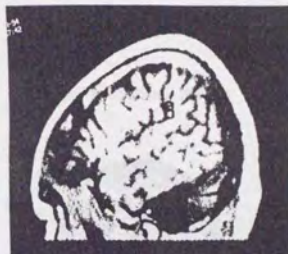
Transversal ($z=2.99\text{cm}$)



Transversal ($z=7.49\text{cm}$)



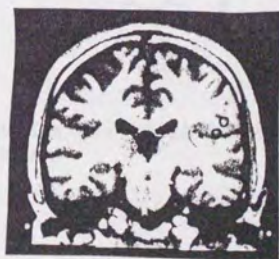
Sagittal ($y=3.52\text{cm}$)



Sagittal ($y=5.02\text{cm}$)



Coronal ($x=-1.53\text{cm}$)



Coronal ($x=-0.03\text{cm}$)

図 7.20: IL4(272.2ms) の推定解の MRI 重畳表示

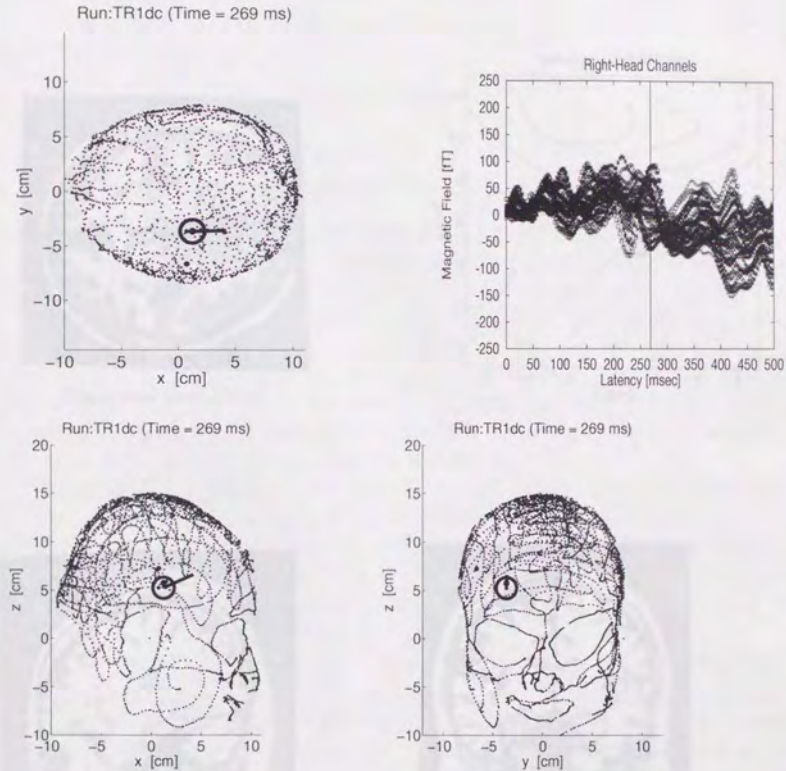
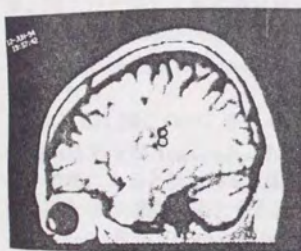
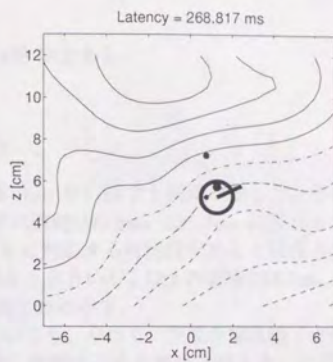


図 7.21: TR1 の $t=268.8\text{ms}$ における解双極子分布図と測定磁場の時間波形. モーメント強度は最大で 3.98nAm .



Transversal ($z=5.23\text{cm}$)



Sagittal ($y = -3.65\text{cm}$)



Coronal ($x=1.24\text{cm}$)

図 7.22: TR1 の $t=268.8\text{ms}$ における解双極子分布の等磁場線図重畳表示 (等磁場線間隔 20fT) , および、主要な解双極子の MRI 重畳表示.

さて、すべての Run について潜時 3.4ms から 497.3ms までの磁場データをすべて解析して動画表示すると<9>、モーメント強度の小さな解双極子 ($\leq 0.1\text{nAm}$) は必ずしも安定した位置に現れない。一方、大きな解双極子を含むクラスタが複数存在する解は、クラスタの1つが側頭後部 (posterior part of temporal) を経由して移動する。それらの代表的なパターンの中で、

- SN 比のピークで、かつ、その SN 比が 20dB 以上ある。
- クラスタが2個である。
- 主要な解双極子が再構成領域の端に現れない。

という条件を満たす潜時が 200ms 台前半にある Run が右脳で2個見つかった。それらは AR4 と IR4 であり、SN 比のピークはそれぞれ潜時 221.8ms, 235.2ms に現れる (推定値でそれぞれ 22.0dB, 26.7dB)。また、これらに対応する可能性があると推測されるデータを動画表示から求めると、SN 比は 18.6dB と小さいが、IR2 の潜時 228.5ms が候補となった。以上3つの解析結果を、図 7.23-図 7.28 に示す。

図 7.24, 図 7.26, 図 7.28 の MRI 重畳表示においても、やはり、主要な解双極子が白質ではなく脳溝に推定されている。その意味では、信頼性のある解だと言える。ただし、その解剖学的位置の同定 (具体的な脳溝の名称の判定) は微妙である^{*}。そのため推測レベルではあるが、以下にいくつかの双極子を具体的に見ていく。

まず、図 7.24 について述べる。 $x=2.82\text{cm}$ の Coronal Image に現れている下側の双極子 ($y=-3.86\text{cm}$ の Sagittal Image では左側の双極子) は、島にあると思われる。これは、図 7.12 と同じく島の端に推定されており、MEG で検出可能な言語関連の興奮だと推測される。Transversal Image および $y=-5.86\text{cm}$ の Sagittal Image に現れている双極子は、上前頭溝 (superior frontal sulcus) ないしは下前頭溝 (inferior frontal sulcus) と推測される。

次に、図 7.26 について述べよう。 $x=-1.92\text{cm}$ の Coronal Image に現れている解双極子 (Sagittal および Transversal Image では右側の双極子) は、頭頂間溝 (intraparietal sulcus) の奥にあると思われる。頭頂間溝は、体性感覚や視覚 (特に視覚による注意) に関連深い連合・高次機能の座とする説があり、視覚で与えられる文字の照合で活動する可能性はある。 $x=1.58\text{cm}$ の Coronal Image に現れている双極子 (Sagittal および Transversal Image では左側の双極子) は、中心溝 (central sulcus) の前側もしくは中心前溝 (precentral sulcus) に位置していると思われる。中心溝は体性感覚野と運動野の境界をなし、図 7.26 の位置は顔ないし手・指の運動に対応する可能性が高い。

最後の図 7.28 は、図 7.26 と同じく、頭頂間溝および中心溝ではないかと推察される。

以上のうちで、frontal のもの (中心溝あるいはその前の前頭葉に位置するもの) は、運動と関連する可能性がある。被験者の返答動作に関連する脳活動までには、少なくとも 200ms かかるとの説が有力だが、図 7.23-図 7.28 の潜時は 200ms 以降なので、活動の可能性を否定することはできない。

^{*}一般に、MRI 画像を用いても判定困難な脳溝が多く、専門の脳外科医が誤ることも希ではない。

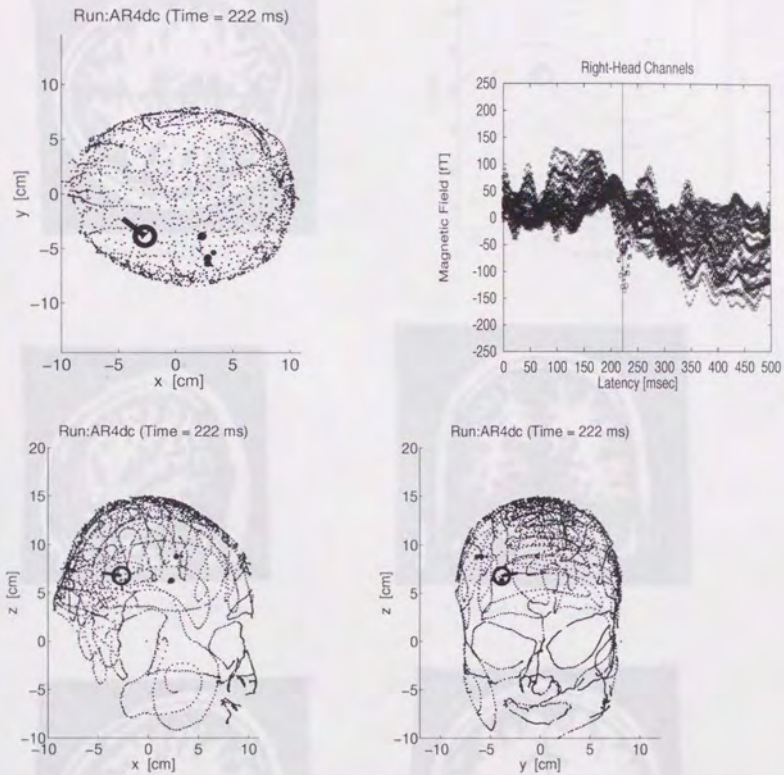
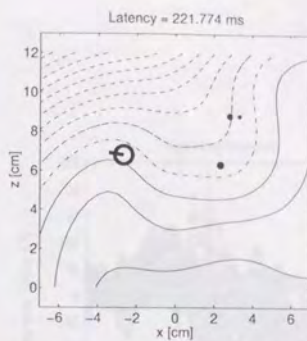


図 7.23: AR4 の $t=221.8\text{ms}$ における解双極子分布図と測定磁場の時間波形。モーメント強度は最大で 3.11nAm 。



Transversal ($z=8.79\text{cm}$)



Sagittal ($y=-5.86\text{cm}$)



Coronal ($x=-2.68\text{cm}$)



Sagittal ($y=-3.86\text{cm}$)



Coronal ($x=2.82\text{cm}$)

図 7.24: AR4 の $t=221.8\text{ms}$ における解双極子分布の等磁場線図重畳表示 (等磁場線間隔 20fT), および, 主要な解双極子の MRI 重畳表示.

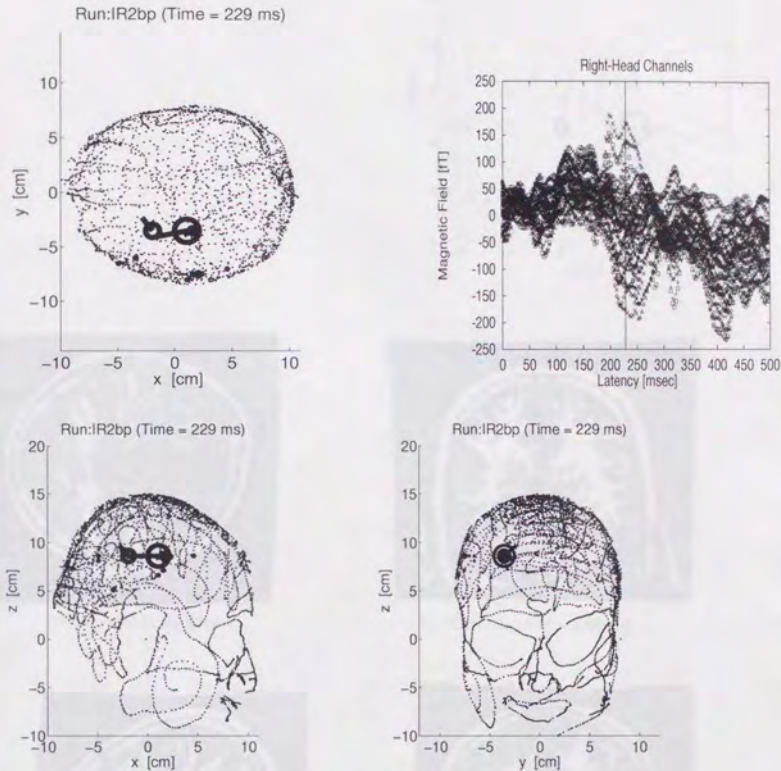
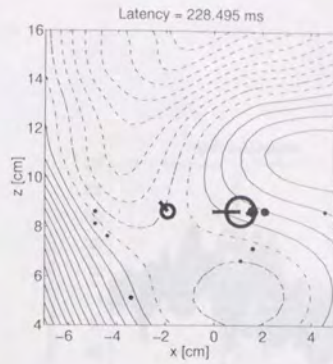


図 7.25: IR2 の $t=228.5\text{ms}$ における解双極子分布図と測定磁場の時間波形。モーメント強度は最大で 3.99nAm 。



Transversal ($z=8.62\text{cm}$)



Coronal ($x=-1.92\text{cm}$)



Sagittal ($y=-3.53\text{cm}$)



Coronal ($x=1.58\text{cm}$)

図 7.26: IR2 の $t=228.5\text{ms}$ における解双極子分布の等磁場線図重畳表示 (等磁場線間隔 20fT)、および、主要な解双極子の MRI 重畳表示。

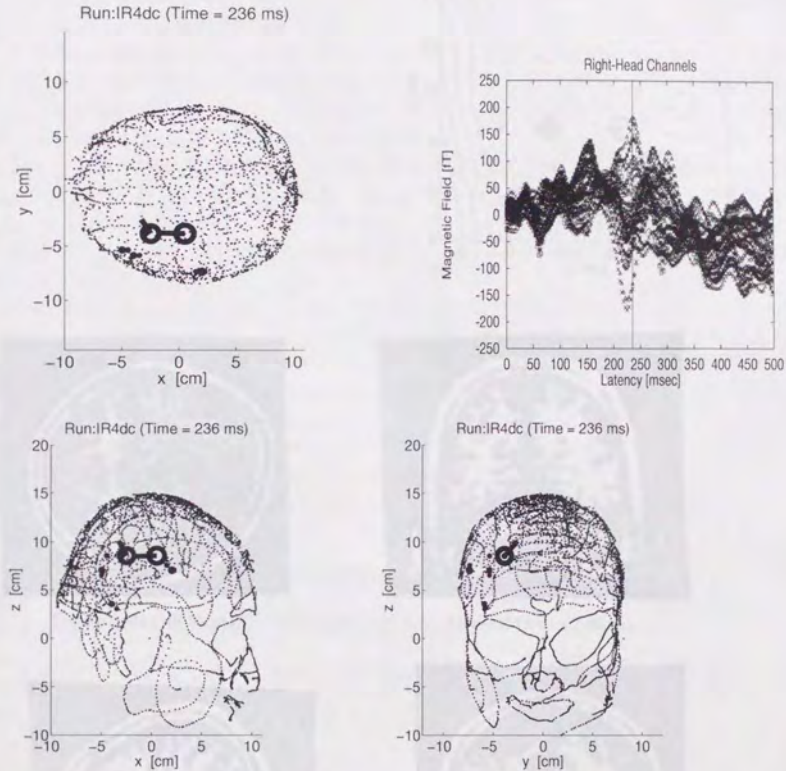
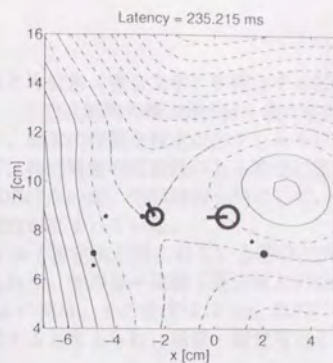


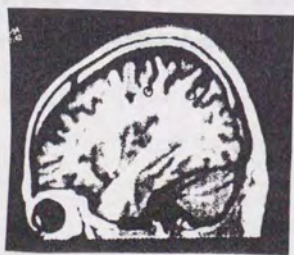
図 7.27: IR4 の $t=235.2\text{ms}$ における解双極子分布図と測定磁場の時間波形. モーメント強度は最大で 2.88nAm .



Transversal ($z=8.56\text{cm}$)



Coronal ($x=-2.46\text{cm}$)



Sagittal ($y=-3.86\text{cm}$)



Coronal ($x=0.54\text{cm}$)

図 7.28: IR4 の $t=235.2\text{ms}$ における解双極子分布の等磁場線図重畳表示 (等磁場線間隔 20fT)、および、主要な解双極子の MRI 重畳表示。

7.5 第7章のまとめ

視覚刺激として被験者に与えられた平仮名と片仮名(表音文字)を照合する短期記憶走査課題を用いた脳磁場計測実験のデータを、不等式制約の極表示SMN法で解析した。その結果、主要な解双極子は脳溝に分布した。脳溝の詳細な判定は必ずしも十分ではないが、少なくとも解剖学的先験情報を使わず、神経興奮の可能性のある部位に推定された。未知の脳機能活動に対して容易に結論は導けないが、先験情報を利用していないがゆえに、かえって脳溝に推定された解の信頼性が高まっている。

特に、左脳で信頼性と再現性のある単一双極子推定解が得られている潜時(270ms付近)では、SMN法でも再現性のある解が得られた。その単一双極子推定解との位置誤差は5mm以内であり、かつ、少なくとも20msの間は、その近傍ほぼ2cm以内に安定して推定された。解剖学的には上側頭溝に位置すると考えられ、視覚・聴覚双方との関連が示唆された。

その潜時(270ms付近)で単一双極子推定では測定磁場を十分フィッティングできない場合でも、選択的 최소ノルム解の主要な解双極子の一部が上側頭溝に位置する例が見られた。他の解双極子が実際の脳活動を反映しているのか、雑音などの擾乱を相殺するアーチファクトとして現れたのかは不明である。仮に前者だとしても、実験の主旨に含まれていないにもかかわらず刺激や課題の与え方が最良ではなかったために起きてしまった興奮ならば、広い意味での擾乱である。それらに大きく乱されず所望の領域の脳活動を単一双極子推定よりも確実に観察できる可能性を、上記の上側頭溝の例は示している。本章の解析では、左脳のシルビウス溝や右脳の島においても、同様の例が見られた。

以上まとめると、SMN法は

- 先験情報に頼らないので、推定結果を検証に利用できる。
- 複数信号源を推定するので、同時観察できる現象を増やせる。
- 広義の擾乱に強いので、実験条件や実験パラダイムへの制限を緩和できる。

の3つの面から脳磁図応用の幅を広げる可能性がある」と結論できる。

第8章： 結論

本論文は、できる限り先験情報に頼らず生体磁場逆問題を解いて複数信号源を推定することを目指し、理論と解析の両面から進めた研究をまとめたものである。第2章と第3章はそれぞれ本論文で提案する逆問題解法の位置付けとプロトタイプに関するもので、第4章は実際の環境への対応策に関するものであり、第5章、第6章、第7章はそれぞれ生体模型実験データ、心臓磁場、脳磁場の解析を内容としている。

第2章では、生体磁場逆問題とその各種解法をまとめ、本研究で提案する選択的最小ノルム (SMN) 法という解法が優決定領域 (信号源の自由度が不十分のため測定磁場が説明できない設定) と劣決定領域 (十分な自由度で測定磁場が説明できる設定) の境界を狙った立場にあることを示した。さらに、この基本姿勢が

- 信号源 (磁場源) 強度を表す電流双極子モーメントの線形和を評価量とする高速計算に適した実装

が可能とすることを述べた。

第3章では、SMN 法のプロトタイプについて、理論と計算機シミュレーションの両面から議論した。理論的側面では、未知ベクトルの L_1 ノルム (絶対値ノルム) を最小化する最適化問題として SMN 法を定式化すれば線形計画問題を解くシンプレックス・アルゴリズムが利用できるということとを述べるとともに、磁場源と磁場を関係づける係数行列の列ベクトルを正規化すれば各磁場源が平等に評価できることを示した。その証明における理想的な単一双極子であるという仮定からのずれがあっても局在した双極子分布 (単数の場合も複数の場合も含め、双極子の個数は未知) の推定に SMN 法が有効であることを、古典的な最小自乗ノルム法と比較した1次元モデルの計算機シミュレーションで確認した。すなわち、SMN 法を用いれば、適切なモーメント強度の解双極子が真の信号源に隣接した位置に推定された。こうして、少なくとも無雑音の1次元モデルでは、

- 双極子の個数に関する先験情報が不要なこと
- 推定された信号源分布 (電流双極子分布) の空間的局在性が強いこと
- 線形計画法による高速な最適化計算で解が求められること

が明らかとなった。

第4章では、実際の計測・解析環境への対応策を導入した。

まず第一に、解剖学的な先験情報に頼らず3次元モデルを扱う方策として、双極子モーメントの直交2成分を独立な変数として扱う方法 (直交表示 SMN 法) とモーメントの

極表示を使用する方法(極表示SMN法)を述べた。後者では線形計画法を直接利用することはできないが、代替アルゴリズムとして新たにパラメトリック・シンプレックス法を考案し、実装法と高速化技法を付録に詳述した。パラメトリック・シンプレックス法を使えば、評価関数値が局所座標系に依存しないために推定精度が向上する場合がある。その傾向が特に立方体モデルで顕著なことを、計算機シミュレーションで示した。

