

博士論文

伸張せん断エラスティカの研究

滝 敏美

2017年6月提出

本博士論文「伸張せん断エラスティカの研究」について、本論文の一部を近藤恭平教授との共著論文 2 編として日本航空宇宙学会に発表（下記）しているが、近藤恭平教授死亡のためインターネット公表の許諾が得られないため、第 2 章、第 3 章、第 6 章については除外している。

記

“Exact Three-Dimensional Elasticity Solution for Buckling of Beam of a Circular Cross-Section”, Toshimi TAKI, Kyohei KONDO

Transactions of the Japan Society for Aeronautical and Space Sciences, Vol. 60 (2017)
No. 1 p. 45-55

“Variational Principles of Extensible Shearable Elastica – Engesser’s Approach” ,
Toshimi TAKI, Kyohei KONDO

Transactions of the Japan Society for Aeronautical and Space Sciences, Vol. 60 (2017)
No. 5 p. 284-294

以上

伸張せん断エラスティカの研究

目次

図のリスト	v
表のリスト	viii
記号	ix
1 序論	1
1.1 せん断変形をする梁の圧縮座屈荷重の理論	1
1.1.1 せん断変形をする梁の圧縮座屈荷重に関する Timoshenko and Gere の記述	1
1.1.2 Engesser の理論と Haringx の理論の説明	3
1.1.3 圧縮座屈荷重計算式	5
1.1.4 Engesser の理論と Haringx の理論の論争	7
1.2 エラスティカの理論	11
1.2.1 これまでの研究	11
1.2.2 伸張せん断エラスティカの理論の必要性	12
1.3 研究課題	13
1.4 研究の目的	13
1.5 本論文の構成	14
2 伸張せん断エラスティカの変分原理	17
2.1 伸張せん断エラスティカの変分原理の基本方程式	17
2.1.1 伸張せん断エラスティカの変形, 歪および応力	17
2.1.2 伸張せん断エラスティカの仮想仕事の原理の一般的表示式	20
2.1.3 伸張せん断エラスティカのポテンシャルエネルギー停留の定理の一般的表示式	23
2.2 Engesser の理論による伸張せん断エラスティカの変分原理	23
2.2.1 Engesser の理論による伸張せん断エラスティカの仮想仕事の原理	23
2.2.2 Engesser の理論による伸張せん断エラスティカの仮想仕事の原理からの釣り合い式と境界条件の導出	26
2.2.3 Engesser の理論による伸張せん断エラスティカの構成方程式	28
2.2.4 Engesser の理論による伸張せん断エラスティカのポテンシャルエネルギー停留の定理	28
2.2.5 Engesser の理論による伸張せん断エラスティカの座屈方程式	29
2.2.6 Engesser の理論による伸張せん断エラスティカの座屈荷重	33
2.3 Timoshenko の理論による伸張せん断エラスティカの変分原理	38
2.3.1 Timoshenko の理論による伸張せん断エラスティカの仮想仕事の原理	38
2.3.2 Timoshenko の理論による伸張せん断エラスティカの仮想仕事の原理からの釣り合い式と境界条件の導出	40
2.3.3 Timoshenko の理論による伸張せん断エラスティカの構成方程式	42
2.3.4 Timoshenko の理論による伸張せん断エラスティカのポテンシャルエネルギー停留の定理	