第二に、不等式制約の導入によって、SN比が10dB以下のデータにも対応できる雑音耐性を実現した。不等式制約を規定する際には雑音の標準偏差を見積もらねばならないが、その見積もり誤差を評価した結果、真の値の $\pm 60\%$ まで許されることが分かった。これは十分達成可能な値である。

以上2点により、第3章で主張した長所を損なわず、雑音のある3次元モデルへ適用できる形にSMN法が拡張された。

第5章は、信号源が既知である生体模型実験データの解析によるSMN法の検証・評価をまとめたものである。すなわち、「脳を模した球状ファントム実験データ」および「実験データに計算機上で人為的に雑音を加えてSN比を9.6dB以下に下げたデータ」を解析してメッシュ点間隔以下の位置推定誤差が実現できたことにより、実測データを3次元モデルで解析できることが検証された。さらに、第3章の理論では任意性が残されていた正規化パラメータを実験的に評価し、自乗ノルムによる正規化が適度な重み付けであることを示した。

第6章では、健常者の心臓磁場を解析した。その結果、P波、QRS波の発生源はそれぞれ心房興奮、心室興奮を反映した領域に推定され、定性的な生理学的知見に合致した。また、いずれの解析でも解剖学的先験知識を使わずメッシュ点を広範囲に配置したにもかかわらず、支配的な解双極子は心筋組織部分に推定された。すなわち「興奮する可能性のある位置」に主要な解双極子が自動的に収束し、SMN法の3次元モデルへの適用可能性を支持する結果となった。

第7章では、スクリーンに呈示された平仮名と片仮名(ともに表音文字)を照合する短期記憶走査課題を用いた脳磁場計測実験のデータを解析した。その結果、主要な解双極子は脳溝に位置した。脳溝の詳細な判定は不十分だが、少なくとも解剖学的先験情報を使わず、神経興奮の可能性のある部位に推定された。これにより、実際の3次元モデルにおけるSMN法の有効性があらためて示された。

特に、単一双極子推定でも信頼性の高い解が得られているため検証に利用できると判断された潜時(270ms付近)では、選択的最小ノルム解も再現性のあるものが得られた。その単一双極子推定解との位置誤差は5mm以内であり、かつ、少なくとも20msの間は、その近傍は2cm以内に安定して推定された。解剖学的には左脳で上側頭溝に位置すると考えられ、視覚・聴覚双方との関連が示唆された。その潜時(270ms付近)において単一双極子では測定磁場を十分フィッティングできない場合でも、選択的最小ノルム解の主要な解双極子の一部が上側頭溝に位置する例が見られた。他の解双極子が実際の脳活動を反映しているのか雑音源を相殺するアーチファクトなのかは不明だが、当該実

験パラダイムで着目した脳活動を単一双極子推定よりも確実に捕捉できる可能性が示された。すなわち、SMN 法による複数双極子推定は、複数の活動部位の同時観察だけでなく、広い意味での擾乱の緩和にも寄与し得ることが分かった。

以上により、提案した SMN 法が

- 計算時間が現実的であること
- 空間的局在性の強いスパースな解が得られること
- 構成要素の個数が未知の磁場源に対応できること
- 先験情報で限定しない3次元モデルに適用できること
- 雑音などの擾乱に耐えられること

という5つの要求に同時に応える有力な逆問題解法であることが示された。これら5点は、生体磁気計測の応用範囲の拡大につながるものである。実際、非侵襲検査で獲得する生理学的知見は、経験則としての性格が強い。その経験則を補強すべく、あるいはまた異なる仮説を比較検証すべく多数のデータを処理する上で、高速計算が有利なのは明らかである。また、社会的にも今後の著しい進展が期待されている脳機能研究においては、少数部位での局在した神経興奮を解析するニーズが高い。新しい現象を調べる以上、少数とはいえその個数は元来未知である。解析結果の再現性や安定性は、利用した先験情報が少ない方が説得力があろう。その上擾乱に強ければ、再現性と安定性に貢献するだけでなく、実験条件や実験パラダイムへの制限の緩和にも役立つ。

ただし、複数双極子推定を本格的に実用化するためには、本研究のような逆問題解法の研究だけでなく、推定結果の評価法も重要な研究課題となろう。例えば本論文でも、心臓磁場と脳磁場の解析においては定性的な議論が多かった。これは、生理学的知見の不足のみならず、解の棄却基準（本論文では、シミュレーションでの経験に基づき、モーメント強度の小さな解双極子や再構成領域端の解双極子は原則として棄却した）の曖昧さが一因となっている。この問題は、臨床関係者が逆問題解析ソフトウェアも含めた生体磁気計測システムを信頼して積極的に使用するための動機付けに影響する。今後、少なくとも短期的には、解析実績を増やして推定結果の信頼性を議論することが望まれる。

謝 辞

卒業論文時代から通算して5年半、自分勝手な幼児がそのまま学生になったかのような私を、岡部洋一教授は常に親身に指導して下さいました。ここに深く感謝の意を表したいと思います。「君の逆問題を解きたいという強い意志があればこそ開拓できた技術ですよ」という趣旨の御言葉は、とりわけ印象に残っております。「研究とは確たるスピリッツをもって自ら進んで取り組むものである」という心構えと「着眼大局、着手小局」という研究戦略を学んだ大学院生活であったと思います。

さて、学会活動等では、数多くの方々に御世話になりました。

特に、北海道大学電子科学研究所の栗城真也教授、NTT 基礎研究所の今田俊明グループリーダー、電子技術総合研究所の葛西直子氏、東京電機大学の内川義則助教授には、貴重な実験データの提供を含め、御礼すべき事柄が数え切れません。その実務面に惜しめない協力を賜りました関係諸氏にも、ここに合わせて御礼申し上げます。

東京大学医学部医用電子研究施設の上野照剛教授、ケンブリッジ大学の David F. Moore 博士、金沢工業大学の賀戸久教授、生命科学工業技術研究所の武田常広室長、大阪ガス(株) 開発研究所の田村逸朗氏、そして、(株) 東芝の高田洋一氏は、親切にもそれぞれ貴重な討論の場を設けて下さいました。医療サイドからは、特に脳に関して東北大学の中里信和先生、心臓に関して筑波大学の野田泰永先生から貴重な御意見を頂戴いたしました。また、研究室の大先輩でもある(株) 富士通研究所の藤巻則夫氏は、度重なる私の愚問を無視することなく、特に熱心に対応して下さいました。その他、研究会などで議論に参加して下さいた方々も含めまして、心から感謝いたします。

定期的な学術交流の場として、日本学術振興会第 146 委員会高性能 SQUID システム分科会に言及しないわけにはまいりません。そこで受けた刺激が、本研究の土台を支えたと言っても過言ではないでしょう。東京大学名誉教授の原宏先生はじめ関係の諸先生方に、心より御礼申し上げます。

国際舞台におきましても、ニューヨーク大学の Samuel J. Williamson 教授、ウルム大学の Sergio N. Erne 教授、南カリフォルニア大学の Richard M. Leahy 教授、ヘルシンキ工科大学の R. Hari 教授、Matti S. Hämmäläinen 博士ら多数の先生方が、真剣に議論を交わして下さいました。ありがとうございました。

本研究の進展は生体磁気学関係者の交流によるところが大であったことを、ここに明記しておきたいと思います。

神奈川大学(当時)の堀井信男氏、東京大学(当時)の清水信朗氏、そして、東京大学の山並憲司氏および赤羽秀氏とは、それぞれ1年間共に逆問題研究に取り組みました。将来振り返った時、お互いに有意義に過ごせたと思えることを願ってやみません。

研究室生活におきましては、廣瀬明助教授、北川学助手、柴田克成助手、宮尾光生技官に大変御世話になりました。堀井氏との共同研究では、神奈川大学の中山明芳助教授に暖かく指導していただきました。深く感謝いたします。本研究の大半は計算機を使用した内容ですが、その快適な環境は五月女悦久氏をはじめとする研究室の同僚諸氏の協力の賜物です。協力のみならず助言や励ましの言葉をも惜しまれなかった皆様には、感謝の気持ちで一杯です。さらに、東京電機大学の田宮壽美子氏には個人的に非常に御世話になりました。本当にありがとうございました。

ところで、学生生活には、様々な要素があります。いささか私事に過ぎるきらいはありますが、学生時代一貫して陸上競技に携わり続けたことが、冒頭に述べたスピリッツの一助となったことは間違いありません。東京大学運動会陸上運動部の皆様、他チームのライバル達、そして、心身共にケアして下さった水野スポーツマッサージ療院の皆様、どうもありがとうございました。また、そのような言わば2つの顔をもつ学生の慌ただしい日常生活の面倒を見て下さった舟橋美香子館長はじめ舟橋聖一記念館附属文篤館の皆様、大変感謝しております。

最後になりましたが、長い学生生活への援助と何よりも深く大きな理解と愛情に対し、両親、姉、弟への謝意を記したいと思います。感謝感激としか言いようがありません。

本研究の成果が皆々様の御期待に添うものかどうか甚だ疑問ではありますが、ここに重ねて厚く謝意を表して、謝辞といたします。

参考文献

- [1] 小谷誠, 内川義則, 古川浩, 千代谷慶三, 齊藤健一, “磁性測定による肺内沈着粉じん量および分布の検出: 第1報 肺磁図測定法”, 日本災害医学会誌, Vol. 29, No. 10, pp. 792-798, 1981.
- [2] D. Cohen and I. Nemoto. “Ferrimagnetic particles in the lung, part I: Magnetization process”. *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, Vol. BME-31, No. 3, pp. 261-273, 1984.
- [3] D. Cohen and I. Nemoto. “Ferrimagnetic particles in the lung, part II: Relaxation process”. *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, Vol. BME-31, No. 3, pp. 274-285, 1984.
- [4] 原 宏(編著). 量子電磁気計測. 電子情報通信学会, 1991.
- [5] G. Baule and R. McFee. “Detection of the magnetic field of the heart”. *Am. Heart J.*, Vol. 66, No. 1, pp. 95-97, 1963.
- [6] J. C. Jaklevic, J. Lambe, A. H. Silver, and J. E. Mercereau. “Quantum interference effects in Josephson tunneling”. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 12, No. 7, pp. 159-160, 1964.
- [7] 鈴木晃治朗. “Nb/AlO_x/Nb 接合を用いた高感度 SQUID の設計及び作成に関する研究”. 東京大学学位請求論文, 1994.
- [8] D. Cohen, E. A. Edelsack, and J. E. Zimmerman. “Magnetocardiograms taken inside a shielded room with a superconducting point-contact magnetometer”. *J. Appl. Phys.*, Vol. 16, No. 7, pp. 278-280, 1970.
- [9] 山本善之(発行). “SQUID と生体磁気計測”. 総研ニュース 24, 東京電機大学総合研究所, 1991.
- [10] D. Cohen and H. Hosaka. “Magnetic field produced by a current dipole”. *J. Electrocardiology*, Vol. 9, pp. 409-417, 1976.
- [11] S. J. Williamson and L. Kaufman. “Biomagnetism”. *J. Magnetism and Magnetic Mater.*, Vol. 22, pp. 129-201, 1981.
- [12] H. Weinberg, G. Stroink, and T. Katila, eds. “Biomagnetism: Application & theory”. Pergamon Press, 1985.
- [13] B. N. Cuffin and D. Cohen. “Magnetic fields of a dipole in special volume conductor shapes”. *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, Vol. BME-24, No. 4, pp. 372-381, 1977.

- [14] 日本数学会(編). 岩波数学辞典第2版. 岩波書店, 1968.
- [15] 風見邦夫, 高田洋一, 上田雅之, 上原 弦, 松田直樹, 尾形久直, 樋口正法, 春田康博, 賀戸 久. "256 チャンネル SQUID 磁束計の試作". 日本生体磁気学会誌, Vol. 7, No. 1, pp. 88-91, 1994.
- [16] B. N. Cuffin. "Effects of head shape on EEG's and MEG's". *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, Vol. 37, No. 1, pp. 44-52, 1990.
- [17] B. N. Cuffin. "A comparison of moving dipole inverse solutions using EEG's and MEG's". *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, Vol. BME-32, No. 11, pp. 905-910, 1985.
- [18] B. N. Cuffin. "Effects of measurement errors and noise on MEG moving dipole inverse solutions". *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, Vol. BME-33, No. 9, pp. 854-861, 1986.
- [19] 遅澤 悟, 小林 護, 石山敦士, 葛西直子. "脳磁界計測における体積電流の影響 — 半球ファントムモデルによる実験と解析 —". 電学論 C, Vol. 116-C, No. 2, pp. 210-216, 1996.
- [20] S. Supek and C. J. Aine. "Simulation studies of multiple dipole neuromagnetic source localization: model order and limits of source resolution". *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, Vol. 40, No. 6, pp. 529-540, 1993.
- [21] O. Oshiro, M. Mukai, F. Takeuchi, and S. Kuriki. "Multiple dipole estimation by parameter search method". In M. Hoke, S. N. Ern , Y. C. Okada, and G. L. Romani, eds., *Biomagnetism: Clinical Aspects*, pp. 693-697, Elsevier, Amsterdam, 1992.
- [22] O. Oshiro, M. Mukai, F. Takeuchi, and S. Kuriki. "Analysis of errors in neuromagnetic localization of multiple current dipole sources". *Phys. Med. Biol.*, Vol. 37, No. 4, pp. 845-852, 1992.
- [23] B. Jeffs, R. Leahy, and M. Singh. "An evaluation of methods for neuromagnetic image reconstruction". *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, Vol. BME-34, No. 9, pp. 713-723, 1987.
- [24] 児玉慎三, 須田信英. システム制御のためのマトリクス理論. 計測自動制御学会, 1978.
- [25] T. S. Huang and P. M. Narendra. "Image restoration by singular value decomposition". *Appl. Opt.*, Vol. 14, No. 9, pp. 2213-2216, 1975.
- [26] H. Andrews and C. Patterson. "Outer product expansions and their uses in digital image processing". *IEEE Trans. Comput.*, Vol. C-25, No. 2, pp. 140-148, 1976.
- [27] Y. S. Shim and Z. H. Cho. "SVD pseudoinversion image reconstruction". *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, Vol. ASSP-29, No. 4, pp. 904-909, 1981.

- [28] S. Kirkpatrick, Jr. C. D. Gelatt, and M. P. Vecchi. "Optimization by simulated annealing". *Sci.*, Vol. 220, pp. 671-680, 1983.
- [29] K. Sekihara, H. Haneishi, and N. Ohyama. "Details of simulated annealing algorithm to estimate parameters of multiple current dipoles using biomagnetic data". *IEEE Trans. Med. Imag.*, Vol. 11, No. 2, pp. 293-299, 1992.
- [30] H. Kado, S. Kashiwaya, M. Higuchi, and H. Miura. "Direct approach to an inverse problem: a trial to describe signal source by current elements distribution". In S. J. Williamson, M. Hoke, G. Stroink, and M. Kotani, eds., *Advance in Biomagnetism*, pp. 579-582. Plenum Press, New York, 1989.
- [31] 樋口正法, 賀戸 久, 石橋幸男. "磁場源解析: 電流素片分布による磁場源描画の試み". *信学論 A*, Vol. J74-A, No. 3, pp. 499-507, 1991.
- [32] M. Shimogawara, H. Kado, H. Kohno, and M. Higuchi. "Magnetic source imaging by current element distribution". In M. Hoke, S. N. Ern , Y. C. Okada, and G. L. Romani, eds., *Biomagnetism: Clinical Aspects*, pp. 757-760, Elsevier, Amsterdam, 1992.
- [33] D. W. Marquardt. "An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters". *J. SIAM*, Vol. 11, pp. 431-441, 1963.
- [34] J. Nelder and R. Mead. "A simplex method for function minimization". *Comput. J.*, Vol. 4, pp. 308-313, 1965.
- [35] J. C. Mosher, P. S. Lewis, and R. M. Leahy. "Multiple dipole modeling and localization from spatio-temporal MEG data". *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, Vol. BME-39, No. 6, pp. 541-557, 1992.
- [36] R. O. Schmidt. "Multiple emitter location and signal parameter estimation". *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, Vol. AP-34, No. 3, pp. 276-280, 1986.
- [37] P. Stoica and A. Nehorai. "MUSIC, Maximum Likelihood, and Cramer-Rao Bound". *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, Vol. 37, No. 5, pp. 720-741, 1989.
- [38] J. A. Cadzow. "Multiple source location — the signal subspace approach". *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, Vol. 38, No. 7, pp. 1110-1125, 1990.
- [39] P. Stoica and K. C. Sharman. "Maximum likelihood methods for direction-of-arrival estimation". *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, Vol. 38, No. 7, pp. 1132-1143, 1990.
- [40] 葛西直子, 栗野直行, 上田智章. "生体磁場計測による機能部位の可視化". 日本 ME 学会専門別研究会 "生体情報の可視化技術研究会" 資料, Vol. 1, No. 1, pp. 2-9, 1993.

- [41] 葛西直子, 栗野直行, 上田智章. “MCG による心機能部位の推定”. 日本生体磁気学会誌, Vol. 7, No. 1, pp. 24-27, 1994.
- [42] W. E. Smith. “Estimation of the spatio-temporal correlations of biological electrical sources from their magnetic fields”. *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, Vol. BME-39, No. 10, pp. 997-1004, 1992.
- [43] K. Sekihara and B. Scholz. “Average-intensity reconstruction and Wiener reconstruction of bioelectric current distribution based on its estimated covariance matrix”. *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, Vol. 42, No. 2, pp. 149-157, 1995.
- [44] 関原謙介, Bernhard Scholz. “ウィーナー推定法の生体磁場逆問題への応用”. 日本生体磁気学会誌, Vol. 8, No. 1, pp. 34-35, 1995.
- [45] Y. Saito, E. Itagaki, and S. Hayano. “A formulation of the inverse problems in magnetostatic fields and its application to a source searching of the human eye fields”. *J. Appl. Phys.*, Vol. 67, pp. 5830-5832, 1990.
- [46] 早乙女英夫, 橘田和泰, 早野誠治, 斎藤兆古. “生体磁界における逆問題”. 電学論 A, Vol. 112, No. 4, pp. 279-286, 1992.
- [47] 早乙女英夫, 橘田和泰, 早野誠治, 斎藤兆古. “Sampled Pattern Matching 法による生体内電流分布推定”. 電学論 C, Vol. 113, No. 1, pp. 69-76, 1993.
- [48] 早乙女英夫, 早野誠治, 斎藤兆古. “静磁界系逆問題における一解法とその高速化”. 電学論 A, Vol. 114, No. 7/8, pp. 514-520, 1994.
- [49] 岩橋正國, 上野照剛. “生体磁気計測における逆問題の問題点”. 日本生体磁気学会誌, Vol. 6, No. 1, pp. 112-113, 1993.
- [50] 安藤繁. “超解像における逆問題とその解法”. 数理科学, No. 274, pp. 56-61, 1986.
- [51] 日本機械学会 (編). 逆問題のコンピュータアナリシス. コロナ社, 1991.
- [52] M. S. Hämmäläinen and R. J. Ilmoniemi. “Interpreting magnetic fields of the brain: minimum norm estimates”. *Med. & Biol. Eng. & Comput.*, Vol. 32, pp. 35-42, 1994.
- [53] J. Wang, S. J. Williamson, and L. Kaufman. “Magnetic source images determined by a lead-field analysis: the unique minimum-norm least-squares estimation”. *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, Vol. 39, No. 7, pp. 665-675, 1992.
- [54] J.-Z. Wang. “MNLS inverse discriminates between neuronal activity on opposite walls of a simulated sulcus of the brain”. *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, Vol. 41, No. 5, pp. 470-479, 1994.