.....	42
2.3.5 Timoshenko の理論による伸張せん断エラスティカの座屈方程式.....	43
2.3.6 Timoshenko の理論による伸張せん断エラスティカの座屈荷重.....	45
2.4 Haringx の理論による伸張せん断エラスティカの変分原理.....	50
2.4.1 Haringx の理論による伸張せん断エラスティカの仮想仕事の原理.....	50
2.4.2 Haringx の理論による伸張せん断エラスティカの仮想仕事の原理からの釣り合い式と境界条件の導出.....	51
2.4.3 Haringx の理論による伸張せん断エラスティカの構成方程式.....	54
2.4.4 Haringx の理論による伸張せん断エラスティカのポテンシャルエネルギー停留の定理..	54
2.4.5 Haringx の理論による伸張せん断エラスティカの座屈方程式.....	55
2.4.6 Haringx の理論による伸張せん断エラスティカの座屈荷重.....	56
2.5 伸張せん断エラスティカの変分原理のまとめ.....	62
3 伸張せん断エラスティカの有限要素法の定式化.....	65
3.1 Engesser の理論.....	65
3.1.1 非線形剛性方程式.....	65
3.1.2 非線形剛性方程式の解法.....	67
3.1.3 $\bar{\epsilon}_{x0}$, $\bar{\gamma}_{xz0}$, $-(\theta_0 - \gamma)$ からの変位 \mathbf{u}_0 の算出.....	69
3.1.4 釣り合い状態の安定性の判定と座屈方程式.....	69
3.2 Timoshenko の理論.....	74
3.2.1 非線形剛性方程式.....	74
3.2.2 非線形剛性方程式の解法.....	76
3.2.3 $\bar{\epsilon}_{x0}$, $\bar{\gamma}_{xz0}$, $-(\theta_0 - \gamma)$ からの変位 \mathbf{u}_0 の算出.....	77
3.2.4 釣り合い状態の安定性の判定と座屈方程式.....	78
3.3 Haringx の理論.....	82
3.3.1 非線形剛性方程式.....	82
3.3.2 非線形剛性方程式の解法.....	83
3.3.3 $\hat{\epsilon}_{x0}$, $\hat{\gamma}_{xz0}$, $-(\theta_0 - \gamma)$ からの変位 \mathbf{u}_0 の算出.....	84
3.3.4 釣り合い状態の安定性の判定と座屈方程式.....	85
3.4 有限要素法による変位解析プログラム.....	88
4 エネルギー法による伸張せん断エラスティカの直接解法の定式化.....	89
4.1 Engesser の理論の計算式.....	89
4.1.1 全体座標系での伸張剪断エラスティカの変形.....	89
4.1.2 要素座標系の定義.....	90
4.1.3 要素座標系での一般化歪と歪エネルギーの式.....	92
4.1.4 全ポテンシャルエネルギー停留の原理の適用.....	93
4.2 Timoshenko の理論の計算式.....	94
4.2.1 全体座標系での伸張剪断エラスティカの変形.....	94
4.2.2 要素座標系の定義.....	94

4.2.3	要素座標系での一般化歪と歪エネルギーの式	94
4.2.4	全ポテンシャルエネルギー停留の原理の適用	95
4.3	Haringx の理論の計算式	96
4.3.1	全体座標系での伸張剪断エラスティカの変形	96
4.3.2	要素座標系の定義	96
4.3.3	要素座標系での一般化歪と歪エネルギーの式	96
4.3.4	全ポテンシャルエネルギー停留の原理の適用	97
4.4	キルヒホッフの応力とグリーンの歪の間にフックの法則が成り立つ場合の計算式	98
4.4.1	構成方程式	98
4.4.2	伸張せん断エラスティカの歪エネルギー	98
4.4.3	要素の歪エネルギー	99
4.4.4	全ポテンシャルエネルギー停留の原理の適用	101
4.5	エネルギー法による直接解法の計算手順	102
5	端末圧縮荷重を受ける一定断面の片持ち梁の数値解析	103
5.1	有限要素法とエネルギー法による直接解法の比較	103
5.2	座屈荷重の解析式と数値解との比較	106
5.2.1	座屈荷重の求め方	106
5.2.2	座屈荷重の比較	106
5.3	座屈後変形	118
6	三次元弾性論による梁の座屈解析	127
6.1	解析対象	127
6.2	定式化	127
6.2.1	支配方程式	127
6.2.1.1	釣り合い式	128
6.2.1.2	歪-変位関係式	131
6.2.1.3	構成方程式	134
6.2.2	境界条件	136
6.2.3	座屈前方程式と座屈方程式	138
6.3	座屈解析	142
6.3.1	座屈前状態	142
6.3.2	座屈状態	144
6.3.2.1	第1群の解	148
6.3.2.2	第2群の解	150
6.3.2.3	座屈状態の解	151
6.3.2.4	座屈方程式	156
6.3.3	数値計算の方法	158
6.4	座屈荷重の数値計算	158
6.4.1	細長比の影響 – 等方性材料	159

目次

6.4.2	エラスティカの理論による座屈荷重との比較 – 細長比と異方性の影響	162
6.4.3	エラスティカの理論による座屈荷重との比較 – せん断剛性の影響	166
7	Laced Column の座屈解析	169
7.1	組立梁	169
7.2	解析対象	170
7.3	棒モデルと解析方法	170
7.4	比較に用いる解析モデル	171
7.5	解析結果	173
7.5.1	変形	173
7.5.1.1	公称応力と公称歪の間にフックの法則が成り立つ場合	173
7.5.1.2	キルヒホッフの応力とグリーンの歪の間にフックの法則が成り立つ場合	175
7.5.2	座屈荷重	177
7.6	考察	183
8	結論	187
	参考文献	189
	謝辞	193
付録 1	伸張せん断エラスティカの変位解析有限要素法 FORTRAN77 プログラム	195
A1.1	プログラムの使用法	195
A1.2	Engesser の理論による変位解析プログラムのソースリスト	197
A1.3	Timoshenko の理論による変位解析プログラムのソースリスト	210
A1.4	Haringx の理論による変位解析プログラムのソースリスト	222

図のリスト

図 1.1-1	圧縮荷重を受ける片持ち梁	1
図 1.1-2	Engesser の理論と Haringx の理論の座屈荷重の比較	2
図 1.1-3	梁の断面に作用する力の定義の違い	3
図 1.1-4	コイルばねの圧縮座屈荷重の実験値と理論値の比較	4
図 1.1-5	ゴム棒の圧縮座屈荷重の実験値と理論値の比較	4
図 1.1-6	組立梁の場合の Bažant 2003 の主張 – せん断剛性の定義のしかた	10
図 1.2-1	エラスティカ – 圧縮荷重が負荷される一端固定, 他端自由の直線梁	12
図 1.2-2	エラスティカの変形	12
図 1.5-1	本論文の構成	16
図 2.1-1	物体力と表面力が作用する二次元直線伸張せん断エラスティカ (変形前)	17
図 2.1-2	伸張せん断エラスティカの変形	19
図 2.1-3	集中外力と分布外力が作用する伸張せん断エラスティカ (変形後)	21
図 2.2-1	Engesser の理論の軸力とせん断力の方向	25
図 2.2-2	伸張せん断エラスティカの部分 ($0 \leq x' \leq x$) の力の釣り合い (Engesser の理論)	27
図 2.2-3	伸張せん断エラスティカの微小要素 dx のモーメントの釣り合い (Engesser の理論)	28
図 2.2-4	端末荷重 P を受ける片持ち伸張せん断エラスティカ	33
図 2.2-5	座屈荷重に対する軸剛性とせん断剛性の影響 – Engesser の理論	37
図 2.3-1	Timoshenko の理論の軸力とせん断力の方向	40
図 2.3-2	伸張せん断エラスティカの部分 ($0 \leq x' \leq x$) の力の釣り合い (Timoshenko の理論)	41
図 2.3-3	伸張せん断エラスティカの微小要素 dx のモーメントの釣り合い (Timoshenko の理論)	42
図 2.3-4	座屈荷重に対する軸剛性とせん断剛性の影響 – Timoshenko の理論	49
図 2.4-1	Haringx の理論の軸力とせん断力の方向	51
図 2.4-2	伸張せん断エラスティカの部分 ($0 \leq x' \leq x$) の力の釣り合い (Haringx の理論)	53
図 2.4-3	伸張せん断エラスティカの微小要素 dx のモーメントの釣り合い (Haringx の理論)	54
図 2.4-4	圧縮座屈荷重に対する軸剛性とせん断剛性の影響 – Haringx の理論	60
図 2.4-5	引張座屈荷重に対する軸剛性とせん断剛性の影響 – Haringx の理論	61
図 3.1-1	伸張せん断エラスティカの変形解析のための 2 節点要素 (Engesser の理論)	67
図 3.1-2	伸張せん断エラスティカの安定解析のための 2 節点要素 (Engesser の理論)	71
図 3.2-1	伸張せん断エラスティカの変形解析のための 2 節点要素 (Timoshenko の理論) ..	76
図 3.2-2	伸張せん断エラスティカの安定解析のための 2 節点要素 (Timoshenko の理論) ..	80
図 3.3-1	伸張せん断エラスティカの変形解析のための 2 節点要素 (Haringx の理論)	83
図 3.3-2	伸張せん断エラスティカの安定解析のための 2 節点要素 (Haringx の理論)	86