- [55] B. R. Frieden. "Restoring with maximum likelihood and maximum entropy". *J. Opt. Soc. Amer.*, Vol. 62, No. 4, pp. 511-518, 1972.
- [56] 久保司郎. "工学における逆問題的アプローチ — 大規模演算の象徴としての計算機を用いた評価・同定・診断 —". 電気学会 A 部門総合研究会資料, pp. 13-22, 1994.
- [57] K. Sekihara, B. Scholz, H. Bruder, and R. Graumann. "Reconstructing current distributions from biomagnetic measurements under large external noise disturbances". *IEEE Trans. Med. Imag.*, Vol. 13, No. 1, pp. 144-151, 1994.
- [58] 梶原茂樹, 富田 定, 近藤泰志, 吉田佳一, 上田雅之. "格子点移動最小自乗最小ノルム法による電流分布推定". 日本生体磁気学会誌, Vol. 7, No. 1, pp. 150-153, 1994.
- [59] 梶原茂樹, 富田 司, 富田 定, 近藤泰志, 荒川 彰, 吉田佳一, 上田雅之. "格子点移動法による磁場源推定". 日本生体磁気学会誌, Vol. 8, No. 1, pp. 32-33, 1995.
- [60] H. Haneishi, N. Ohyama, K. Sekihara, and T. Honda. "Multiple current dipole estimation using simulated annealing". *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, Vol. 41, No. 11, pp. 1004-1009, 1994.
- [61] 英保 茂. システム制御情報ライブラリー 5 医用画像処理. 朝倉書店, 1992.
- [62] W. J. Dallas. "Fourier space solution to the magnetostatic imaging problem". *Appl. Opt.*, Vol. 24, No. 24, pp. 4543-4546, 1985.
- [63] W. Kullmann and W. J. Dallas. "Fourier imaging of electrical currents in the human brain from their magnetic fields". *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, Vol. BME-34, No. 11, pp. 837-842, 1987.
- [64] R. E. Alvarez. "Biomagnetic Fourier imaging". *IEEE Trans. Med. Imag.*, Vol. 9, No. 3, pp. 299-304, 1990.
- [65] B. J. Roth, N. G. Sepulveda, and J. P. Wikswo Jr. "Using a magnetometer to image a two-dimensional current distribution". *J. Appl. Phys.*, Vol. 65, No. 1, pp. 361-372, 1989.
- [66] W. J. Dallas, H. A. Schlitt, S. A. Cameron, and W. H. Kullmann. "Fourier methods in biomagnetic imaging". In M. Hoke, S. N. Erne, Y. C. Okada, and G. L. Romani, eds., *Biomagnetism: Clinical Aspects*, pp. 181-184. Elsevier, Amsterdam, 1992.
- [67] K. Iramina, K. Ueno, and S. Ueno. "Spatio-temporal MEG patterns produced by spreading multiple dipoles". *IEEE Trans. Magnetics*, Vol. 31, No. 6, pp. 4265-4267, 1995.
- [68] R. M. Leahy and B. D. Jeffs. "On the design of maximally sparse beamforming arrays". *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, Vol. 39, No. 8, pp. 1178-1187, 1991.

- [69] バセク・フバートル (著), 阪田省二郎・藤野和建 (訳). 線形計画法 (上), (下). 啓学出版, 1986.
- [70] J. C. Mosher, M. E. Spencer, R. M. Leahy, and P. S. Lewis. "Error bounds for EEG and MEG dipole source localization". *Electroencephalography and clinical Neurophysiology*, Vol. 86, pp. 303-321, 1993.
- [71] H. A. Schlitt, S.-R. Zhao, H. Halling, and H.-W. Müller-Gärtner. "Strategy for objective comparisons of inverse solutions". In *10th Int. Conf. on Biomagnetism*, Santa Fe, 1996.
- [72] 小谷 誠, 内川義則, 中屋 豊, 森 博愛, 栗城真也 (共著). 生体磁気計測. コロナ社, 1995.
- [73] J. Nenonen, C. J. Purcell, B. M. Horacek, G. Stroink, and T. Katila. "Magnetocardiographic functional localization using a current dipole in a realistic torso". *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, Vol. 38, No. 7, pp. 658-664, 1991.
- [74] C. J. Purcell and G. Stroink. "Moving dipole inverse solutions using realistic torso models". *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, Vol. 38, No. 1, pp. 82-84, 1991.
- [75] J. T. Nenonen, M. S. Hämäläinen, and R. J. Ilmoniemi. "Minimum-norm estimation in a boundary-element torso model". *Med. & Biol. Eng. & Comput.*, Vol. 32, pp. 43-48, 1994.
- [76] Mervin J. Goldman (著), 吉利 和・宮下英夫 (訳). 図解心電図学 — 心電図読み方のコツ —. 金芳堂, 1987.
- [77] D. Durrer, R. T. van Dam, G. E. Freud, M. J. Janse, F. L. Meijler, and R. C. Arzbaecher. "Total excitation of the human heart". *Circulation*, Vol. 41, pp. 899-912, 1970.
- [78] S. Sternberg. "High-speed scanning in human memory". *Science*, Vol. 153, pp. 652-654, 1966.
- [79] S. Kuriki, Y. Hirata, N. Fujimaki, N. Tsuchiya, and T. Kobayashi. "Neuromagnetic study of human cortical areas related to visual/auditory information processing". *Human Brain Mapping*, Suppl. 1, p. 237, 1995.
- [80] S. Kuriki, et al. "Magnetoencephalographic study on the cerebral neural activities related to the processing of visually presented characters". *Cognitive Brain Research*, Vol. 4, pp. 185-199, 1996.
- [81] 高倉公明, 大久保昭行 (編集). MEG — 脳磁図の基礎と臨床. 朝倉書店, 1994.

- [82] 渡辺裕貴, “てんかん患者の脳磁図”, 日本学術振興会第146委員会高性能SQUIDシステム分科会第28回研究会, 東京, March 1996.
- [83] 平山恵造, 河村満, MRI 脳部位診断, 医学書院, 1993.
- [84] V. Chvátal, *Linear Programming*, W. H. Freeman and Comp., New York, 1983.
- [85] H. M. ワグナー (著), 森村英典・伊理正夫 (監訳), 高橋幸雄・森 雅夫・山田 堯 (訳), オペレーションズ・リサーチ入門 5=確率的計画法, 培風館, 1978.

付録 A : 線形計画法

極表示を用いない SMN 法では、線形計画法 (LP: Linear Programming) を用いて最適解を求める。線形計画法それ自体は完成された体系であり、教科書も数多く出版されている¹。ただし、一般論に終始している感は否めず、個々のアプリケーションの実用化段階での効率的なプログラムは当事者が独自に開発する必要がある。SMN 法も例外ではない。

そこで、本章では、LP の基本であるシンプレックス法 (simplex method) を例題で解説するとともに、SMN 法への適用法を述べる。さらに、実際のプログラミングにおける高速化技法を記し、モンテカルロ・シミュレーションによる評価を行う。

また、不等式制約に関して、「解の局在性が損なわれない」という定理を証明するとともに、確率制約としての解釈を示す。

A.1 シンプレックス法

$$\left[\begin{array}{l} f = \sum_{j=1}^N c_j q_j \rightarrow \min. \\ \text{subject to } \left\{ \begin{array}{l} Aq = b \\ \forall q_j \geq 0 \end{array} \right. \end{array} \right] \quad (\text{A.1})$$

という形式の問題を標準形 (standard form) の線形計画問題という。これを 2 段階シンプレックス法 (two-phase simplex method) で解くアルゴリズムを、次の例題を用いて説明する。

問題 A-1 (標準形の例題)

$$\begin{aligned} f &= q_1 + q_2 + q_3 \rightarrow \min. \\ \text{subject to } \left\{ \begin{array}{l} q_1 + 2q_2 - 3q_3 = 6 \\ 2q_1 - q_2 + 3q_3 = 2 \\ q_1, q_2, q_3 \geq 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

A.1.1 第 1 段階

問題 A-1 において、等式制約も符号制約も満たす (q_1, q_2, q_3) を可能解 (feasible solution) という。また、等式制約と同数個 (問題 A-1 では 2 個) の変数を選んでその他の変数の値を 0 とした状態の可能解を、可能基底解 (basic feasible solution) という。標準形の線

¹中でも、[69] (原著:[84]) には、基礎理論から直感的解釈まで丁寧に解説されている。

形計画問題において最適解が存在するならば、それは可能基底解であることが知られている。

シンプレックス法をスタートする際には、次のような補助問題 (auxiliary problem) を解いて、初期可能基底解 (initial basic feasible solution) を得る。

問題 A-2 (補助問題)

$$\begin{aligned} g &= p_1 + p_2 \rightarrow \min, \\ \text{subject to } \begin{cases} q_1 + 2q_2 - 3q_3 + p_1 &= 6 \\ 2q_1 - q_2 + 3q_3 + p_2 &= 2 \\ q_1, q_2, q_3, p_1, p_2 &\geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

ここで導入した p_1, p_2 を、人為変数 (artificial variable) と呼ぶ。

補助問題 A-2 は、人為変数のみに非零値を許した自明な可能基底解

$$(q_1, q_2, q_3, p_1, p_2) = (0, 0, 0, 6, 2) \quad (\text{A.2})$$

を持つ。この時、評価関数値は $g = 6 + 2 = 8$ である。明示的に書き下すと、

$$\begin{cases} g &= 8 - 3q_1 - q_2 \\ p_1 &= 6 - q_1 - 2q_2 + 3q_3 \\ p_2 &= 2 - 2q_1 + q_2 - 3q_3 \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

ようになる。このように書き下したものを、可能字引 (feasible dictionary) と呼ぶ。また、字引の左辺に現れる変数 (選ばれている変数) を基底変数 (basic variable) と呼び、そうでない変数を非基底変数 (nonbasic variable) と呼ぶ。そして、基底変数の組を、基底 (basis) と呼ぶ。すなわち可能字引とは、基底変数と評価関数を、非基底変数の線形結合で表現したものである。

評価関数が現在の可能字引で表現されている値から改善され得るかどうかは、可能字引の第1式 (評価関数) の右辺における各非基底変数の係数の符号で判断できる。この時、添字²の若い順に符号を調べる。可能字引 (A.3) の第1式では q_1 の係数が負なので、 q_1 の値を正の方へ動かせば評価関数値を下げるができる。そこで、 q_1 を基底に入れ、 p_1, p_2 のいずれかを基底から追い出して可能字引を更新することを考える。

追い出す基底変数は、符号制約で決定される。すなわち、 $q_2 = q_3 = 0$ のまま q_1 をどこまで大きくできるかは、 $p_1 \geq 0$ から得られる限界 ($q_1 \leq 6$) と $p_2 \geq 0$ から得られる限界 ($q_1 \leq 1$) のうちの厳しい方で決まる³。したがって、ここでは p_2 が追い出される。なお、もしもこれらの限界が同じならば、添字の若い基底変数を追い出す⁴。

²とにかく、変数に優先順位がついてあげばよい。ここでは、 q_1, q_2, q_3, p_1, p_2 の順とする。

³限界がない場合、それは評価関数の最適値が有限の値でないこと、つまり問題が有界でないことを意味する。

⁴このように、基底に入る変数 (entering variable) も基底から出る変数 (leaving variable) も添字順に探す規則を、最小添字規則 (smallest-subscript rule) という。最小添字規則を用いれば、循環 (cycling: 可能字引の無限系列を繰り返す、永久に最適解に到達しない現象) が起こらないことが保証される。

新しい可能字引は、次のようになる。

$$\begin{cases} g = 5 - \frac{5}{2}q_2 + \frac{9}{2}q_3 + \frac{3}{2}p_2 \\ p_1 = 5 - \frac{5}{2}q_2 + \frac{9}{2}q_3 + \frac{1}{2}p_2 \\ q_1 = 1 + \frac{1}{2}q_2 - \frac{3}{2}q_3 - \frac{1}{2}p_2 \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

評価関数値は $g=5$ になり、確かに前の可能字引 (A.3) の $g=8$ から改善されている。

以後、同様の作業を繰り返す。次に入る変数は q_2 で、出る変数は p_1 である。可能字引は、

$$\begin{cases} g = 0 & + p_1 + p_2 \\ q_2 = 2 + \frac{9}{5}q_3 - \frac{2}{5}p_1 + \frac{1}{5}p_2 \\ q_1 = 2 - \frac{3}{5}q_3 - \frac{1}{5}p_1 - \frac{2}{5}p_2 \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

となる。この可能字引 (A.5) の第 1 式から、これ以上評価関数が改善されないことがわかる。実際、 $p_1, p_2 \geq 0$ より

$$g = p_1 + p_2 \geq 0 \quad (\text{A.6})$$

であり、

$$(q_1, q_2, q_3, p_1, p_2) = (2, 2, 0, 0, 0) \quad (\text{A.7})$$

の時に式 (A.6) の等号が成立するので、可能字引 (A.5) が表現している解 (A.7) は、補助問題 A-2 の最適解である。

そして、この補助問題の最適解 (A.7) から、直ちに原問題 A-1 の初期可能基底解

$$(q_1, q_2, q_3) = (2, 2, 0) \quad (\text{A.8})$$

が得られる ($\{q_1, q_2\}$ が初期基底)。

このように、補助問題の最適解の基底が原問題にある変数のみから成り、評価関数の最適値が 0 である場合には、原問題の初期可能基底解が得られる。そうでない場合は、原問題が不能で可能解が存在しないことを意味する。

このように初期可能基底解を求める段階を、第 1 段階という。

A.1.2 第 2 段階

第 1 段階で得られた初期基底を用いて問題 A-1 の可能字引を書き下すと、次のようになる。

$$\begin{cases} f = 4 + \frac{11}{5}q_3 \\ q_2 = 2 + \frac{9}{5}q_3 \\ q_1 = 2 - \frac{3}{5}q_3 \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

以後、補助問題の時と同様のステップで最適解を求める。このステップを、第 2 段階という⁵。

⁵第 2 段階も第 1 段階と同じ手法 (シンプレックス法) で可能字引を書き換えて最適解を探索するので、全体として 2 段階シンプレックス法と呼ばれている。

ここでは、可能字引 (A.9) がすでに最適解を表している (\because 評価関数を表現した第 1 式の右辺の非基底変数 q_3 の係数が正)。したがって、原問題 A-1 の最適解は、

$$(q_1, q_2, q_3) = (2, 2, 0) \quad (\text{A.10})$$

であり、評価関数の最適値 (最小値) は $f = 4$ である。

A.2 等式制約の SMN 法

SMN 法で解くのは L_1 ノルム最小化問題である。ここでは、A.1 節と同じ係数行列の例題

問題 A-3 (SMN の例題)

$$f = |q_1| + |q_2| + |q_3| \rightarrow \min.$$

$$\text{subject to } \begin{cases} q_1 + 2q_2 - 3q_3 = 6 \\ 2q_1 - q_2 + 3q_3 = 2 \end{cases}$$

を考える。この問題は、

$$q_j = q_{j+} - q_{j-} \quad (j = 1, 2, 3) \quad (\text{A.11})$$

$$\forall q_{j+}, \forall q_{j-} \geq 0 \quad (\text{A.12})$$

のように各変数を分解することによって、標準形の線形計画問題に書き換えることができる。

問題 A-4 (問題 A-3 の標準形表現)

$$f = q_{1+} + q_{1-} + q_{2+} + q_{2-} + q_{3+} + q_{3-} \rightarrow \min.$$

$$\text{subject to } \begin{cases} q_{1+} - q_{1-} + 2q_{2+} - 2q_{2-} - 3q_{3+} + 3q_{3-} = 6 \\ 2q_{1+} - 2q_{1-} - q_{2+} + q_{2-} + 3q_{3+} - 3q_{3-} = 2 \\ \forall q_{j+}, \forall q_{j-} \geq 0 \end{cases}$$

A.2.1 第 1 段階

問題 A-4 は、A.1 節で述べた手法で解くことができる。しかし、SMN 法では、A.1.1 節のように補助問題を導入せず、以下のように簡便な手法で初期可能解を求めることができる。

まず、 q_1, q_2, q_3 からランダムに基底変数を選ぶ。例えば、 q_1 と q_2 を選ぶと、等式制約を連立させた方程式の解は $(q_1, q_2) = (2, 2)$ となる。したがって、 $\{q_{1+}, q_{2+}\}$ を初期基底とした

$$(q_{1+}, q_{1-}, q_{2+}, q_{2-}, q_{3+}, q_{3-}) = (2, 0, 2, 0, 0, 0) \quad (\text{A.13})$$

という初期可能基底解が得られる。この時、可能字引は

$$\begin{cases} f &= 4 + 2q_{1-} + 2q_{2-} + \frac{11}{5}q_{3+} - \frac{1}{5}q_{3-} \\ q_{1+} &= 2 + q_{1-} - \frac{3}{5}q_{3+} + \frac{3}{5}q_{3-} \\ q_{2+} &= 2 + q_{2-} + \frac{9}{5}q_{3+} - \frac{9}{5}q_{3-} \end{cases} \quad (\text{A.14})$$

と書ける。

A.2.2 第2段階

A.1.2節と同様のアルゴリズムで可能字引を書き換えていく。入る変数は q_{3-} 、出る変数は q_{2+} に決まり、新しい可能字引は

$$\begin{cases} f &= \frac{34}{9} + 2q_{1-} + \frac{1}{9}q_{2+} + \frac{17}{9}q_{2-} + 2q_{3+} \\ q_{1+} &= \frac{8}{3} + q_{1-} - \frac{1}{3}q_{2+} + \frac{1}{3}q_{2-} \\ q_{3-} &= \frac{10}{9} - \frac{5}{9}q_{2+} + \frac{5}{9}q_{2-} + q_{3+} \end{cases} \quad (\text{A.15})$$

となる。ここでは、この可能字引 (A.15) がすでに最適解を表している (\because 評価関数を表現した第1式の右辺の非基底変数の係数がすべて正)。すなわち、

$$(q_{1+}, q_{1-}, q_{2+}, q_{2-}, q_{3+}, q_{3-}) = \left(\frac{8}{3}, 0, 0, 0, 0, \frac{10}{9}\right) \quad (\text{A.16})$$

が問題 A-4 の最適解で、

$$(q_1, q_2, q_3) = \left(\frac{8}{3}, 0, -\frac{10}{9}\right) \quad (\text{A.17})$$

が問題 A-3 の最適解である。評価関数の最適値は $f = \frac{34}{9}$ である。

A.2.3 プログラミング

本研究で扱うサイズの問題では、初期の反復では最小添字規則を用いたシンプレックス法よりもランダム探索の方が評価関数の改善が速い。そこで、等式制約の個数すなわち磁場測定点の個数程度の回数だけランダム探索⁶を行って、その結果選ばれた変数に A.2.1 節の手法を適用して、初期可能基底解を求めることにした。

また、最小添字規則を用いる第2段階では、各ステップの可能字引に現れる係数をすべて計算する必要はない (例えば、入る変数が見つかった時点で、それ以降の非基底変数の係数を調べる必要はなくなる)。さらに、変数の分解 (A.11) は、可能字引に冗長さ

⁶ 「入る変数と出る変数をランダムに選び、評価関数が改善されるならばそれらを入れ換える」という作業を繰り返す。この段階では、式 (A.11) のような分解は必要ない。

をもたらす。すなわち、可能字引

$$\begin{cases} f = f^{\text{now}} + \sum_{q_j \in \text{nonbasis}} \hat{c}_j q_{j+} + \sum_{q_j \in \text{nonbasis}} \hat{c}_j - q_{j-} \\ q_{k+} = q_{k+}^{\text{now}} + \sum_{q_j \in \text{nonbasis}} \hat{a}_{k+j+} q_{j+} + \sum_{q_j \in \text{nonbasis}} \hat{a}_{k+j-} q_{j-} \\ q_{k-} = q_{k-}^{\text{now}} + \sum_{q_j \in \text{nonbasis}} \hat{a}_{k-j+} q_{j+} + \sum_{q_j \in \text{nonbasis}} \hat{a}_{k-j-} q_{j-} \end{cases} \quad \begin{matrix} (q_{k+} \in \text{basis}) \\ (q_{k-} \in \text{basis}) \end{matrix} \quad (\text{A.18})$$

において、

$$\begin{cases} \hat{c}_{j+} + \hat{c}_{j-} = 2 & (q_{j+}, q_{j-} \in \text{nonbasis}) \\ \hat{c}_{j+} = 2 & (q_{j-} \in \text{basis}) \\ \hat{c}_{j-} = 2 & (q_{j+} \in \text{basis}) \end{cases} \quad (\text{A.19})$$

$$\hat{a}_{k+j+} = \begin{cases} -\hat{a}_{k+j-} & (q_{j-} \in \text{nonbasis}) \\ 0 & (q_{j-} \in \text{basis}) \end{cases} \quad (\text{A.20})$$

$$\hat{a}_{k-j+} = \begin{cases} -\hat{a}_{k-j-} & (q_{j-} \in \text{nonbasis}) \\ \hat{a}_{j,k} & (q_{j-} \in \text{basis}) \end{cases} \quad (\text{A.21})$$

$$\hat{a}_{k+j-} = \begin{cases} -\hat{a}_{k+j+} & (q_{j+} \in \text{nonbasis}) \\ \hat{a}_{j,k} & (q_{j+} \in \text{basis}) \end{cases} \quad (\text{A.22})$$

$$\hat{a}_{k-j-} = \begin{cases} -\hat{a}_{k-j+} & (q_{j+} \in \text{nonbasis}) \\ 0 & (q_{j+} \in \text{basis}) \end{cases} \quad (\text{A.23})$$

が成り立つ。

選択的最小ノルム解を求める際には、式 (A.19)–式 (A.23) の性質に着目して、メモリ消費と計算量を節約したプログラムを作成した。

さらにプログラムで留意する必要があるのは、ゼロ・トレランス (zero tolerance) である。すなわち、第 2 段階で評価関数の改善可能性を判断する時に非基底変数の係数の符号を調べるが、計算機プログラムでは 0 より大きいかどうかで判断せず、ある微小量 ϵ_{tol} より大きいかどうか (負かどうかの判定では $-\epsilon_{\text{tol}}$ より小さいかどうか) で判断する。この微小量 ϵ_{tol} はゼロ・トレランスと呼ばれ、数値計算の誤差の悪影響が出ないよう最適化計算を安定化する効果がある。本研究では、線形計画法の数多くの応用分野で経験的に無難な典型値とされている $\epsilon_{\text{tol}} = 10^{-5}$ を用いた。