図のリスト

図 4.1-1	要素座標系	91
図 4.1-2	変形前後の要素	91
図 4.5-1	エネルギー法による直接解法の計算手順	102
図 5.1-1	端末圧縮荷重を受ける一定断面の片持ち梁	103
図 5.1-2	有限要素法のモデル	103
図 5.1-3	エネルギー法による直接解法のモデル	104
図 5.1-4	変形の解析結果の比較 – Engesser の理論	104
図 5.1-5	変形の解析結果の比較 – Timoshenko の理論	105
図 5.1-6	変形の解析結果の比較 – Haringx の理論	105
図 5.2-1	座屈荷重の求め方	106
図 5.2-2	座屈荷重の比較 – Engesser の理論	109
図 5.2-3	座屈荷重の比較 – Timoshenko の理論	111
図 5.2-4	圧縮座屈荷重の比較 – Haringx の理論	114
図 5.2-5	引張座屈荷重の比較 – Haringx の理論	115
図 5.2-6	圧縮座屈荷重の比較 – 宮崎の座屈計算式	117
図 5.3-1	伸張せん断エラスティカの荷重-変位線図 – Engesser の理論, ケース 1	119
図 5.3-2	伸張せん断エラスティカの変形 – Engesser の理論, ケース 1	119
図 5.3-3	伸張せん断エラスティカの変形 – Engesser の理論, ケース 1	120
図 5.3-4	伸張せん断エラスティカの荷重-変位線図 – Engesser の理論, ケース 2	120
図 5.3-5	伸張せん断エラスティカの変形 – Engesser の理論, ケース 2	121
図 5.3-6	伸張せん断エラスティカの変形 – Engesser の理論, ケース 2	122
図 5.3-7	伸張せん断エラスティカの荷重-変位線図 – Engesser の理論, ケース 3	122
図 5.3-8	伸張せん断エラスティカの変形 – Engesser の理論, ケース 3	123
図 5.3-9	伸張せん断エラスティカの変形 – Engesser の理論, ケース 3	123
図 5.3-10	伸張せん断エラスティカの荷重-変位線図 – Haringx の理論, ケース 1 (引張)	124
図 5.3-11	伸張せん断エラスティカの変形 – Haringx の理論, ケース 1 (引張)	124
図 5.3-12	伸張せん断エラスティカの変形 – Haringx の理論, ケース 1 (引張)	125
図 5.3-13	伸張せん断エラスティカの荷重-変位線図 – Haringx の理論, ケース 2 (引張)	125
図 5.3-14	伸張せん断エラスティカの変形 – Haringx の理論, ケース 2 (引張)	126
図 5.3-15	伸張せん断エラスティカの変形 – Haringx の理論, ケース 2 (引張)	126
図 6.1-1	圧縮荷重が負荷される円形断面の梁 (円筒座標系)	127
図 6.2-1	微小六面体要素の変形と応力ベクトル (円柱座標)	128
図 6.2-2	面内等方性材料	136
図 6.2-3	微小四面体要素の変形と応力ベクトル (円柱座標)	138
図 6.4-1	細長比の影響 – 等方性材料	160
図 6.4-2	二次元弾性論による梁の座屈解析のモデル	161

図 6.4-3	等方性材料の円形断面梁の座屈荷重の比較	165
図 6.4-4	異方性材料 1 (Glass/Epoxy) の円形断面梁の座屈荷重の比較	165
図 6.4-5	異方性材料 2 (Graphite/Epoxy) の円形断面梁の座屈荷重の比較	166
図 6.4-6	座屈荷重に対するせん断剛性の影響	168
図 7.1-1	組立梁の種類	169
図 7.2-1	解析対象 – Laced Column.....	170
図 7.5-1	Laced Column の荷重 - 変位解析結果の例	173
図 7.5-2	Laced Column の変形解析結果の例.....	174
図 7.5-3	Laced Column の荷重 - 変位解析結果の例	176
図 7.5-4	Laced Column の棒モデルによる座屈解析結果と他のモデルとの比較, せん断剛性の影響	180
図 7.5-5	Laced Column の棒モデルによる座屈解析結果と他のモデルとの比較, 軸剛性の影響	181
図 7.6-1	Attard 2011 のサンドイッチの解析モデル – Haringx の理論を適用.....	183
図 7.6-2	Engesser の理論と Haringx の理論の違いの解釈	185