移植性を考慮して C 言語で記述したプログラムリスト

- 行列計算ルーチン (matlib.h)
- SMN プログラム (lp.h)

を章末に示す⁷。ゼロ・トレランスはマクロ CST_EPS で指定されている。

⁷実際の座場解析では、重み付けしてからこのシンプレックス・ルーチンを使い、その結果に対して重み付けと逆の操作を施さねばならない。

A.3 不等式制約の SMN 法

例題 A-3 に許容幅 $\varepsilon = \frac{1}{2}$ をもたせた問題

問題 A-5 (不等式制約の SMN 法の例題)

$$\begin{aligned} f &= |q_1| + |q_2| + |q_3| \rightarrow \min. \\ \text{subject to } \begin{cases} \frac{11}{2} \leq q_1 + 2q_2 - 3q_3 \leq \frac{13}{2} \\ \frac{3}{2} \leq 2q_1 - q_2 + 3q_3 \leq \frac{5}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

を考える。この問題は、スラック変数 (slack variable) $s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0$ を導入した次のような等式制約の問題と等価である。

問題 A-6 (等式制約に書き換えた例題)

$$\begin{aligned} f &= |q_1| + |q_2| + |q_3| \rightarrow \min. \\ \text{subject to } \begin{cases} q_1 + 2q_2 - 3q_3 + s_1 = \frac{13}{2} \\ 2q_1 - q_2 + 3q_3 + s_2 = \frac{5}{2} \\ q_1 + 2q_2 - 3q_3 - s_3 = \frac{11}{2} \\ 2q_1 - q_2 + 3q_3 - s_4 = \frac{3}{2} \\ \forall s_j \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

なお、元からある変数 q_1, q_2, q_3 は、決定変数 (decision variable) と呼ばれる。

さらに、等式制約の場合同様、式 (A.11) のように分解することによって、標準形の線形計画問題に書き換えることができる。

問題 A-7 (問題 A-5 の標準形)

$$\begin{aligned} f &= q_{1+} + q_{1-} + q_{2+} + q_{2-} + q_{3+} + q_{3-} \rightarrow \min. \\ \text{subject to } \begin{cases} q_{1+} - q_{1-} + 2q_{2+} - 2q_{2-} - 3q_{3+} + 3q_{3-} + s_1 = \frac{13}{2} \\ 2q_{1+} - 2q_{1-} - q_{2+} + q_{2-} + 3q_{3+} - 3q_{3-} + s_2 = \frac{5}{2} \\ q_{1+} - q_{1-} + 2q_{2+} - 2q_{2-} - 3q_{3+} + 3q_{3-} - s_3 = \frac{11}{2} \\ 2q_{1+} - 2q_{1-} - q_{2+} + q_{2-} + 3q_{3+} - 3q_{3-} - s_4 = \frac{3}{2} \\ \forall q_{j+}, \forall q_{j-}, \forall s_j \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

A.3.1 第 1 段階

問題 A-7 は、A.1 節で述べた手法で解くことができる。しかし、ここでも、等式制約の SMN 法と同様の簡便な手法で初期可能基底解が求められる。

まず、 q_1, q_2, q_3 からランダムに基底変数を選ぶ。例えば、 q_1 と q_2 を選ぶと、問題 A-6 の等式制約の下半分⁸ (第 4 式と第 5 式) を連立させた方程式

$$\begin{cases} q_1 + 2q_2 = \frac{11}{2} \\ 2q_1 - q_2 = \frac{3}{2} \end{cases} \quad (\text{A.24})$$

⁸あるいは上半分でも構わない。

の解は $(q_1, q_2) = \left(\frac{17}{10}, \frac{19}{10}\right)$ となる。したがって、 $\{q_{1+}, q_{2+}, s_1, s_2\}$ を初期基底⁹とした

$$\begin{aligned}(q_{1+}, q_{1-}, q_{2+}, q_{2-}, q_{3+}, q_{3-}, s_1, s_2, s_3, s_4) &= \left(\frac{17}{10}, 0, \frac{19}{10}, 0, 0, 0, 2\varepsilon, 2\varepsilon, 0, 0\right) \\ &= \left(\frac{17}{10}, 0, \frac{19}{10}, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0\right) \quad (\text{A.25})\end{aligned}$$

という初期可能基底解が得られる。この時、可能字引は

$$\begin{cases} f &= \frac{18}{5} + 2q_{1-} + 2q_{2-} + \frac{11}{5}q_{3+} - \frac{1}{5}q_{3-} + \frac{3}{5}s_3 + \frac{1}{5}s_4 \\ q_{1+} &= \frac{17}{10} + q_{1-} - \frac{3}{5}q_{3+} + \frac{3}{5}q_{3-} + \frac{1}{5}s_3 + \frac{2}{5}s_4 \\ q_{2+} &= \frac{19}{10} + q_{2-} + \frac{9}{5}q_{3+} - \frac{9}{5}q_{3-} + \frac{2}{5}s_3 - \frac{1}{5}s_4 \\ s_1 &= 1 - s_3 \\ s_2 &= 1 - s_4 \end{cases} \quad (\text{A.26})$$

と書ける。

A.3.2 第2段階

A.1.2節と同様のアルゴリズムで可能字引を書き換えていく。入る変数は q_{3-} 、出る変数は q_{2+} に決まり、次の可能字引は

$$\begin{cases} f &= \frac{61}{18} + 2q_{1-} + \frac{1}{9}q_{2+} + \frac{17}{9}q_{2-} + 2q_{3+} + \frac{5}{9}s_3 + \frac{2}{9}s_4 \\ q_{1+} &= \frac{7}{3} + q_{1-} - \frac{1}{3}q_{2+} + \frac{1}{3}q_{2-} + \frac{1}{3}s_3 + \frac{1}{3}s_4 \\ q_{3-} &= \frac{19}{18} - \frac{5}{9}q_{2+} + \frac{5}{9}q_{2-} + \frac{2}{9}s_3 - \frac{1}{9}s_4 \\ s_1 &= 1 - s_3 \\ s_2 &= 1 - s_4 \end{cases} \quad (\text{A.27})$$

となる。字引 (A.27) は、評価関数を表現した第1式の右辺の非基底変数の係数がすべて正なので、最適解

$$(q_1, q_2, q_3) = \left(\frac{7}{3}, 0, -\frac{19}{18}\right) \quad (\text{A.28})$$

を表している。

A.3.3 プログラミング

等式制約の場合と同じく、本研究で扱うサイズの問題では、初期の反復では最小添字規則を用いたシンプレックス法よりもランダム探索の方が評価関数の改善が速い。そこで、不等式制約導入前の SMN 問題でランダム探索を行い、その結果選ばれた変数に A.3.1節の手法を適用して、初期可能基底解を求めることにした。

また、第2段階も等式制約の場合同様、決定変数の係数の性質 (A.19)–(A.23) に着目してメモリ消費と計算量を節約したプログラムが作成できる。さらに、第2段階の反復

⁹式 (A.24) の代わりに問題 A-6 の等式制約の上半分を連立させた場合は、 s_1, s_2 の代わりに s_3, s_4 が初期基底に入る。

回数（字引き換え回数）を減らして計算時間を短縮するため、最小添字規則における変数の探索優先順位を、スラック変数、決定変数の順にする。この順位付けによる高速化を、次のようなモンテカルロ・シミュレーションで評価した。

- $S/N \simeq 8.8\text{dB}$ のランダム雑音環境を想定した 35 チャンネルの球モデルを用いる（観測領域は図 4.2 とほぼ同じ北半球全体）。
- 北半球全体を再構成領域とし、その中にランダムに生起させた 2 個の電流双極子を推定する。
- スラック変数を優先した場合の反復回数を、決定変数を優先した場合の反復回数で割った値で評価する。
- 雑音許容幅の値を変化させて評価を行う。それぞれの値に対して、試行回数は 50 回とする。

評価結果を、図 A.1 に示す。雑音許容幅が大きいほど高速化の効果が大きい。SMN 法では、雑音の標準偏差を許容幅としている。その許容幅では、50 回の試行の平均で反復回数がほぼ 16% に削減されている。

このようにスラック変数を優先した不等式制約 SMN 法のプログラムリストは割愛するが、本章の lp.h および次章のパラメトリック・シンプレックス法のプログラムリスト lp_afn.h を参考にされたい。

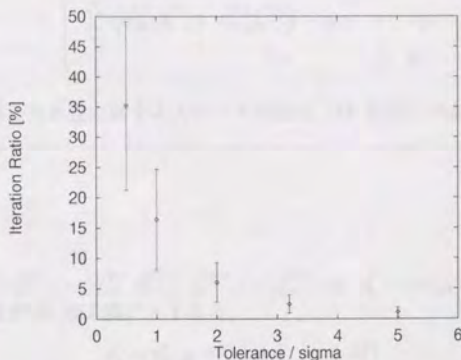


図 A.1: スラック変数優先によるシンプレックス法的高速化（スラック変数優先の場合の反復回数を、決定変数優先の場合の反復回数で割った値で評価）。各許容幅（雑音の標準偏差で割った値を横軸にとった）に対する 50 回の試行の平均と標準偏差を示す。

A.3.4 定理の証明

本節では、不等式制約で解の局在性が損なわれないことを述べた次のような定理を証明する。

(定理 1)

許容幅 $\varepsilon (> 0)$ を認めた問題

$$\left[\begin{array}{l} \sum_{j=1}^N (|\tilde{q}_j^{(I)}| + |\tilde{q}_j^{(II)}|) \rightarrow \min. \\ \text{subject to } \left\{ \begin{array}{ll} \sum_{j=1}^N (a_{1,j}^{(I)} \tilde{q}_j^{(I)} + a_{1,j}^{(II)} \tilde{q}_j^{(II)}) + s_1 & = b_1 + \varepsilon \\ \sum_{j=1}^N (a_{2,j}^{(I)} \tilde{q}_j^{(I)} + a_{2,j}^{(II)} \tilde{q}_j^{(II)}) + s_2 & = b_2 + \varepsilon \\ \vdots & \vdots \\ \sum_{j=1}^N (a_{M,j}^{(I)} \tilde{q}_j^{(I)} + a_{M,j}^{(II)} \tilde{q}_j^{(II)}) + s_M & = b_M + \varepsilon \\ \sum_{j=1}^N (a_{1,j}^{(I)} \tilde{q}_j^{(I)} + a_{1,j}^{(II)} \tilde{q}_j^{(II)}) - s_{M+1} & = b_1 - \varepsilon \\ \sum_{j=1}^N (a_{2,j}^{(I)} \tilde{q}_j^{(I)} + a_{2,j}^{(II)} \tilde{q}_j^{(II)}) - s_{M+2} & = b_2 - \varepsilon \\ \vdots & \vdots \\ \sum_{j=1}^N (a_{M,j}^{(I)} \tilde{q}_j^{(I)} + a_{M,j}^{(II)} \tilde{q}_j^{(II)}) - s_{2M} & = b_M - \varepsilon \\ \forall s_i & \geq 0 \end{array} \right. \end{array} \right] \quad (\text{A.29})$$

の可能基底解を与える基底に属するスラック変数は、 M 個以上である。

(証明)

背理法による。

可能基底解 $(\tilde{q}_1^{(I)*}, \tilde{q}_2^{(I)*}, \dots, \tilde{q}_N^{(I)*}, \tilde{q}_1^{(II)*}, \tilde{q}_2^{(II)*}, \dots, \tilde{q}_N^{(II)*}, s_1^*, s_2^*, \dots, s_{2M}^*)$ を与える基底に属するスラック変数が M 個未満だとすると、

$$s_i^* = s_{i+M}^* = 0 \quad \text{for } \exists i (\leq M) \quad (\text{A.30})$$

となる。したがって、制約の i 番目の式と $i+M$ 番目の式より、

$$\sum_{j=1}^N (a_{i,j}^{(I)} \tilde{q}_j^{(I)*} + a_{i,j}^{(II)} \tilde{q}_j^{(II)*}) = b_i + \varepsilon \quad (\text{A.31})$$

$$\sum_{j=1}^N (a_{i,j}^{(I)} \tilde{q}_j^{(I)*} + a_{i,j}^{(II)} \tilde{q}_j^{(II)*}) = b_i - \varepsilon \quad (\text{A.32})$$

が成り立ち、

$$b_i + \varepsilon = b_i - \varepsilon \quad (\text{A.33})$$

$$\therefore \varepsilon = 0 \quad (\text{A.34})$$

となる。これは、 $\varepsilon > 0$ に反する。

(Q.E.D.)

選択的最小ノルム解は、可能基底解の1つである。よって、定理1より、不等式制約を導入した時に非零の値をもつ決定変数は、センサの個数以下である。

A.4 確率制約の SMN 法

混乱を避けるため本論では詳しく触れなかったが、不等式制約の SMN 法は、確率的線形計画法 [85] として解釈できる。

平均が m で標準偏差が σ の確率密度関数にしたがって生起する雑音が各測定磁場 b_i に含まれていると考え、次のような確率制約 (chance constraint) を考える。

$$P \left[\hat{b}_i + m - \alpha(p_1)\sigma \leq \sum_{j=1}^N (a_{i,j}^{(I)} q_j^{(I)} + a_{i,j}^{(II)} q_j^{(II)}) \leq \hat{b}_i + m + \alpha(p_1)\sigma \right] \geq p_2 \quad (\text{A.35})$$

$$(i = 1, 2, \dots, M)$$

ただし、 $P[\]$ は、 $[\]$ 内の不等式が満たされる確率を表し、 \hat{b} は真の信号磁場、 $\alpha(p_1)$ は雑音が $m - \alpha(p_1)\sigma$ 以上 $m + \alpha(p_1)\sigma$ 以下の値をとる確率が $1 - p_1$ となるような近傍を指定する係数である。この制約は、 p_1 と p_2 の値をあらかじめ指定することによって、測定磁場をどの程度尊重するかという条件を L_1 ノルム最小化問題に取り入れることを意味する (p_1, p_2 が大きければ大きいほど、測定値を尊重することになる)。

さて、式 (A.35) のような制約条件を持つ線形計画問題は確率制約条件計画問題とも呼ばれ、「 $\hat{b}_i + m + \alpha(p_1)\sigma \geq b_i + \varepsilon^+$ かつ $\hat{b}_i + m - \alpha(p_1)\sigma \leq b_i - \varepsilon^-$ 」となる確率を p_2 以上にする最大の $\varepsilon^+, \varepsilon^- (> 0)$ を用いて、

$$b_i - \varepsilon^- \leq \sum_{j=1}^N (a_{i,j}^{(I)} q_j^{(I)} + a_{i,j}^{(II)} q_j^{(II)}) \leq b_i + \varepsilon^+ \quad (i = 1, 2, \dots, M) \quad (\text{A.36})$$

なる確定的不等式制約条件の下での確定的線形計画問題として解くことができる。さらに、非負のスラック変数 s_1, s_2, \dots, s_{2M} を導入すれば、問題は最終的に等式制約の形式

$$\left[\begin{array}{l} f = \sum_{j=1}^N (|q_j^{(I)}| + |q_j^{(II)}|) \rightarrow \min. \\ \text{subject to} \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^N (a_{i,j}^{(I)} q_j^{(I)} + a_{i,j}^{(II)} q_j^{(II)}) + s_i = b_i + \varepsilon^+ \quad (i = 1, 2, \dots, M) \\ \sum_{j=1}^N (a_{i,j}^{(I)} q_j^{(I)} + a_{i,j}^{(II)} q_j^{(II)}) - s_{i+M} = b_i - \varepsilon^- \quad (i = 1, 2, \dots, M) \\ s_i \geq 0, s_{i+M} \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, M) \end{array} \right. \end{array} \right] \quad (\text{A.37})$$

へと書き換えられる。この問題 (A.37) を解くプログラム作成時は、前節と同じ技法を使えばよい。あとは ε^+ , ε^- の値さえ設定すれば、磁場源推定ができる。

ε^+ , ε^- の値を設定する際には、雑音の生起確率密度関数 $f(x)$ を仮定し、

$$\int_{m-\alpha(p_1)\sigma+\varepsilon^-}^{m+\alpha(p_1)\sigma+\varepsilon^+} f(x) dx = p_2 \quad (\text{A.38})$$

から計算する。例えば、各測定チャンネルの雑音が平均 0 で幅が $2w$ の一様な確率密度関数にしたがって生起するランダム雑音の場合、 $p_1 + p_2 = p$ なる要求に対しては、

$$\alpha(p_1)\sigma = w(1-p_1) \quad (\text{A.39})$$

および

$$\frac{2\alpha(p_1)\sigma - \varepsilon^+ - \varepsilon^-}{2w} = p_2 \quad (\text{A.40})$$

より、

$$\varepsilon^+ + \varepsilon^- = 2w(1-p) \quad (\text{A.41})$$

とすればよい。さらに対称性 $\varepsilon^+ = \varepsilon^-$ を仮定すれば、

$$\varepsilon^+ = \varepsilon^- = w(1-p) \quad (\text{A.42})$$

となる。


```

/*****
/*      <matlib.h>      */
/* Matrix Operation Library */
*****/

#ifdef __MATLIB_DEF_

/*      Summation      */
/* b_1 + b_2 + ... + b_m */
double sum(b,m)
    double *b; /* m-dim. vector */
    int m;
{
    double s;
    register int i;
    s=0.0;
    for (i=0;i<m;i++){
        s+=b[i];
    }
    return(s);
}

/* L1-Norm */
double l1norm(b,m)
    double *b; /* m-dim. vector */
    int m;
{
    double s;
    register int i;
    s=0.0;
    for (i=0;i<m;i++){
        s+=fabs(b[i]);
    }
    return(s);
}

/* L2-Norm */
double l2norm(b,m)
    double *b; /* m-dim. vector */
    int m;
{
    double s;
    register int i;
    s=0.0;
    for (i=0;i<m;i++){
        s+=(b[i]*b[i]);
    }
    return(sqrt(s));
}

/* Lp-Norm^p */
double lpnorm(b,m,p)
    double *b; /* m-dim. vector */
    int m;
    double p; /* Lp-norm */
{
    double s;
    register int i;
    s=0.0;

```

```

for (i=0;i<m;i++){
    s+=pow(fabs(*b),p);
    b++;
}
return(s); /* Lp-norm = pow(s,1.0/p) */
}

/* L inf - norm */
double linorm(b,m)
double *b; /* m-dim. vector */
int m;
{
    double s,temp;
    register int i;
    s=0.0;
    for (i=0;i<m;i++){
        temp=fabs(*b);
        if (temp>s) s=temp;
        b++;
    }
    return(s);
}

/* Normalization */
/* b --> b/|b| */
int normalize(b,m)
double *b; /* m-dim. vector */
int m;
{
    double norm;
    register int i;
    if ((norm=l2norm(b,m))==0.0){
        printf("Cannot Normalize Zero-Vector!\n");
        return(1); /* Error Level: 1 */
    }
    else{
        for (i=0;i<m;i++){
            *b/=norm;
            b++;
        }
        return(0); /* Error Level: 0 */
    }
}

/* Vector Product */
/* c = a*b */
void vec_pro(a,b,c)
double *a,*b; /* 3-dim. vectors */
double *c; /* vector product of a & b */
{
    *c=(*a*1)*(*b*2)-(*a*2)*(*b*1);
    *(c+1)=(*a*2)*(*b)-(*a)*(*b*2);
    *(c+2)=(*a)*(*b*1)-(*a*1)*(*b);
}

/* Scalar Product */
double sc_pro(a,b,m)
double *a,*b; /* m-dim. vectors */
int m;
{
    double sc;
    register int i;
    sc=0.0;
    for (i=0;i<m;i++){

```

```

    sc+=(a)*(*b);
    a++; b++;
}
return(sc);
}

/*      Matrix Initialization      */
/* m*n matrix a is filled with dat */
void matinit(a,m,n,dat)
double *a; /* matrix to be initialized */
int m; /* number of rows */
int n; /* number of columns */
double dat; /* a_ij=dat for any ij */
{
    register int k;
    for (k=0;k<m*n;k++) *a++=dat;
}

/*      Matrix Transposition      */
/* c = transpose of m*n matrix a */
void mattrans(a,c,m,n)
double *a; /* matrix to be transposed */
double *c; /* transpose of a */
int m; /* number of rows of a */
int n; /* number of columns of a */
{
    register int i,j;
    for (i=0;i<m;i++){
        for (j=0;j<n;j++){
            *c=*a;
            a++; c+=m;
        }
        c-=m*n-1;
    }
}

/*      Matrix Copy      */
/* c = copy of m*n matrix a */
void matcopy(a,c,m,n)
double *a; /* matrix to be copied */
double *c; /* copy of a */
int m; /* number of rows of a */
int n; /* number of columns of a */
{
    register int i;
    for (i=0;i<m*n;i++){
        *c=*a;
        a++; c++;
    }
}

/*      Solving Linear Equations a*x = b      */
/*      by Gaussian Elimination      */
/* without Preparation for Reuse of the Same Matrix */
/*      Singularity is Returned      */
int solve(a,b,x,s,m)
double *a; /* m*m coefficient matrix */
double *b; /* m-dim. data vector */
double *x; /* m-dim. solution vector */
double *s; /* m-dim. column-scaling factors */
int m; /* equation size */
{
    double temp; /* temporary data for exchanging or scaling */
    int sing; /* singularity (Y:1 N:0) */

```



```

register int i,j,k;

/* default is nonsingular */
sing=0;

if (b!=x) matcopy(b,x,m,1);

/* row-scaling */
for (i=0;i<m;i++){
    temp=fabs(*(a+m*i));
    for (j=1;j<m;j++){
        if (temp<fabs(*(a+m*i+j))) temp=fabs(*(a+m*i+j));
    }
    if (temp==0.0){
        printf("Scaling impossible (%dth row)!\n",i+1);
        sing=1;
        goto solve_end;
    }
    for (j=0;j<m;j++) *(a+m*i+j)/=temp;
    *(x+i)=temp;
}

/* column-scaling */
for (j=0;j<m;j++){
    temp=fabs(*(a+j));
    for (i=0;i<m;i++){
        if (temp<fabs(*(a+m*i+j))) temp=fabs(*(a+m*i+j));
    }
    if (temp==0.0){
        printf("Scaling impossible (%dth column)!\n",j+1);
        sing=1;
        goto solve_end;
    }
    *(a+j)=temp;
    for (i=0;i<m;i++) *(a+m*i+j)/=temp;
}

/* forward reduction */
for (j=0;j<m-1;j++){

    /* partial pivoting */
    temp=fabs(*(a+m*j)); k=j;
    for (i=j+1;i<m;i++){
        if (temp<fabs(*(a+m*i+j))){
            temp=fabs(*(a+m*i+j));
            k=i;
        }
    }
    if (k!=j){ /* exchange j-th and k-th rows */
        for (i=j;i<m;i++){ /* only after j-th column */
            temp=*(a+m*j+i);
            *(a+m*j+i)=*(a+m*k+i);
            *(a+m*k+i)=temp;
        }
        temp=*(x+j);
        *(x+j)=*(x+k);
        *(x+k)=temp;
    }

    if (*(a+m*j+j)==0.0){
        printf("Matrix is singular at %dth column!\n",j+1);
        sing=1;
        goto solve_end;
    }

    temp=*(a+m*j+j);
    *(x+j)/=temp;
    for (i=1;i<m-j;i++) *(a+m*j+i)/=temp;
}

```

```

for (i=1;i<m-j;i++){ /* sweep out only after j-th row and column */
    *(x+j+i)-=(*(x+j))*(*(a+m*(j+i)+j));
    for (k=1;k<m-j;k++)
        *(a+m*(j+i)+k)-=(*(a+m*j+k))*(*(a+m*(j+i)+j));
    }
}

/* backward substitution */
if (*(a+m*(m-1)+m-1)==0.0){
    printf("Matrix is singular at %dth column!\n",m);
    sing=1;
    goto solve_end;
}
*(x+m-1)/=*(a+m*(m-1)+m-1);
for (i=m-2;i>=0;i--){
    for (j=i+1;j<m;j++) *(x+i)-=(*(a+m*i+j))*(*(x+j));
}

/* scaling back */
for (j=0;j<m;j++) *(x+j)/=*(s+j);

solve_end;
return(sing);
}

```

```

/*      Solving Linear Equations a*x = b      */
/*      by Gaussian Elimination                */
/* with Preparation for Reuse of the Same Matrix */
/*      Singularity is Returned                */
int solve1(a,inv_a,b,x,s1,s2,exch,m)
double *a; /* m*m coefficient matrix */
double *inv_a; /* m*m inversion data of matrix a */
double *b; /* m-dim. data vector */
double *x; /* m-dim. solution vector */
double *s1; /* m-dim. row-scaling factors */
double *s2; /* m-dim. column-scaling factors */
int *exch; /* exchange order */
int m; /* equation size */
{
    double temp; /* temporary data for exchanging or scaling */
    int sing; /* singularity (Y:1 N:0) */
    register int i,j,k;

    /* default: nonsingular */
    sing=0;

    matcopy(a,inv_a,m,m);
    if (b!=x) matcopy(b,x,m,1);

    /* row-scaling */
    for (i=0;i<m;i++){
        temp=fabs(*(a+i));
        for (j=1;j<m;j++){
            if (temp*fabs(*(a+m*i+j))) temp=fabs(*(a+m*i+j));
        }
        if (temp==0.0){
            printf("Scaling impossible (%dth row)!\n",i+1);
            sing=1;
            goto solve1_end;
        }
        for (j=0;j<m;j++) *(inv_a+m*i+j)/=temp;
        *(x+i)=temp;
        *(s1+i)=temp;
    }

    /* column-scaling */
    for (j=0;j<m;j++){

```

```

temp=fabs(*(inv_a+j));
for (i=0;i<m;i++){
    if (temp<fabs(*(inv_a+m+i+j))) temp=fabs(*(inv_a+m+i+j));
}
if (temp==0.0){
    printf("Scaling impossible (%dth column)\n",j+1);
    sing=1;
    goto solve1_end;
}
*(s2+j)=temp;
for (i=0;i<m;i++) *(inv_a+m+i+j)/=temp;
}

/* forward reduction */
for (j=0;j<m-1;j++){

    /* partial pivoting */
    temp=fabs(*(inv_a+m+j)); k=j;
    for (i=j+1;i<m;i++){
        if (temp<fabs(*(inv_a+m+i+j))){
            temp=fabs(*(inv_a+m+i+j));
            k=i;
        }
    }
    *(exch+j)=k;
    if (k!=j){ /* exchange j-th and k-th rows */
        for (i=j;i<m;i++){ /* only after j-th column */
            temp=*(inv_a+m+j+i);
            *(inv_a+m+j+i)=*(inv_a+m+k+i);
            *(inv_a+m+k+i)=temp;
        }
        temp=*(x+j);
        *(x+j)=*(x+k);
        *(x+k)=temp;
    }

    if (*(inv_a+m+j+j)==0.0){
        printf("Matrix is singular at %dth column\n",j+1);
        sing=1;
        goto solve1_end;
    }

    temp=*(inv_a+m+j+j);
    *(x+j)/=temp;
    for (i=1;i<m-j;i++){ *(inv_a+m+j+j+i)/=temp;
    for (i=1;i<m-j;i++){ /* sweep out only after j-th row and column */
        *(x+j+i)=*(x+j+i)-(*(inv_a+m+(j+i)+j));
        for (k=1;k<m-j;k++){
            *(inv_a+m+(j+i)+j+k)-=(*(inv_a+m+j+j+k))*(*(inv_a+m+(j+i)+j));
        }
    }

    /* backward substitution */
    if (*(inv_a+m*(m-1)+m-1)==0.0){
        printf("Matrix is singular at %dth column.\n",m);
        sing=1;
        goto solve1_end;
    }
    *(x+m-1)/=*(inv_a+m*(m-1)+m-1);
    for (i=m-2;i>=0;i--){
        for (j=i+1;j<m;j++) *(x+i)-=(*(inv_a+m+i+j))*(*(x+j));
    }

    /* scaling back */
    for (j=0;j<m;j++) *(x+j)/=*(s2+j);

    solve1_end;
    return(sing);
}

```



```

}

/* Solving Linear Equations a*x = b */
/*   by Gaussian Elimination   */
/*   Reusing the Same Matrix   */
void solve2(inv_a,b,x,s1,s2,exch,m)
double *inv_a; /* m*m inversion data of matrix a */
double *b; /* m-dim. data vector */
double *x; /* m-dim. solution vector */
double *s1; /* m-dim. row-scaling factors */
double *s2; /* m-dim. column-scaling factors */
int *exch; /* exchange order */
int m; /* equation size */
{
    double temp; /* temporary data for exchanging or scaling */
    register int i,j,k;

    if (b!=x) matcopy(b,x,m,1);

    /* row-scaling */
    for (i=0;i<m;i++) *(x+i)/=*(s1+i);

    /* forward reduction */
    for (j=0;j<m-1;j++){
        /* partial pivoting */
        k=(exch+j);
        if (k!=j){ /* exchange j-th and k-th rows */
            temp=(x+j);
            *(x+j)=(x+k);
            *(x+k)=temp;
        }

        *(x+j)/=(inv_a+m*j+j);
        for (i=1;i<m-j;i++) /* sweep out only after j-th row and column */
            *(x+j+i)-=(*(x+j))*(inv_a+m*(j+i)+j));
    }

    /* backward substitution */
    *(x+m-1)/=(inv_a+m*(m-1)+m-1);
    for (i=m-2;i>=0;i--){
        for (j=i+1;j<m;j++) *(x+i)-=(*(inv_a+m*i+j))*(x+j);
    }

    /* scaling back */
    for (j=0;j<m;j++) *(x+j)/=*(s2+j);
}

#endif

```

```

/*****
/*      <lp.h>      */
/* Linear Programming for Minimum L1-Norm Problem */
/* (Revised Simplex Method after Random Search) */
/* EQN_NUM (Number of the Equations) and      */
/* VAR_NUM (Number of the Variables)          */
/* must be predefined as macros.              */
/* Usage: <matlib.h> must be pre-included.    */
*****/

#ifdef (__LP_DEF)
#define __LP_DEF_
#define SLT_EPS 1.0E-20 /* tolerance of silent variables */
#define IMP_EPS 1.0E-10 /* tolerance of norm-improvement */
#define INF 1.7E308 /* infinity */

/*      Global variables      */
/* cost=Sum{ans[i]}-->min. subject to mat*ans=cdat */
double *mat; /* coefficient matrix */
double *ans; /* answer vector */
double *cdat; /* constraint data vector */
double cost; /* cost-function value */
double bmat[EQN_NUM][EQN_NUM]; /* coefficient matrix for basic variables */
int basis[EQN_NUM]; /* subscripts of basic variables */
int bsgn[VAR_NUM]; /* sign of basic variables
                  1: selected (positive)
                  0: unselected
                 -1: selected (negative) */
int forbid[VAR_NUM]; /* forbid flag for silent variables */

/* Phase1 */
void phase1()
{
    double tmat[EQN_NUM][EQN_NUM]; /* temporary coefficient matrix */
    double scl[EQN_NUM]; /* scaling factors in Gaussian elimination */
    double tmp;
    register int i,j;
    int sing=1; /* singularity */
    register int lv; /* subscript of leaving variable */
    register int ent; /* subscript of entering variable */

    /* opening message */
    printf("Let's begin phase1.\n");

    /* check silent variables */
    for (j=0;j<VAR_NUM;j++){
        tmp=0.0;
        for (i=0;i<EQN_NUM;i++){
            tmp+=(*(mat+VAR_NUM*i+j))*(*(mat+VAR_NUM*i+j));
            if (tmp>SLT_EPS)*(forbid+j)=0;
            else *(forbid+j)=1; /* if silent, nonbasic */
        }
    }

    /* initial random distribution */
    while (sing==1){
        for (j=0;j<VAR_NUM;j++) bsgn[j]=0;
        for (j=0;j<EQN_NUM;j++){
            basis[j]=rand()%VAR_NUM;
            while (bsgn[basis[j]]==1 || forbid[basis[j]]==1)
                basis[j]=rand()%VAR_NUM;
            bsgn[basis[j]]=1;
            for (i=0;i<EQN_NUM;i++){
                bmat[i][j]=*(mat+VAR_NUM*i+basis[j]);
            }
        }
        matcopy(bmat[0],tmat[0],EQN_NUM,EQN_NUM);
    }
}

```

```

sing=solve(tmat[0],cdat,ans,scl,EQN_NUM);
}
cost=linorm(ans,EQN_NUM);

/* random search */
printf("Let's begin random search.\n");
for (j=0;j<VAR_NUM;j++){
    lv=rand()XEQN_NUM; /* candidates are randomly selected */
    ent=rand()XVAR_NUM;
    while (bsgn[ent]==1 || forbid[ent]==1) ent=rand()XVAR_NUM;

    /* try */
    matcopy(bmat[0],tmat[0],EQN_NUM,EQN_NUM);
    for (i=0;i<EQN_NUM;i++) tmat[i][lv]=*(mat+VAR_NUM*i+ent);
    if (solve(tmat[0],cdat,ans,scl,EQN_NUM)==0){
        tmp=linorm(ans,EQN_NUM);
        if (tmp<cost){
            cost=tmp; /* norm has decreased */

            /* exchange */
            bsgn[basis[lv]]=0;
            bsgn[ent]=1;
            basis[lv]=ent;
            for (i=0;i<EQN_NUM;i++)
                bmat[i][lv]=*(mat+VAR_NUM*i+ent);
        }
    }
}

printf("Norm of the solution = Xlf after phase1.\n",cost);

/* sign check */
matcopy(bmat[0],tmat[0],EQN_NUM,EQN_NUM);
if (solve(tmat[0],cdat,ans,scl,EQN_NUM)!=1){
    printf("Singularity error in the final basis of phase1!\n");
    exit(1);
}
for (j=0;j<EQN_NUM;j++){
    if (*(ans+j)<0.0){
        *(ans+j)=-1.0;
        for (i=0;i<EQN_NUM;i++) bmat[i][j]=-1.0;
        bsgn[basis[j]]=-1;
    }
}
}

/* Phase2 */
int phase2()
{
    double imat[EQN_NUM][EQN_NUM]; /* inversion data matrix */
    double rscl[EQN_NUM]; /* row-scaling factors in Gaussian elimination */
    double cscl[EQN_NUM]; /* column-scaling factors in Gaussian elimination */
    double cvec[EQN_NUM]; /* coefficient vector of cost function */
    double evec[EQN_NUM]; /* coefficient vector for entering variable */
    double imp; /* for examination of cost-improvement */
    double entv; /* value of entering variable */
    double tnorm; /* temporary norm for reconfirmation */
    int exch[EQN_NUM]; /* exchange order in Gaussian elimination */
    int sing; /* singularity */
    register int lv; /* subscript of leaving variable */
    register int ent; /* subscript of entering variable */
    int inv; /* flag of inversion ( 1:inverted, 0:not_yet ) */
    int rcfm=0; /* mode of reconfirmation ( 1:on, 0:off ) */
    int scan=0; /* scanning mode
        0: in preparation of the next scan
        1: in search of entering variable
        2: in search of leaving variable */
    int itr=0; /* number of iterations */

```



```

register int i;

/* opening message */
printf("Let's begin phase2.\n");

/* main routine of phase2 based on smallest-subscript rule */
while (scan==0){
    matinit(cvec,EQN_NUM,1,1.0); /* cost-function is L1-norm */
    mattrans(bmat[0],imat[0],EQN_NUM,EQN_NUM);
    if ((inv=solve(imat[0],cvec,cvec,rscl,EQN_NUM))==1){
        printf("Singularity error in temporary basis'\n");
        exit(1);
    }

    scan=1; /* in search of entering variable */
    ent=0; /* entering variable is examined in the order of subscript */
    while (ent<VAR_NUM && scan==1){
        if (bsgn[ent]==0 && forbid[ent]!=1){ /* ent-th variable is nonbasic */
            for (i=0;i<EQN_NUM;i++){ evec[i]=(mat*VAR_NUM+i+ent);
                imp=sc_pro(cvec,evec,EQN_NUM);

            if (1.0<fabs(imp)){ /* cost may be improved */
                if (imp>0.0) imp=1.0; /* ent-th variable should be positive */
                else imp=-1.0; /* ent-th variable should be negative */

                if (inv==0){
                    if (solve(bmat[0],imat[0],evec,evec,rscl,cscl,exch,EQN_NUM)==1){
                        printf("Singularity error in temporary basis'\n");
                        exit(1);
                    }
                    inv=1;
                }
                else solve2(imat[0],evec,evec,rscl,cscl,exch,EQN_NUM);

                scan=2; /* in search of leaving variable */
                lv=-1; entv=INF;
                for (i=0;i<EQN_NUM;i++){
                    if (evec[i]*imp>0.0){
                        if (*(ans+i)*imp/evec[i]<entv){
                            entv=*(ans+i)*imp/evec[i];
                            lv=i;
                        }
                    }
                }

                if (lv!=-1 && entv>0.0)
                    scan=0; /* to preparation of the next scan */
                else if (entv==0.0)
                    printf("Degeneration! (Xdth and Xdth)\n",ent,basis[lv]);
                else printf("Infinite problem'\n");
            }
        }
        next_ent++;
        ent++;
    }
    ent--; /* compensation for the last incrementation */

    /* preparation of the next scan */
    if (scan==0){
        if (rcfm==0){ /* without cost-improvement reconfirmation */
            bsgn[basis[lv]]=0; /* leave */
            if (imp>0.0) bsgn[ent]=1; /* enter (positive) */
            else bsgn[ent]=-1; /* enter (negative) */
            basis[lv]=ent;
            *(ans+lv)=entv;
            for (i=0;i<EQN_NUM;i++){
                if (i!=lv) *(ans+i)-=imp*entv*evec[i];
            }
        }
    }
}

```

```

    bmat[i][lv]=imp*(*(mat+VAR_NUM+i*ent));
}
itr++;
}

else{ /* with reconfirmation */

/* sign check */
tnorm=entv;
for (i=0;i<EQN_NUM;i++){
    if (i!=lv){
        if (*(ans+i)-imp*entv+evec[i]<0.0){
            printf("X%dth variable is negative!\n",i+1);
            scan=1;
            goto next_ent;
        }
        tnorm+=(ans+i)-imp*entv+evec[i];
    }
}

/* cost-improvement reconfirmation */
if (tnorm<cost){ /* improved */
    cost=tnorm;
    bsgn[basis[lv]]=0; /* leave */
    if (imp>0.0) bsgn[ent]=1; /* enter (positive) */
    else bsgn[ent]=-1; /* enter (negative) */
    basis[lv]=ent;
    *(ans+lv)=entv;
    for (i=0;i<EQN_NUM;i++){
        if (i!=lv) *(ans+i)-=imp*entv+evec[i];
        bmat[i][lv]=imp*(*(mat+VAR_NUM+i*ent));
    }
    itr++;
}
else{ /* unimproved */
    printf("Norm increases!\n");
    scan=1;
    goto next_ent;
}
}

/* display and check of norm */
if (itr%10==0){
    if (rcfm==0){
        tnorm=sum(ans,EQN_NUM);
        printf("Norm = %lf after %d iterations.\n",tnorm,itr);
        if ((cost-tnorm)/cost<IMP_EPS){
            rcfm=1;
            printf("With norm-check, in the following.\n");
        }
        cost=tnorm;
    }
    else printf("Norm = %lf after %d iterations.\n",cost,itr);
}
}

/* closing message */
cost=sum(ans,EQN_NUM);
printf("Final norm = %lf after %d iterations ",cost,itr);
if (rcfm==0) printf("(without norm-check).\n");
else printf("(with norm-check).\n");
return(rcfm);
}

#endif

```

付録 B : パラメトリック・シンプレックス法

極表示を導入した SMN 法では、線形計画法をそのまま適用できないので、本研究で考案したパラメトリック・シンプレックス法を用いる。本章では、前章の線形計画法の場合とはほぼ同様の手順で、パラメトリック・シンプレックス法を解説する。すなわち、簡単な例題を解き、実際のプログラミングにおける高速化技法を記す。高速化のモンテカルロ・シミュレーションによる評価も行う。また、不等式制約に関して、「解の局在性が損なわれない」という定理を証明する。

B.1 等式制約の極表示 SMN 法

直交表示の選択的最小ノルム法で次のような問題を解くような簡単な系を考える。

問題 B-1 (直交表示の SMN 法の例題)

$$f_{\text{org}} = \sum_{j=1}^3 (|q_j^{(I)}| + |q_j^{(II)}|) \rightarrow \min.$$

$$\text{subject to } \begin{cases} q_1^{(I)} + 2q_1^{(II)} + 2q_2^{(I)} - q_2^{(II)} - 3q_3^{(I)} + q_3^{(II)} = 6 \\ 2q_1^{(I)} - 3q_1^{(II)} - q_2^{(I)} + q_2^{(II)} + 3q_3^{(I)} + 2q_3^{(II)} = 2 \end{cases}$$

ここで、

$$q_j^{(I)} = q_j \cos \psi_j, \quad q_j^{(II)} = q_j \sin \psi_j \quad (j = 1, 2, 3) \quad (\text{B.1})$$

などにより、問題 B-1 に対応する極表示の SMN 問題は次のように書ける。

問題 B-2 (極表示の SMN 法の例題)

$$f = q_1 + q_2 + q_3 \rightarrow \min.$$

subject to

$$\begin{cases} (\cos \psi_1 + 2 \sin \psi_1) q_1 + (2 \cos \psi_2 - \sin \psi_2) q_2 + (-3 \cos \psi_3 + \sin \psi_3) q_3 = 6 \\ (2 \cos \psi_1 - 3 \sin \psi_1) q_1 + (-\cos \psi_2 + \sin \psi_2) q_2 + (3 \cos \psi_3 + 2 \sin \psi_3) q_3 = 2 \\ q_1, q_2, q_3 \geq 0 \end{cases}$$