表のリスト

表 1.1-1	Engesser の理論による梁の座屈荷重計算式.....	6
表 1.1-2	Timoshenko の理論による梁の座屈荷重計算式.....	6
表 1.1-3	Haringx の理論による梁の座屈荷重計算式.....	7
表 1.1-4	せん断剛性の低い梁の圧縮座屈に適用する理論に関する主張.....	9
表 5.2-1	座屈荷重の数値解の比較 – Engesser の理論.....	108
表 5.2-2	座屈荷重の数値解の比較 – Timoshenko の理論.....	110
表 5.2-3	圧縮座屈荷重の数値解の比較 – Haringx の理論.....	112
表 5.2-4	引張座屈荷重の数値解の比較 – Haringx の理論.....	113
表 5.2-5	圧縮座屈荷重の数値解の比較 – 宮崎の座屈荷重計算式とエネルギー法による直接解法.....	116
表 6.4-1	座屈荷重におよぼす細長比の影響.....	160
表 6.4-2	Kardomateas 1995 の座屈解析で使用した材料.....	163
表 6.4-3	等方性材料の円形断面梁の座屈荷重の比較.....	163
表 6.4-4	異方性材料 1 (Glass/Epoxy) の円形断面梁の座屈荷重の比較.....	164
表 6.4-5	異方性材料 2 (Graphite/Epoxy) の円形断面梁の座屈荷重の比較.....	164
表 6.4-6	座屈荷重に対するせん断剛性の影響.....	168
表 7.5-1	Laced Column の座屈荷重解析結果の比較, せん断剛性の影響.....	178
表 7.5-2	Laced Column の座屈荷重解析結果の比較, 軸剛性の影響.....	181
表 7.5-3	軸剛性とせん断剛性を考慮した梁の座屈の理論の評価 – 研究のまとめ.....	182

記号

記号

- a : 三次元弾性論による梁の座屈解析における円形断面梁の断面の半径
 A : 断面積
 A : 歪エネルギー関数
 A_b : Laced Column の横渡し材の断面積
 A_s : Laced Column の柱の断面積 (1 本分)
 A_d : Laced Column の斜め部材の断面積
 $\overset{\circ}{A}$: 変形前の梁の断面積
 b : Laced Column の柱の間隔
 C : コンプライアンスマトリックス
 $\overset{\circ}{C}$: 変形前の梁の断面の周囲
 d : Laced Column の横渡し材の間隔
 \mathbf{d} : 要素内の変位ベクトル
 \mathbf{D} : 弾性係数マトリックス
 \mathbf{E} : グリーンの歪テンソル
 $\mathbf{E}_{(i)}$: グリーンの歪テンソルのベクトル表示
 E_L, E_T : 直交異方性材料のヤング率, L 方向, T 方向
 EA : 梁の有効軸剛性
 EI : 梁の有効曲げ剛性
 f_{ij} : グリーンの歪
 $\overset{\circ}{\mathbf{f}}$: 変形前の単位体積あたりの物体力
 \mathbf{F} : 変形勾配テンソル
 $\mathbf{g}_x, \mathbf{g}_y, \mathbf{g}_z$: 変形前の基本ベクトル
 $\mathbf{G}_{x0}, \mathbf{G}_{z0}$: 変形後の軸線の基本ベクトル
 $\mathbf{G}^{x0}, \mathbf{G}^{z0}$: 変形後の軸線の反変基本ベクトル
 $\mathbf{G}_x, \mathbf{G}_z$: 軸線から離れた点の変形後の基本ベクトル
 $\mathbf{G}^x, \mathbf{G}^z$: 軸線から離れた点の変形後の反変基本ベクトル
 $\mathbf{G}_r, \mathbf{G}_\theta, \mathbf{G}_z$: 変形後の基本ベクトル (円筒座標系)
 GA : 梁の有効せん断剛性
 G_{LT}, G_{TT} : 直交異方性材料のせん断弾性係数, LT 面内, TT 面内
 I : 断面 2 次モーメント
 \mathbf{I} : 単位マトリックス
 $\mathbf{i}_r, \mathbf{i}_\theta, \mathbf{i}_z$: 変形前の基本ベクトル (円筒座標系)

記号

$I_1(z)$: 第1種変形ベッセル関数

$I_2(z)$: 第2種変形ベッセル関数

\mathbf{K} : 要素剛性マトリックス

l, m, n : 方向余弦

L : 三次元弾性論による梁の座屈解析における片持ち円形断面梁の長さ

l_0 : 片持ち梁の長さ (変形前)