B.1.1 第1段階

ランダムに選んだ初期基底を $S=\{q_1, q_2\}$ とし、それらに対する初期角度変数 ψ_1, ψ_2 の値もランダムに与え、

$$\begin{aligned}\sin \psi_1 &= -0.218, & \cos \psi_1 &= 0.976 \\ \sin \psi_2 &= 0.742, & \cos \psi_2 &= 0.670\end{aligned}\quad (\text{B.2})$$

となったとする。式 (B.2) を問題 B-2 の係数行列に代入すれば、初期基底に対する係数行列が

$$A_S = \begin{pmatrix} 0.540 & 0.598 \\ 2.61 & 0.0720 \end{pmatrix} \quad (\text{B.3})$$

と計算される。方程式

$$A_S \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (\text{B.4})$$

を解くと $q_1=0.502, q_2=9.61$ となるので、初期可能基底解は

$$\begin{cases} q_1 = 0.502, & q_2 = 9.61, & q_3 = 0 \\ \psi_1 & , & \psi_2 : \text{式 (B.2) で決まる値} \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

となり¹、評価関数値 $f=10.1$ を与える。よって、基底変数と評価関数を非基底変数で表現した可能字引は

$$\begin{cases} f = 10.1 - (-4.91 \cos \psi_3 + 1.75 \sin \psi_3) q_3 + q_3 \\ q_1 = 0.502 - (1.32 \cos \psi_3 + 0.739 \sin \psi_3) q_3 \\ q_2 = 9.61 - (-6.23 \cos \psi_3 + 1.01 \sin \psi_3) q_3 \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

となる。

B.1.2 第2段階

字引 (B.6) の第1式右边において、

$$-4.91 \cos \psi_3 + 1.75 \sin \psi_3 = 5.21 \cos(\psi_3 - \beta) \quad (\text{B.7})$$

$$\sin \beta = 0.336, \quad \cos \beta = -0.942 \quad (\text{B.8})$$

である。5.21>1 なので、 $\psi_3 = \beta$ つまり

$$\sin \psi_3 = 0.336, \quad \cos \psi_3 = -0.942 \quad (\text{B.9})$$

として q_3 を基底に入れれば、評価関数 f の値を現在の 10.1 から下げることができる。式 (B.9) から、字引 (B.6) の基底変数の式 (最後の2式) は

$$q_1 = 0.502 + 0.992q_3 \quad (\text{B.10})$$

$$q_2 = 9.61 - 6.21q_3 \quad (\text{B.11})$$

¹この段階では、式 (B.2) から逆正接関数演算で ψ_1, ψ_2 の値を求める必要はない。

となる。基底から出る変数はモーメント強度変数の非負条件

$$q_1 = 0.502 + 0.992q_3 \geq 0 \quad (\text{B.12})$$

$$q_2 = 9.61 - 6.21q_3 \geq 0 \quad (\text{B.13})$$

のうちでもっとも厳しいもので決まる。この例では式 (B.12) は q_3 の値の上昇に制限を加えないので、式 (B.13) すなわち

$$q_3 \leq 1.55 \quad (\text{B.14})$$

が出る変数を q_2 に決め、入る変数 q_3 の値を 1.55 に決める。式 (B.9) から係数行列を計算すると

$$A_S = \begin{pmatrix} 0.540 & 3.16 \\ 2.61 & -2.15 \end{pmatrix} \quad (\text{B.15})$$

となり、新しい基底 $S = \{q_1, q_3\}$ に対する字引は

$$\begin{cases} f = 3.59 - (0.731 \cos \psi_2 - 0.226 \sin \psi_2) q_2 + q_2 \\ q_1 = 2.04 - (0.120 \cos \psi_2 + 0.108 \sin \psi_2) q_2 \\ q_3 = 1.55 - (0.611 \cos \psi_2 - 0.334 \sin \psi_2) q_2 \end{cases} \quad (\text{B.16})$$

となる。字引 (B.16) の第 1 式右辺において

$$0.731 \cos \psi_2 - 0.226 \sin \psi_2 = 0.765 \cos (\psi_2 - \beta) \quad (\text{B.17})$$

であり、 $0.765 < 1$ なので、探索を終了する。探索を終了したので

$$\begin{aligned} \sin \psi_1 &= -0.218, & \cos \psi_1 &= 0.976 \\ \sin \psi_3 &= 0.336, & \cos \psi_3 &= -0.942 \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

から逆正接関数演算で角度変数の値を求めると、 $\psi_1 = -0.220$ [rad], $\psi_3 = 2.80$ [rad] となる。以上から、問題 B-2 の近似解は

$$\begin{cases} q_1 = 2.04, & q_2 = 0, & q_3 = 1.55 \\ \psi_1 = -12.6 [\text{deg}], & \psi_3 = 160.4 [\text{deg}] \end{cases} \quad (\text{B.19})$$

となり、評価関数値 $f = 3.59$ を与える。

B.2 不等式制約の極表示 SMN 法

例題 B-2 に許容幅 $\varepsilon = 0.5$ をもたせた問題

問題 B-3 (不等式制約の極表示 SMN 法の例題)

$$f = q_1 + q_2 + q_3 \rightarrow \min.$$

subject to

$$\begin{cases} 5.5 \leq (\cos \psi_1 + 2 \sin \psi_1) q_1 + (2 \cos \psi_2 - \sin \psi_2) q_2 + (-3 \cos \psi_3 + \sin \psi_3) q_3 \leq 6.5 \\ 1.5 \leq (2 \cos \psi_1 - 3 \sin \psi_1) q_1 + (-\cos \psi_2 + \sin \psi_2) q_2 + (3 \cos \psi_3 + 2 \sin \psi_3) q_3 \leq 2.5 \\ q_1, q_2, q_3 \geq 0 \end{cases}$$

を考える。この問題を、シンプレックス法の場合と同じく、スラック変数 $s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0$ を導入した次のような等式制約問題に書き換える。

問題 B-4 (等式制約に書き換えた例題)

$$f = q_1 + q_2 + q_3 \rightarrow \min.$$

subject to

$$\begin{cases} (\cos \psi_1 + 2 \sin \psi_1) q_1 + (2 \cos \psi_2 - \sin \psi_2) q_2 + (-3 \cos \psi_3 + \sin \psi_3) q_3 + s_1 = 6.5 \\ (2 \cos \psi_1 - 3 \sin \psi_1) q_1 + (-\cos \psi_2 + \sin \psi_2) q_2 + (3 \cos \psi_3 + 2 \sin \psi_3) q_3 + s_2 = 2.5 \\ (\cos \psi_1 + 2 \sin \psi_1) q_1 + (2 \cos \psi_2 - \sin \psi_2) q_2 + (-3 \cos \psi_3 + \sin \psi_3) q_3 - s_3 = 5.5 \\ (2 \cos \psi_1 - 3 \sin \psi_1) q_1 + (-\cos \psi_2 + \sin \psi_2) q_2 + (3 \cos \psi_3 + 2 \sin \psi_3) q_3 - s_4 = 1.5 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} \forall s_j & \geq & 0 \\ \forall q_j & \geq & 0 \end{matrix}$$

B.2.1 第1段階

A.3.1節と同様の手法で、簡単に初期可能基底解が求められる。

まず、 q_1, q_2, q_3 からランダムに基底変数を選ぶ。例えば、 q_1 と q_2 を選び、対応する角度変数にランダムに値を定め、

$$\begin{aligned} \sin \psi_1 &= -0.340, & \cos \psi_1 &= 0.940 \\ \sin \psi_2 &= -0.746, & \cos \psi_2 &= -0.666 \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

となったとする。式 (B.20) を問題 B-2 の係数行列に代入すれば、初期基底に対する係数行列が

$$A_S = \begin{pmatrix} 0.260 & -0.586 \\ 2.90 & -0.080 \end{pmatrix} \quad (\text{B.21})$$

と計算される。この時、問題 B-4 の等式制約の下半分² (第4式と第5式) を連立させた方程式

$$\begin{cases} 0.260q_1 - 0.586q_2 = 5.5 \\ 2.90q_1 - 0.080q_2 = 1.5 \end{cases} \quad (\text{B.22})$$

の解は $(q_1, q_2) = (0.262, -9.27)$ となる。ここで、 q_2 の値が負になってしまったので、角度変数 ψ_2 の値に π [rad] を加えて

$$\begin{aligned} \sin \psi_1 &= -0.340, & \cos \psi_1 &= 0.940 \\ \sin \psi_2 &= 0.746, & \cos \psi_2 &= 0.666 \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

とする。この結果、 $\{q_1, q_2, s_1, s_2\}$ を初期基底³とした

$$\begin{cases} q_1 = 0.262, & q_2 = 9.27, & q_3 = 0 \\ \psi_1, & \psi_2 : & \text{式 (B.23) で決まる値} \\ s_1 = 2\varepsilon = 1, & s_2 = 2\varepsilon = 1, & s_3 = s_4 = 0 \end{cases} \quad (\text{B.24})$$

²あるいは上半分でも構わない。

³式 (B.22) の代わりに問題 B-4 の等式制約の上半分を連立させた場合は、 s_1, s_2 の代わりに s_3, s_4 が初期基底に入る。

という初期可能基底解が得られる。この時、可能字引は

$$\begin{cases} f = 9.53 - (-4.46 \cos \psi_3 + 2.07 \sin \psi_3) q_3 + q_3 + 1.68 s_3 + 0.194 s_4 \\ q_1 = 0.262 + (-1.19 \cos \psi_3 - 0.651 \sin \psi_3) q_3 - 0.0477 s_3 + 0.349 s_4 \\ q_2 = 9.27 + (5.65 \cos \psi_3 - 1.42 \sin \psi_3) q_3 + 1.73 s_3 - 0.155 s_4 \\ s_1 = 1 \\ s_2 = 1 \end{cases} \quad (B.25)$$

と書ける。

B.2.2 第2段階

字引 (B.25) の第1式右辺において、スラック変数、モーメント強度変数の順に、その係数を調べる。 s_3 の係数は正なので、 s_3 を基底に入れても (値を0から正の値に増やしても) 評価関数値は改善されない。 s_4 の係数も正なので、 s_4 も基底に入れる候補にはならない。次に q_3 の係数を見ると、

$$-(-4.46 \cos \psi_3 + 2.07 \sin \psi_3) + 1 = -4.92 \cos (\psi_3 - \beta) + 1 \quad (B.26)$$

$$\sin \beta = 0.421, \quad \cos \beta = -0.907 \quad (B.27)$$

となっている。 $4.92 > 1$ なので、 $\psi_3 = \beta$ つまり

$$\sin \psi_3 = 0.421, \quad \cos \psi_3 = -0.907 \quad (B.28)$$

とすれば式 (B.26) の値を負にできる。これは、式 (B.28) で定まる ψ_3 を伴って q_3 を基底に入れば評価関数 f の値を現在の 9.53 から下げることができることを意味する。式 (B.28) と $s_3 = s_4 = 0$ を字引 (B.25) の基底変数の式 (最後の4式) に代入すれば、

$$q_1 = 0.262 + 0.805 q_3 \quad (B.29)$$

$$q_2 = 9.27 - 5.72 q_3 \quad (B.30)$$

$$s_1 = 1 \quad (B.31)$$

$$s_2 = 1 \quad (B.32)$$

となる。基底から出る変数はモーメント強度変数とスラック変数の非負条件のうちでもっとも厳しいもので決まる。今は q_3 の値の上昇に制限を加えるのは式 (B.30) すなわち

$$q_2 = 9.27 - 5.72 q_3 \geq 0 \quad \therefore q_3 \leq 1.62 \quad (B.33)$$

だけなので、出る変数を q_2 に決め、入る変数 q_3 の値を 1.62 に決める。式 (B.28) から係数行列を計算すると

$$A_s = \begin{pmatrix} 0.260 & 3.14 \\ 2.90 & -1.88 \end{pmatrix} \quad (B.34)$$

¹ 前章で述べた高速化技法にしたがう。

となり、新しい基底 $S=\{q_1, q_3\}$ に対する字引は

$$\begin{cases} f = 3.19 - (0.696 \cos \psi_2 - 0.198 \sin \psi_2) q_2 + q_2 + 0.498 s_3 + 0.300 s_4 \\ q_1 = 1.57 + (-0.0646 \cos \psi_2 + 0.1313 \sin \psi_2) q_2 + 0.196 s_3 + 0.327 s_4 \\ q_2 = 1.62 + (-0.632 \cos \psi_2 - 0.329 \sin \psi_2) q_2 + 0.302 s_3 - 0.0271 s_4 \\ s_1 = 1 & - & s_3 & - & s_4 \\ s_2 = 1 & & & & \end{cases} \quad (\text{B.35})$$

となる。字引 (B.35) の第 1 式右辺において s_3 の係数も s_4 の係数も正なので、スラック変数は次の基底に入れる候補にならない。 q_2 の係数も

$$-(0.696 \cos \psi_2 - 0.198 \sin \psi_2) + 1 = -0.724 \cos(\psi_2 - \beta) + 1 \quad (\text{B.36})$$

であり、 $0.724 < 1$ なので、負にできない。よって、探索を終了する。探索を終了したので

$$\begin{aligned} \sin \psi_1 &= -0.340, & \cos \psi_1 &= 0.940 \\ \sin \psi_3 &= 0.421, & \cos \psi_3 &= -0.907 \end{aligned} \quad (\text{B.37})$$

から逆正接関数演算で角度変数の値を求めると、 $\psi_1 = -0.347$ [rad], $\psi_3 = 2.71$ [rad] となる。以上から、問題 B-3 の近似解は

$$\begin{cases} q_1 = 1.57, & q_2 = 0, & q_3 = 1.62 \\ \psi_1 = -19.9 [\text{deg}], & & \psi_3 = 155.1 [\text{deg}] \end{cases} \quad (\text{B.38})$$

となり、評価関数値 $f=3.19$ を与える。

B.2.3 プログラミング

以下の 2 点は、シンプレックス法の場合と同じ技法を用いる。

1. 初期の反復ではランダム探索で評価関数の改善速度を速める。すなわち、不等式制約導入前の問題でランダム探索を行い、その結果選ばれた変数に B.2.1 節の手法を適用して、初期可能基底解を求める。
2. 第 2 段階ではスラック変数を優先して探索し、反復回数を減らす。

2. のスラック変数優先による高速化を、A.3.3 節と同じ設定のモンテカルロ・シミュレーションで評価した結果を、図 B.1 に示す。雑音許容幅が大きいほど高速化の効果が大きい。SMN 法では、雑音の標準偏差を許容幅としている。その許容幅では、50 回の試行の平均で反復回数がほぼ 15% に削減されている。

パラメトリック・シンプレックス法独自の注意事項は、角度変数の計算量の節約である。すなわち、探索途中では逆正接関数演算で角度変数の値そのものを計算する必要はなく、正弦と余弦の値を用いた四則演算のみで字引を書き換えられる。したがって、メモリには角度変数の値ではなく、その正弦と余弦の値だけを格納しておけばよい。逆正接関数演算が必要なのは、探索終了時のみである。

以上の技法をすべて盛り込み、移植性を考慮して C 言語で記述したプログラムリスト

- 極表示と不等式制約を導入した SMN プログラム (lp_ang_f.h)

を章末に示す⁵。

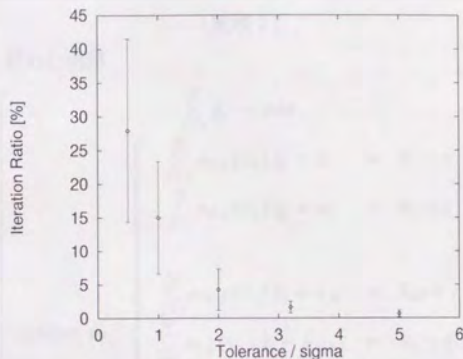


図 B.1: スラック変数優先によるパラメトリック・シンプレックス法の高速化 (スラック変数優先の場合の反復回数を、決定変数優先の場合の反復回数で割った値で評価)。各許容幅 (雑音の標準偏差で割った値を横軸にとった) に対する 50 回の試行の平均と標準偏差を示す。

⁵実際の磁場解析では、重み付けしてからこのシンプレックス・ルーチンを使い、その結果に対して重み付けと逆の操作を施さねばならない。

B.2.4 定理の証明

本節では、不等式制約で解の局在性が損なわれないことを述べた次のような定理を証明する。

(定理 2)

許容幅 ε (> 0) を認めた問題

$$\left[\begin{array}{l} \sum_{j=1}^N \tilde{q}_j \rightarrow \min. \\ \text{subject to } \left\{ \begin{array}{ll} \sum_{j=1}^N a_{1,j}(\psi_j) \tilde{q}_j + s_1 & = b_1 + \varepsilon \\ \sum_{j=1}^N a_{2,j}(\psi_j) \tilde{q}_j + s_2 & = b_2 + \varepsilon \\ \vdots & \vdots \\ \sum_{j=1}^N a_{M,j}(\psi_j) \tilde{q}_j + s_M & = b_M + \varepsilon \\ \sum_{j=1}^N a_{1,j}(\psi_j) \tilde{q}_j - s_{M+1} & = b_1 - \varepsilon \\ \sum_{j=1}^N a_{2,j}(\psi_j) \tilde{q}_j - s_{M+2} & = b_2 - \varepsilon \\ \vdots & \vdots \\ \sum_{j=1}^N a_{M,j}(\psi_j) \tilde{q}_j - s_{2M} & = b_M - \varepsilon \\ \forall s_i & \geq 0 \end{array} \right. \end{array} \right] \quad (\text{B.39})$$

の可能基底解を与える基底に属するスラック変数は、 M 個以上である。

(証明)

背理法による。

可能基底解 $(\tilde{q}_1^*, \tilde{q}_2^*, \dots, \tilde{q}_N^*, \psi_1^*, \psi_2^*, \dots, \psi_N^*, s_1^*, s_2^*, \dots, s_{2M}^*)$ を与える基底に属するスラック変数が M 個未満であるとする、

$$s_i^* = s_{i+M}^* = 0 \quad \text{for } \exists i (\leq M) \quad (\text{B.40})$$

となる。したがって、制約の i 番目の式と $i+M$ 番目の式より、

$$\sum_{j=1}^N a_{i,j}(\psi_j^*) \tilde{q}_j^* = b_i + \varepsilon \quad (\text{B.41})$$

$$\sum_{j=1}^N a_{i,j}(\psi_j^*) \tilde{q}_j^* = b_i - \varepsilon \quad (\text{B.42})$$

が成り立ち、

$$b_i + \varepsilon = b_i - \varepsilon \quad (\text{B.43})$$

$$\therefore \varepsilon = 0 \quad (\text{B.44})$$

となる。これは、 $\varepsilon > 0$ に反する。 (Q.E.D.)

パラメトリック・シンプレックス法ではグローバル・ミニマムへの一意収束性は保証されていないが、可能基底解をたどって探索を行っている。よって、定理2より、不等式制約を導入した時に非零の値をもつモーメント強度変数は、センサの個数以下である。

```

/*****
/*      <lp_ang.f.h>      */
/***** Linear Programming for SMN *****/
/**** with Angular Variables Considered *****/
/**** (Simplex-Like Method after Random Search) **/
/* (Noise-Robust Version using Slack Variables) */
/**      (based on Largest-Subscript Rule) **/
/*  EQN_NUM (Number of the Equations) and      */
/*  VAR_NUM (Number of the Moment Variables) */
/*      must be predefined as macros.      */
/*  Usage: <matlib.h> must be pre-included. */
/*****/

#if !defined (__LP_ANG_F_DEF_)
#define __LP_ANG_F_DEF_
#define CST_EPS 1.0E-5 /* tolerance of cost-threshold */
#define IMP_EPS 1.0E-10 /* tolerance of norm-improvement */
#define ANG_EPS 1.0E-10 /* tolerance for arc-tangent */
#define INF 1.7E308 /* infinity */
#define PI 3.14159

/*****      Global variables      *****/
/****      cost=Sum{ans}-->min.      *****/
/**      subject to cdat<tol<=mat(ang)*ans<=cdat+tol */
double *mat1; /* coefficient matrix for 1st component (ex. x-xomp.) */
double *mat2; /* coefficient matrix for 2nd component (ex. y-xomp.) */
double *ans; /* answer vector */
double *ang; /* angular variable vector */
double *cdat; /* constraint data vector */
double cost; /* cost-function value */
double tol; /* measurement tolerance */
int basis[2*EQN_NUM]; /* subscripts of basic variables */
char sel[VAR_NUM+2*EQN_NUM]; /* flag of the present selection
1: selected
0: unselected */

/* Convert equality constraint into inequality constraint */
void eq2ineq()
{
    register int i;
    for (i=0; i<EQN_NUM; i++){
        *(cdat+i+EQN_NUM)=*(cdat+i)-tol;
        *(cdat+i)+=tol;
    }
}

/* Phase1 */
void phase1()
{
    double bmat[EQN_NUM][EQN_NUM];
/* coefficient matrix for basic variables */
    double tmat[EQN_NUM][EQN_NUM]; /* temporary coefficient matrix */
    double scl[EQN_NUM]; /* scaling factors in Gaussian elimination */
    double ang_ent; /* angle of entering variable */
    double tmp;
    register int i, j;
    int sing=1; /* singularity */
    register int lv; /* subscript of leaving variable */
    register int ent; /* subscript of entering variable */

    /* opening message */
    printf("Let's begin phase1.\n");

    /* initial random distribution */

```



```

while (sing==1){
  for (j=0;j<VAR_NUM*2*EQN_NUM;j++){ sel[j]=0;
  for (j=0;j<EQN_NUM;j++){
    basis[j]=rand()*XVAR_NUM;
    while (sel[basis[j]]==1) basis[j]=rand()*XVAR_NUM;
    sel[basis[j]]=1;
    *(ang+j) = PI*((double)(rand()*32767))/32767.0 - 0.5;
    for (i=0;i<EQN_NUM;i++){
      bmat[i][j] = *(mat1+VAR_NUM*i+basis[j])*cos(*(ang+j))
        + *(mat2+VAR_NUM*i+basis[j])*sin(*(ang+j));
    }
    matcopy(bmat[0],tmat[0],EQN_NUM,EQN_NUM);
    sing=solve(tmat[0],cdat,ans,scl,EQN_NUM);
  }
  cost=lnorm(ans,EQN_NUM);

  /* random search */
  printf("Let's begin random search.\n");
  for (j=0;j<VAR_NUM;j++){
    lv=rand()*EQN_NUM; /* candidates are randomly selected */
    ent=rand()*XVAR_NUM;
    while (sel[ent]==1) ent=rand()*XVAR_NUM;
    ang_ent = PI * (((double)(rand()*32767))/32767.0 - 0.5);

    /* try */
    matcopy(bmat[0],tmat[0],EQN_NUM,EQN_NUM);
    for (i=0;i<EQN_NUM;i++){
      tmat[i][lv] = *(mat1+VAR_NUM*i+ent)*cos(ang_ent)
        + *(mat2+VAR_NUM*i+ent)*sin(ang_ent);
    }
    if (solve(tmat[0],cdat,ans,scl,EQN_NUM)==0){
      tmp=lnorm(ans,EQN_NUM);
      if (tmp<cost){
        cost=tmp; /* norm has decreased */

        /* exchange */
        sel[basis[lv]]=0;
        sel[ent]=1;
        basis[lv]=ent;
        *(ang+lv)=ang_ent;
        for (i=0;i<EQN_NUM;i++){
          bmat[i][lv]=*(mat1+VAR_NUM*i+ent)*cos(ang_ent)
            + *(mat2+VAR_NUM*i+ent)*sin(ang_ent);
        }
      }
    }
  }
  printf("Norm of the solution = %lf after phase1.\n",cost);

  /* sign check */
  eq2ineq();
  if (solve(bmat[0],cdat,ans,scl,EQN_NUM)==1){
    printf("Singularity error in the final basis of phase1!\n");
    exit(1);
  }
  cost=lnorm(ans,EQN_NUM);
  for (j=0;j<EQN_NUM;j++){
    if (*(ans+j)<0.0){
      *(ans+j)=-1.0;
      if (*(ang+j)>0.0) *(ang+j)--PI;
      else *(ang+j)+=PI;
    }
    if (fabs(*(ang+j))>PI){
      printf("Angle exceeds PI!\n");
      exit(1);
    }
  }
}
}

```

```

/* Phase2 */
int phase2()
{
    double bmat[2*EQN_NUM][2*EQN_NUM];
        /* coefficient matrix for basic variables */
    double imat[2*EQN_NUM][2*EQN_NUM]; /* inversion data matrix */
    double rsc1[2*EQN_NUM]; /* row-scaling factors in Gaussian elimination */
    double csc1[2*EQN_NUM]; /* column-scaling factors in Gaussian elimination */
    double cvec[2*EQN_NUM]; /* coefficient vector of cost function */
    double evec[2*EQN_NUM]; /* coefficient vector for entering variable */
    double evec1[2*EQN_NUM];
        /* coefficient vector (1st comp.) for entering variable */
    double evec2[2*EQN_NUM];
        /* coefficient vector (2nd comp.) for entering variable */
    double imp; /* for examination of cost-improvement */
    double imp1; /* for 1st component */
    double imp2; /* for 2nd component */
    double entv; /* value of entering variable */
    double ang_ent; /* angle of entering variable */
    double tnorm; /* temporary norm for reconfirmation */
    int exch[2*EQN_NUM]; /* exchange order in Gaussian elimination */
    int sing; /* singularity */
    register int lv; /* subscript of leaving variable */
    register int ent; /* subscript of entering variable */
    int inv; /* flag of inversion ( 1:inverted, 0:not yet ) */
    int rcfm=0; /* mode of reconfirmation ( 1:on, 0:off ) */
    int scan=0; /* scanning mode
        0: in preparation of the next scan
        1: in search of entering variable
        2: in search of leaving variable */
    int itr=0; /* number of iterations */
    register int i,j;

    /* opening message */
    printf("Let's begin phase2.\n");

    /* initial slack variables */
    for (j=0;j<EQN_NUM;j++){
        basis[j+EQN_NUM]=VAR_NUM+EQN_NUM+j;
        sel[basis[j+EQN_NUM]]=1;
        *(ans+j+EQN_NUM)=2.0*tol;
        for (i=0;i<2*EQN_NUM;i++){
            bmat[i][j] =
                *(mat1+VAR_NUM*(i*EQN_NUM)+basis[j])*cos(*(ang+j))
                + *(mat2+VAR_NUM*(i*EQN_NUM)+basis[j])*sin(*(ang+j));
            if (i==j+EQN_NUM) bmat[i][j+EQN_NUM]=-1.0;
            else bmat[i][j+EQN_NUM]=0.0;
        }
    }

    /* main routine of phase2 based on largest-subscript rule */
    /* duplication on the same meshpoint is prohibited */
    while (scan==0){
        for (i=0;i<2*EQN_NUM;i++){
            if (basis[i]<VAR_NUM) cvec[i]=1.0;
            else cvec[i]=0.0;
        }
        mattrans(bmat[0],imat[0],2*EQN_NUM,2*EQN_NUM);
        if ((inv=solve(imat[0],cvec,cvec,rsc1,2*EQN_NUM))!=1){
            printf("Singularity error in temporary basis!\n");
            exit(1);
        }

        scan=1; /* in search of entering variable */
        ent=VAR_NUM+2*EQN_NUM;
        /* entering variable is examined
            in the inverse order of subscript */
    }
}

```

```

while (ent>0 && scan==1){
  ent--;
  if (sel[ent]==0){ /* ent-th variable is nonbasic */

    if (ent<VAR_NUM){ /* moment */
      for (i=0;i<EQN_NUM;i++){
        evec1[i]=(mat1+VAR_NUM+i+ent);
        evec1[i+EQN_NUM]=evec1[i];
        evec2[i]=(mat2+VAR_NUM+i+ent);
        evec2[i+EQN_NUM]=evec2[i];
      }
      imp1=sc_pro(cvec,evec1,2*EQN_NUM);
      imp2=sc_pro(cvec,evec2,2*EQN_NUM);
      imp=hypot(imp1,imp2);
    }
    else if (ent<VAR_NUM+EQN_NUM){ /* slack */
      for (i=0;i<2*EQN_NUM;i++){
        if (i==ent-VAR_NUM) evec[i]=1.0;
        else evec[i]=0.0;
      }
      imp=sc_pro(cvec,evec,2*EQN_NUM);
    }
    else { /* slack */
      for (i=0;i<2*EQN_NUM;i++){
        if (i==ent-VAR_NUM) evec[i]=-1.0;
        else evec[i]=0.0;
      }
      imp=sc_pro(cvec,evec,2*EQN_NUM);
    }

    if (1.0+CST_EPS<=imp&&ent<VAR_NUM ||
        CST_EPS<imp&&ent==VAR_NUM){ /* cost may be improved */
      if (ent<VAR_NUM){ /* moment */
        if (fabs(imp1)<=ANG_EPS){
          if (imp2>0.0) ang_ent=PI/2.0;
          else ang_ent=-PI/2.0;
        }
        else ang_ent=atan2(imp2,imp1);
        for (i=0;i<EQN_NUM;i++){
          evec[i] =
            evec1[i]*cos(ang_ent) + evec2[i]*sin(ang_ent);
          evec[i+EQN_NUM]=evec[i];
        }
      }

      if (inv==0){
        if (solve1(hmat[0],imat[0],evec,evec,rscl,cscl,exch,2*EQN_NUM)==1){
          printf("Singularity error in temporary basis!\n");
          exit(1);
        }
        inv=1;
      }
      else solve2(imat[0],evec,evec,rscl,cscl,exch,2*EQN_NUM);

      scan=2; /* in search of leaving variable */
      lv=-1; entv=INF;
      for (i=2*EQN_NUM-1;i>=0;i--){
        if (evec[i]>0.0){
          if (*(ans+i)/evec[i]<entv){
            entv=*(ans+i)/evec[i];
            lv=i;
          }
        }
      }

      if (lv!=-1 && entv>0.0)
        scan=0; /* to preparation of the next scan */
      else if (entv==0.0)

```



```

        printf("Degeneration! (Xdth and Xdth)\n",ent,basis[lv]);
    else{
        printf("Infinite Problem!\n");
        exit(1);
    }
}
}
next_ent++;
}

/* preparation of the next scan */
if (scan==0){

if (rcfm==0){ /* without cost-improvement reconfirmation */
    sel[basis[lv]]=0; /* leave */
    sel[ent]=1; /* enter */
    basis[lv]=ent;
    *(ans+lv)=entv;
    *(ang+lv)=ang_ent;

    for (i=0;i<2*EQN_NUM;i++){
        if (i==lv) *(ans+i)-=entv*evect[i];
        if (ent<VAR_NUM)
            bmat[i][lv] =
                evect1[i]*cos(ang_ent) + evect2[i]*sin(ang_ent);
        else if (ent<VAR_NUM+EQN_NUM){
            if (i==ent-VAR_NUM) bmat[i][lv]=1.0;
            else bmat[i][lv]=0.0;
        }
        else{
            if (i==ent-VAR_NUM) bmat[i][lv]=-1.0;
            else bmat[i][lv]=0.0;
        }
    }
    itr++;
}

else{ /* with reconfirmation */

    /* sign check */
    if (basis[lv]<VAR_NUM) tnrm=entv;
    else tnrm=0.0;
    for (i=0;i<2*EQN_NUM;i++){
        if (i==lv){
            if (*(ans+i)-entv*evect[i]<0.0){
                printf("Xdth variable is negative!\n",i+1);
                scan=1;
                goto next_ent;
            }
            if (basis[i]<VAR_NUM) tnrm+=*(ans+i)-entv*evect[i];
        }
    }

    /* cost-improvement reconfirmation */
    if (tnrm<cost){ /* improved */
        cost=tnrm;
        sel[basis[lv]]=0; /* leave */
        sel[ent]=1; /* enter */
        basis[lv]=ent;
        *(ans+lv)=entv;
        *(ang+lv)=ang_ent;

        for (i=0;i<2*EQN_NUM;i++){
            if (i==lv) *(ans+i)-=entv*evect[i];
            if (ent<VAR_NUM)
                bmat[i][lv] =
                    evect1[i]*cos(ang_ent) + evect2[i]*sin(ang_ent);
            else if (ent<VAR_NUM+EQN_NUM){

```

```

        if (i==ent-VAR_NUM) bmat[i][lv]=1.0;
        else bmat[i][lv]=0.0;
    }
    else{
        if (i==ent-VAR_NUM) bmat[i][lv]=-1.0;
        else bmat[i][lv]=0.0;
    }
}
itr++;
}
else{ /* unimproved */
    printf("Norm increases!\n");
    scan=1;
    goto next_ent;
}
}

/* display and check of norm */
if (itr%20==0){
    if (rcfm==0){
        tnorm=0.0;
        for (i=0;i<2*EQM_NUM;i++)
            if (basis[i]<VAR_NUM) tnorm+=(ans[i]);
        printf("Norm = %lf after %d iterations.\n",tnorm,itr);
        if ((cost-tnorm)/cost<INP_EPS){
            rcfm=1;
            printf("With norm-check, in the following.\n");
        }
        cost=tnorm;
    }
    else printf("Norm = %lf after %d iterations.\n",cost,itr);
}
}

/* closing message */
cost=0.0;
for (i=0;i<2*EQM_NUM;i++)
    if (basis[i]<VAR_NUM) cost+=(ans[i]);
printf("Final norm = %lf after %d iterations ",cost,itr);
if (rcfm==0) printf("(without norm-check).\n");
else printf("(with norm-check).\n");
return(rcfm);
}

#endif

```

付録 C： 数値積分

ピックアップ・コイル径を考慮したリード・フィールド行列の計算における数値積分では、Newton Cotes の積分公式を 2 段階にわたって使用した。

[アルゴリズム]

関数 $f(x)$ を区間 $[a, b]$ で数値積分することを考える。区間 $[a, b]$ を n (n は偶数) 等分して $(n+1)$ 個の分点

$$x_i = a + ih, \quad h = \frac{b-a}{n} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n) \quad (\text{C.1})$$

を設ける。Newton Cotes の積分公式では、これらの分点における関数の値 $y_i \equiv f(x_i)$ を用いて、

$$I \equiv \int_a^b f(x) dx \quad (\text{C.2})$$

の近似値 I_n を求める。

$$I_n = \frac{h}{3} \{y_0 + y_n + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2})\} \quad (\text{C.3})$$

この時、誤差 $(I - I_n)$ は

$$\left| \frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(4)}(x) \right| \quad (a < x < b) \quad (\text{C.4})$$

で抑えられる。

また、分割を 2 倍にした近似値 I_{2n} を計算して

$$\hat{I}_{2n} \equiv I_{2n} - \frac{I_n - I_{2n}}{15} \quad (\text{C.5})$$

を求めると、よりよい近似値となる。

リード・フィールド行列を計算するプログラムでは、式 (C.5) を使用した。

付録 D : 選択的アプローチの連続性

第2章 2.4.2節の図 2.5で示したように、選択的最小ノルム法は、十分に磁場誤差を小さくできる臨界点として位置付けられた。その臨界点を図 D.1の点 (a) に再掲する。本章は、

- 選択的最小ノルム法よりもわずかに総自由度が少ないという制約で磁場誤差を最小化した場合の解は、選択的最小ノルム解に近いか？

という疑問について検討する。すなわち、センサ (M 個) よりも多数のメッシュ点を有するモデルでの“選択的 (非零のモーメント強度を許すメッシュ点を限定する)” なアプローチにおいて、図 D.1の点 (a) に対応する解と点 (a)' に対応する解を比較する。

点 (a)' では、次のような解を求める。まず、 N 個のメッシュ点から $(M-1)$ 個のメッシュ点 j_1, j_2, \dots, j_{M-1} を選択して非零のモーメント強度を許したシステム方程式

$$\begin{cases} l_{1,j_1}q_{j_1} + l_{1,j_2}q_{j_2} + \dots + l_{1,j_{M-1}}q_{j_{M-1}} = b_1 \\ l_{2,j_1}q_{j_1} + l_{2,j_2}q_{j_2} + \dots + l_{2,j_{M-1}}q_{j_{M-1}} = b_2 \\ \vdots \\ l_{M,j_1}q_{j_1} + l_{M,j_2}q_{j_2} + \dots + l_{M,j_{M-1}}q_{j_{M-1}} = b_M \end{cases} \quad (D.1)$$

を考える。この連立方程式の係数行列を $L_{1,M-1}$ とすると、自乗誤差を最小にする解は一般化逆行列法

$$(L_{1,M-1})^+ b \quad (D.2)$$

で与えられる。この解に対する磁場の自乗誤差 E は、

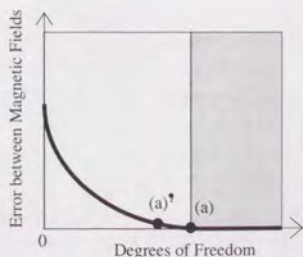
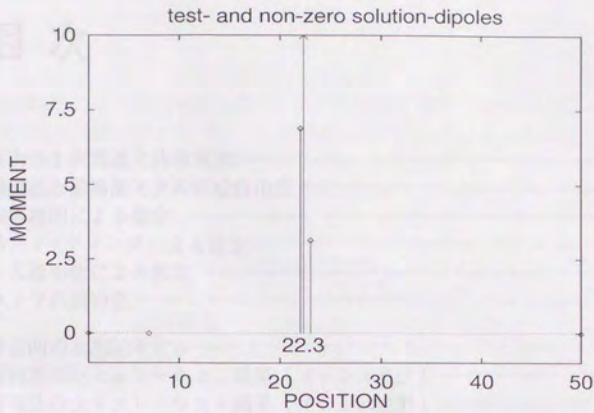


図 D.1: (a) 選択的最小ノルム法 と (a)' 選択的最小自乗誤差法。

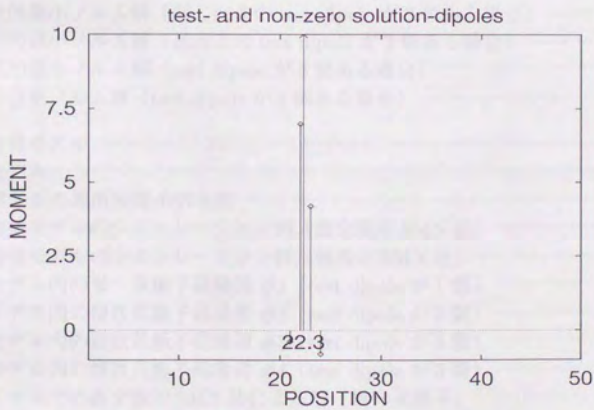
$$E = \|L_{1,M-1} (L_{1,M-1})^+ \mathbf{b} - \mathbf{b}\|_2^2 \quad (\text{D.3})$$

で与えられる。メッシュ点選択のすべての場合 ($N C_{M-1}$ 通り) のうちで最小の誤差 E を与えるものを最適な選択とし、その時に得られる解を最適解とする。この解を、**選択的最小自乗誤差解**と呼ぶことにする。

選択的最小ノルム解と選択的最小自乗誤差解を比較するため、 $M=5$, $N=50$ の 1 次元モデルで単一双極子を推定した。シミュレーション結果を、図 D.2 に示す。どちらの解も test dipole に隣接するメッシュ点上の主要な解双極子で test dipole を再構成しており、“選択的” アプローチの連続性を示唆している。ただし、それらの主要な解双極子以外の余分な解双極子の強度は、選択的最小ノルム解の方が桁違いに小さい。これは、選択的最小ノルム解の方がアーチファクトが現れにくいことを示唆している。



(a)



(b)

図 D.2: (a) 選択的最小ノルム解 と (b) 選択的最小自乗誤差解 ($M = 5, N = 50$). モーメント強度が10の test dipole(矢印↑で表示)がメッシュ点上ではなく、位置22.3にある場合. どちらの解も test dipole に隣接するメッシュ点に主要な解双極子があり、鋭い解となっている。

目 次

2.1	生体内の1次電流と体積電流	4
2.2	磁場誤差と磁場源モデルの総自由度	7
2.3	等磁場線図による推定	8
2.4	磁場フィッティングによる推定	10
2.5	ノルム最小化による推定	15
2.6	チホノフの適切化	17
3.1	深さ方向の1次元モデル	19
3.2	逆行列法のシミュレーション結果(メッシュ点上)	21
3.3	逆行列法のシミュレーション結果(メッシュ点外)	22
3.4	一般化逆行列法(自乗誤差最小化)のシミュレーション結果	23
3.5	最小自乗ノルム解(test dipole が1 個の場合)	27
3.6	選択的最小ノルム解(test dipole が1 個の場合)	27
3.7	選択的最小ノルム解(同じ向きの test dipole が2 個ある場合)	28
3.8	選択的最小ノルム解(逆向きの test dipole が2 個ある場合)	28
3.9	選択的最小ノルム解(test dipole が3 個ある場合)	29
3.10	最小自乗ノルム解(test dipole が3 個ある場合)	29
4.1	立方体モデル	32
4.2	球モデル	32
4.3	L_1 ノルムの局所座標系依存性	33
4.4	立方体モデルのシミュレーション例(直交表示 SMN 法)	36
4.5	立方体モデルのシミュレーション例(極表示 SMN 法)	37
4.6	球モデル内の単一双極子磁場源 #1 (test dipole が1 個)	39
4.7	球モデル内の複数双極子磁場源 #2 (test dipole が2 個)	39
4.8	球モデル内の複数双極子磁場源 #3 (test dipole が3 個)	40
4.9	球モデル内の複数双極子磁場源 #4 (test dipole が3 個)	40
4.10	球モデルでの直交表示 SMN 法による解(単一双極子)	41
4.11	球モデルでの直交表示 SMN 法による解(2 個の test dipole)	41
4.12	球モデルでの直交表示 SMN 法による解(3 個の test dipole #3)	42
4.13	球モデルでの直交表示 SMN 法による解(3 個の test dipole #4)	42
4.14	球モデルでの極表示 SMN 法による解(単一双極子)	43
4.15	球モデルでの極表示 SMN 法による解(2 個の test dipole)	43
4.16	球モデルでの極表示 SMN 法による解(3 個の test dipole #3)	44
4.17	球モデルでの極表示 SMN 法による解(3 個の test dipole #4)	44

4.18	直交表示 SMN 法による複数双極子の推定 ($S/N=27.5\text{dB}$)	45
4.19	直交表示 SMN 法による複数双極子の推定 ($S/N=8.5\text{dB}$)	46
4.20	雑音源双極子分布	46
4.21	直交表示 SMN 法による複数双極子の推定 (コヒーレント雑音)	47
4.22	不等式制約の直交表示 SMN 法による複数双極子推定 ($S/N=8.5\text{dB}$)	49
4.23	不等式制約の極表示 SMN 法による複数双極子推定 ($S/N=8.5\text{dB}$)	49
4.24	極表示 SMN 法における雑音許容幅の評価	50
4.25	test dipole の向きを変化させた場合の解の評価	51
5.1	2 次微分型グラディオメータ	55
5.2	ファントム実験における測定磁場の時間波形	56
5.3	ファントム実験のダイポール電極とセンサ配置	57
5.4	信号ピーク時の等磁場線図	58
5.5	信号ピーク時の直交表示 SMN 法による解	58
5.6	人為雑音印加データの等磁場線図	59
5.7	人為雑音印加データの等式制約直交表示 SMN 法による解析	59
5.8	人為雑音印加データの不等式制約直交表示 SMN 法による解析	60
5.9	人為雑音印加データの不等式制約極表示 SMN 法による解析	60
5.10	正規化パラメータの評価	61
6.1	心臓磁場の測定系	63
6.2	心臓磁場の時間波形	63
6.3	心房興奮の概略	64
6.4	心室興奮の概略	64
6.5	推定された P 波発生源の等磁場線図重畳表示	65
6.6	推定された P 波発生源の三面投影図と MRI 重畳表示 ($t=75\text{ms}$)	70
6.7	推定された P 波発生源の MRI 重畳表示 ($t=77\text{ms}$)	71
6.8	推定された QRS 波発生源の等磁場線図重畳表示	72
6.9	推定された R 波発生源の三面投影図と MRI 重畳表示	76
7.1	仮名文字を照合する短期記憶走査課題の概略	78
7.2	脳磁場測定実験のセンサ配置	80
7.3	近似球中心の算出	81
7.4	TL1(262.1ms) の推定解	83
7.5	TL2(282.3ms) の推定解	84
7.6	TL2(282.3ms) の推定解と等磁場線図・MRI 重畳表示	85
7.7	TL3(278.9ms) の推定解	86
7.8	TL3(278.9ms) の推定解と等磁場線図・MRI 重畳表示	87
7.9	IL2(265.5ms) の推定解	88
7.10	IL2(265.5ms) の推定解と等磁場線図・MRI 重畳表示	89
7.11	TR3(272.2ms) の推定解	90

7.12	TR3(272.2ms) の推定解と等磁場線図・MRI 重畳表示	91
7.13	選択的最小ノルム解の平均位置の軌跡 (TL2)	92
7.14	選択的最小ノルム解の平均位置の軌跡 (TL3)	93
7.15	選択的最小ノルム解の平均位置の軌跡 (IL2)	93
7.16	選択的最小ノルム解の平均位置の軌跡 (TR3)	94
7.17	IL3(268.8ms) の推定解	96
7.18	IL3(268.8ms) の推定解と等磁場線図・MRI 重畳表示	97
7.19	IL4(272.2ms) の推定解と等磁場線図重畳表示	98
7.20	IL4(272.2ms) の推定解の MRI 重畳表示	99
7.21	TR1(268.8ms) の推定解	100
7.22	TR1(268.8ms) の推定解と等磁場線図・MRI 重畳表示	101
7.23	AR4(221.8ms) の推定解	103
7.24	AR4(221.8ms) の推定解と等磁場線図・MRI 重畳表示	104
7.25	IR2(228.5ms) の推定解	105
7.26	IR2(228.5ms) の推定解と等磁場線図・MRI 重畳表示	106
7.27	IR4(235.2ms) の推定解	107
7.28	IR4(235.2ms) の推定解と等磁場線図・MRI 重畳表示	108
A.1	スラック変数優先によるシンプレックス法の高速化	130
B.1	スラック変数優先によるパラメトリック・シンプレックス法の高速化	151
D.1	選択的最小ノルム法と選択的最小自乗誤差法	161
D.2	選択的最小ノルム解と選択的最小自乗誤差解	163

表 目 次

2.1 代表的な生体磁場逆問題解法の分類	7
4.1 球モデルのシミュレーションで使した磁場源構成	38
4.2 モンテカルロ・シミュレーションによる推定限界の評価	52
5.1 ファントム実験で用いた電極	54
7.1 短期記憶走査課題による脳磁場測定実験の Run	79
7.2 脳磁場解析の設定	82
7.3 MEG 双極性パターンの解析	92

発表文献

- <1> K. Matsuura and Y. Okabe, "Selective Minimum-Norm solution of the biomagnetic inverse problem", *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, Vol. 42, No. 6, pp. 608-615, 1995.
- <2> 松浦幹太, 岡部洋一, "局在した生体磁場源分布の再構成", 電気学会論文誌 C, Vol. 116-C, No. 2, pp. 223-229, 1996.
- <3> K. Matsuura and Y. Okabe, "Multi-dipole estimation by Selective-Minimum-Norm method", In C. Baumgartner, L. Deecke, G. Stroink, and S. J. Williamson (eds.), *Biomagnetism: Fundamental Research and Clinical Applications*, pp. 381-384. Elsevier, Amsterdam, 1995.
- <4> K. Matsuura and Y. Okabe, "A parametric simplex algorithm for multi-dipole estimation", *Human Brain Mapping*, Suppl. 1, p. 104, 1995.
- <5> K. Matsuura, N. Shimizu, and Y. Okabe, "Reconstruction of sparse dipole source by a modified SMN method", In I. Hashimoto, Y. C. Okada, and S. Ogawa (eds.), *Visualization of Information Processing in the Human Brain: Recent Advances in MEG and Functional MRI (EEG Suppl. 47)*, pp. 421-429. Elsevier, Amsterdam, 1996.
- <6> K. Matsuura and Y. Okabe, "Multi-dipole estimation by Selective-Minimum-Norm method", In *9th Int. Conf. on Biomagnetism* (Abstracts pp. 215-216), Vienna, 1993.
- <7> K. Matsuura, N. Shimizu, and Y. Okabe, "Reconstruction of sparse dipole source by modified SMN method", In *10th Tokyo Institute of Psychiatry International Symposium* (Abstracts p.83), Tokyo, 1995.
- <8> K. Matsuura and Y. Okabe, "Multiple current-dipole distribution reconstructed by modified Selective Minimum-Norm method", In *10th Int. Conf. on Biomagnetism* (Abstracts p.145), Santa Fe, 1996.
- <9> K. Matsuura and Y. Okabe, " L_p -normalized minimum- L_1 -norm solution of the biomagnetic inverse problem", In *18th Annual Int. Conf. of the IEEE Engineering in Med. and Biol. Soc.* (Paper Number 115), Amsterdam, 1996.
- <10> 松浦幹太, 岡部洋一, "解ベクトル最小ノルム法による逆問題の解法", 日本学術振興会第146委員会高性能SQUIDシステム分科会第14回研究会(招待), 1992.
- <11> 松浦幹太, 岡部洋一, "SMN法による生体磁気の逆問題", 日本学術振興会第146委員会高性能SQUIDシステム分科会第21回研究会(招待), 1994.

- <13> 松浦幹太, 岡部洋一, “選択的解ノルム最小化による双極子推定”, 日本生体磁気学会誌, Vol. 6, No. 1, pp. 82-85, 1993.
- <14> 松浦幹太, 岡部洋一, “不等式制約を用いた解双極子ノルム最小化”, 日本生体磁気学会誌, Vol. 7, No. 1, pp. 146-149, 1994.
- <15> 松浦幹太, 岡部洋一, “選択的最小ノルム法の雑音感度”, 日本生体磁気学会誌, Vol. 8, No. 1, pp. 142-145, 1995.
- <16> 松浦幹太, 岡部洋一, “生体磁場源推定におけるリードフィールド行列の正規化”, 日本生体磁気学会誌, Vol. 9, No. 1, pp. 54-57, 1996.
- <17> 松浦幹太, 岡部洋一, “角度変数を導入した線形計画法によるマルチ・ダイポール推定”, 平成6年電気学会電子・情報・システム部門大会, 1994.
- <18> 松浦幹太, 岡部洋一, “選択的解ノルム最小化による生体磁場逆問題の局在解”, 電気学会マグネティックス研究会, MAG-94-174, 1994.
- <19> 松浦幹太, 山並憲司, 岡部洋一, “SMN法による心臓磁界データのマルチ・ダイポール解析”, 電気学会マグネティックス研究会, MAG-95-67, 1995.
- <20> 松浦幹太, 山並憲司, 岡部洋一, “SMN法による心臓磁界発生源の追跡”, 電気学会マグネティックス研究会, MAG-95-143, 1995.
- <21> 松浦幹太, 山並憲司, 岡部洋一, “選択的最小ノルム法による心臓磁界解析とその安定性”, 平成8年電気学会全国大会, 1996.
- <22> 山並憲司, 松浦幹太, 岡部洋一, “選択的最小ノルム法によるMCG解析”, 日本生体磁気学会誌, Vol. 8, No. 1, pp. 288-289, 1995.
- <23> 岡部洋一, 松浦幹太, “選択的最小ノルム法による脳磁界逆問題”, 日本生体磁気学会誌, Vol. 7, No. 1, pp. 20-23, 1994.
- <24> 岡部洋一, 松浦幹太, “生体磁界逆問題”, 日本学術振興会超伝導エレクトロニクス第146委員会第46回研究会, 1994.
- <25> 岡部洋一, 松浦幹太, “生体磁場逆問題の選択的最小ノルム解”, 電気学会調査専門委員会(生体磁気), 1994.
- <26> 堀井信男, 松浦幹太, 中山明芳, 岡部洋一, “選択的解ノルム最小化による双極子推定の評価”, 1994年電子情報通信学会春季大会, 1994.
- <27> 堀井信男, 松浦幹太, 中山明芳, 岡部洋一, “選択的解ノルム最小化による双極子推定の評価”, 平成5年度電子情報通信学会学生会研究発表会, 1994.

- <28> 清水信朗, 松浦幹太, 岡部洋一. “選択的最小ノルム法による実形状ファントムデータの解析”. 平成 8 年電気学会全国大会, 1996.

その他

正論文 (追補)

- <29> K. Matsuura and Y. Okabe. “A robust reconstruction of sparse biomagnetic sources”. *IEEE Trans. Biomed. Eng.* (accepted)

共著書

- <30> 栗城真也 (編). 脳磁気科学. オーム社, 1997 (1 月出版予定).

索引

- angular variable, 33
- Anterior Temporal, 79
- artificial variable, 123
- atrial activation, 64
- auxiliary problem, 123
- AV node, 64
- Axial Image, 38
- basic feasible solution, 122
 - initial —, 123
- basic variable, 24, 123
- basis, 24, 123
- Boltzmann machine, 13
- BTNET 法, 13
- central sulcus, 102
- chance constraint, 132
- collateral sulcus, 95
- Computed Tomography, 18
- Coronal Image, 38
- CT, 18
- current dipole, 4
- cycling, 123
- Cz, 81
- decision variable, 128
- detecting coil, 2
- ECG, 62
- electrocardiogram, 62
- electromotive forces
 - of the heart, 62
- entering variable, 123
- exhaustive search, 11
- feasible dictionary, 34, 123
- feasible solution, 14, 122
 - basic —, 24
- fMRI, 1
- forward problem, 4
- full-ranked matrix, 24
- generalized inverse matrix, 12
- generalized Wiener filter, 13
- global minimum, 12
- GoF, 82
- Goodness of Fit, 82
- Hopfield 回路, 13
- ill-posed problem, 5
- inferior frontal sulcus, 102
- Inferior Parietal, 79
- inferior temporal gyrus, 95
- Inion, 81
- insula, 95
- intensity variable, 33
- intraparietal sulcus, 102
- inverse problem, 4
 - biomagnetic —, 4
- L_1 ノルム, 16
- latency, 2
- lead-field matrix, 6
- leaving variable, 35, 123
- Left PA point, 81
- left ventricle, 64
- Linear Programming, 25, 122
- Linear-Programming problem, 25
- local minimum, 10
- Location of Mean, 52
- LP, 25, 122
- LV, 64
- magnetocardiogram, 2, 62

- magnetoencephalogram, 2
- magnetopneumogram, 1
- Marquardt のアルゴリズム, 13
- maximally-sparse solution, 24
- maximum-entropy method, 16
- MCG, 2, 62
- measurement region, 20
- MEG, 2
- minimum-dipole method, 11
- Minimum-Norm Estimates, 15
- Minimum-Norm Least-Squares Inverse, 15
- MNEs, 15
- MNLS インバース, 15
- Monte-Carlo simulation, 50
- Moving Dipole 法, 9
- moving mesh method, 17
- MPG, 1
- multi-dipole, 9
- multiple dipole, 9
- Multiple Signal Classification, 13
- MUSIC, 13
- Nasion, 81
- Nelder-Mead のシンプレックス法, 13
- Newton Cotes の積分公式, 160
- noise tolerance, 47
- nonbasic variable, 24, 123
- normalized correlation, 13
- overdetermined, 6
- parameter search method, 11
- point measurement, 20
- polar representation, 33
- preauricular, 81
- precentral sulcus, 102
- primary current, 4
- pseudo-inverse matrix, 12
- P 波, 63
- Q 波, 63
- radial component, 5
- random search, 12
- rank, 24
- realistic torso, 62
- reconstruction region, 20
- regularization parameter, 17
- revised simplex method, 25
- Right PA point, 81
- right ventricle, 64
- Run, 79
- RV, 64
- R 波, 63
- Sagittal Image, 38
- Sampled Pattern Matching, 13
- SA node, 64
- Selective Minimum-Norm, 16
- Selective Minimum-Norm Solution, 24
- sensing bias, 22
- short-term memory scan, 77
- simplex method, 13, 122
 - parametric —, 34
 - two-phase —, 122
- simulated annealing, 12
- single dipole, 6
- singular value, 15
- Singular Value Decomposition, 12
- slack variable, 48, 128
- smallest-subscript rule, 35, 123
- SMN 法, 16
- SMNS, 24
- source dipole, 20
- sparse, 3
- SPM 法, 13
- SQUID, 1
 - dc—, 1
 - 磁束計, 1
- standard form, 122
- Sternberg 課題, 77
- STS, 94
- sulcus, 94
- superior frontal sulcus, 102

superior temporal sulcus, 94
 SVD, 12
 Sylvius sulcus, 94
 system equation, 20
 S 波, 63
 tangential component, 5
 Temporal, 79
 test dipole, 20
 Tikhonov regularization, 17
 Transversal Image, 38
 T 波, 63
 underdetermined, 6
 ventricular activation, 64
 volume current, 4
 well-posed, 5
 zero tolerance, 127
 安定化項, 16
 1 次電流, 4
 —の半径方向成分, 5
 一般化ウィナー・フィルタ, 13
 一般化逆行列, 12
 Moore-Penrose の—, 12
 狭義の—, 12
 右室負荷, 62
 右心室, 64
 右房負荷, 62
 エボック, 78
 エボック数, 78
 エントロピー最大化法, 16
 重み付け, 23
 正規化—, 24, 60
 階数, 6, 24
 確定的不等式制約条件, 132
 角度変数, 33

確率制約, 47, 132
 確率制約条件計画問題, 132
 下前頭溝, 102
 下側頭回, 95
 活動電流, 62
 可能解, 14, 122
 可能基底解, 24, 122
 初期—, 34, 123
 自明な—, 123
 可能字引, 123
 冠状断像, 38
 観測領域, 20
 ガウスの消去法, 20
 基準電極
 —の問題, 1
 基底, 24, 123
 基底遷移型ネットワーク法, 13
 基底変数, 24, 34, 123
 機能的核磁気共鳴画像, 1
 局在性
 空間的—, 3
 —最大の解, 24
 極表示
 電流双極子モーメントの—, 33
 近似球, 81
 擬逆行列, 12
 逆行列法, 20
 逆問題, 2, 4
 生体磁場—, 4
 クラスタ
 解双極子の—, 26
 グラディオメータ
 1 次微分型—, 55
 2 次微分型—, 55
 グローバル・ミニマム, 12
 計算磁場, 6
 決定変数, 128

- 格子点移動法, 17
 コンピュータ断層撮影画像, 18
 最急降下法, 12
 再構成領域, 20
 最小自乗誤差解
 選択的—, 162
 最小自乗ノルム解, 15
 最少双極子法, 11
 最小添字規則, 35, 123
 再分極
 心室筋の—, 63
 左心室, 64
 雑音許容幅, 47
 刺激伝導系, 62
 システム方程式, 20
 シミュレーテッド・アニーリング, 12
 焦点, 77
 しらみつぶし探索, 11
 シルビウス溝, 94
 心筋細胞, 62
 心室興奮, 64
 心室再分極異常, 62
 心磁図, 2, 62
 心電図, 62
 シンプレックス法, 122
 Nelder-Mead の—, 13
 改訂—, 25
 2段階—, 122, 124
 パラメトリック—, 34
 心房興奮, 64
 磁気シールドルーム, 2
 磁場源, 2, 4
 磁場誤差, 6
 磁場フィッティング, 9, 10
 循環, 123
 順問題, 4
 条件数, 6
 上前頭溝, 102
 上側頭溝, 94
 ジョセフソン効果, 1
 人為変数, 123
 錐体細胞, 4
 水平断像, 38
 スパースな解, 3
 スラック変数, 48, 128
 正規化パラメータ, 60
 正則化パラメータ, 17
 生体磁気計測, 1
 線形計画法, 25, 122
 確率的—, 132
 線形計画問題, 25
 確定的—, 132
 標準形の—, 122
 浅在化
 解の—, 16
 潜時, 2
 選択的最小ノルム解, 24
 選択的最小ノルム法, 16
 極表示 (の)—, 35
 直交表示 (の)—, 31
 絶対値ノルム, 16
 ゼロ・トレランス, 127
 前頭葉, 102
 相関行列
 雑音の—, 17
 時系列信号の—, 13
 双極子分布, 5
 —の平均位置, 52
 双極性分布, 8
 総自由度, 4, 5
 側副溝, 95
 体積電流, 4
 タイ・ブレイク, 35
 単一双極子, 6, 77
 —推定, 8

- モデル, 6
- 短期記憶走査, 77
- 単純類似度関数, 13
- 第1段階, 124
- 大振幅振動解, 22
- 第2段階, 124
- 脱分極
 - 心室筋の—, 63
 - 心房筋の—, 63
- チホノフの適切化, 17
- チャンネル数, 2
- 中心溝, 102
- 中心前溝, 102
- 超伝導量子干渉素子, 1
- 適切, 5
- 適切化パラメータ, 17
- 癲癇, 77
- 出る変数, 35, 123
- 電流双極子, 4
- 電流双極子モーメント, 4
 - の接線成分, 5
- 島, 95
- 等磁場線, 8
- 等磁場線図, 8
 - による推定, 8
- 頭頂間溝, 102
- 特異値, 15
- 特異値分解, 12
- 胴体モデル, 62
- 洞房結節, 64
- ネジ締め法, 12
- 脳溝, 94
- 脳磁図, 2
- 脳磁場, 77
- 脳波, 1
- 背景磁場, 47
- 肺磁図, 1
- 入る変数, 123
- 白質, 94
- パターン・マッチング, 13
- パラメータ探索法, 11
- 非基底変数, 24, 34, 123
- 皮質, 4, 8
- ビオ・サバールの法則, 6
- ピックアップ・コイル, 2
- ファントム, 54
 - 球状—, 54
- フーリエ変換法, 18
- 複数双極子, 9, 77
 - 推定, 9
 - モデル, 9
- 複数二重極
 - の診断, 62
- 不適切な問題, 5
- 不等式制約, 47
- フル・ランク行列, 24
- 分布双極子, 5
- ブローブ, 77
- ベースライン, 55
- ベースメーカー, 64
- 補助問題, 123
- 房室結節, 64
- ボルツマン・マシン, 13
- マグネトメータ, 55
- メッシュ点モデル, 19
- メモリセット, 77
- モンテカルロ・シミュレーション, 50

矢状断像, 38

優決定, 6

ランダム探索, 12

リードフィールド行列, 6

劣決定, 6

ローカル・ミニマム, 10