k : 梁の断面のせん断剛性断面補正係数

m_y : 変形前の単位長さあたりに働く分布モーメント

\tilde{m}_y : 変形前の断面に働く集中モーメント

M : 梁の断面の曲げモーメント

\tilde{M}_y : Engesser の理論による梁の断面の曲げモーメント

\bar{M}_y : Timoshenko の理論による梁の断面の曲げモーメント

\hat{M}_y : Haringx の理論による梁の断面の曲げモーメント

\mathbf{n} : 単位法線ベクトル

$\overset{\circ}{n}_x$: 変形前の断面上の単位法線ベクトルの x 方向成分

N : 梁の断面の軸力

\tilde{N}_x : Engesser の理論による梁の断面の軸力

\bar{N}_x : Timoshenko の理論による梁の断面の軸力

\hat{N}_x : Haringx の理論による梁の断面の軸力

\mathbf{N} : 形状関数マトリックス

$-p$: 一様圧縮を受ける円形断面の梁の座屈前のキルヒホッフの応力

$\overset{\circ}{\mathbf{p}}$: 変形前の単位体積あたりの物体力

P : 梁に負荷される外荷重

P_{cr} : 梁の座屈荷重

P_E : オイラー座屈荷重

$P_E^{(n)}$: n 次のオイラー座屈荷重

P_E/EA : 梁の軸剛性パラメータ

P_E/GA : 梁のせん断剛性パラメータ

\mathbf{P} : 変形後の単位面積に働く応力ベクトル (三次元弾性論による梁の座屈解析)

\mathbf{q} : 変形前の単位長さあたりに働く外力 (エラスティカの理論)

\mathbf{q} : 変形後の単位体積に働く物体力ベクトル (三次元弾性論による梁の座屈解析)

$\tilde{\mathbf{q}}$: 集中荷重

Q : 梁の断面のせん断力

\tilde{Q}_z : Engesser の理論による梁の断面のせん断力

\bar{Q}_z : Timoshenko の理論による梁の断面のせん断力

\hat{Q}_z : Haringx の理論による梁の断面のせん断力

r : 円柱座標系の半径方向座標

- \mathbf{r} : 変形前の位置ベクトル
 \mathbf{R} : 変形後の位置ベクトル
 s^{ij} : キルヒホッフの応力
 S_U : 変位境界条件が与えられる境界
 S_F : 応力境界条件が与えられる境界
 \mathbf{T} : 変形後の表面に働く外力ベクトル
 \mathbf{t}_x° : 変形後の断面 $x=x$ における応力ベクトル
 u, v, w : 変位
 \mathbf{u} : 変位ベクトル
 U : 歪エネルギー
 \mathbf{v}_i : 固有ベクトル
 W_e : 外部仕事
 W_i : 内部仕事
 \mathbf{X} : 節点力ベクトル
 x_e, z_e : 変形前の要素座標
 z : 円柱座標系の高さ方向座標
 γ : 変形後の断面せん断変形の角度
 $\tilde{\gamma}_{x0}$: Engesser の理論による梁のせん断歪
 $\bar{\gamma}_{x0}$: Timoshenko の理論による梁のせん断歪
 $\hat{\gamma}_{x0}$: Haringx の理論による梁のせん断歪
 δ : 節点変位ベクトル
 ε_{x0} : 梁の軸歪
 $\tilde{\varepsilon}_{x0}$: Engesser の理論による梁の軸歪
 $\bar{\varepsilon}_{x0}$: Timoshenko の理論による梁の軸歪
 $\hat{\varepsilon}_{x0}$: Haringx の理論による梁の軸歪
 $\boldsymbol{\varepsilon}$: 要素の歪ベクトル
 θ : 円柱座標系の周方向座標 (角度)
 θ_0 : 変形後の軸線の傾き
 ϕ_e : 変形後の要素座標系の傾き
 ϕ_d : Laced Column の斜め部材の角度
 κ_y : 変形後の軸線の曲率
 $\tilde{\kappa}_y$: Engesser の理論による梁の曲率
 $\bar{\kappa}_y$: Timoshenko の理論による梁の曲率
 $\hat{\kappa}_y$: Haringx の理論による梁の曲率
 $\nu_{LT}, \nu_{TL}, \nu_{TT}$: 直交異方性材料のポアソン比
 λ_i : 固有値

記号

- ρ : 断面の回転半径
 $\bar{\sigma}^{xx}, \bar{\sigma}^{xz}$: Engesser の理論による梁の断面の応力
 $\bar{\sigma}^{xx}, \bar{\sigma}^{xz}$: Timoshenko の理論による梁の断面の応力
 $\hat{\sigma}^{xx}, \hat{\sigma}^{xz}$: Haringx の理論による梁の断面の応力
 Σ : キルヒホッフの応力テンソル
 $\Sigma_{(i)}$: キルヒホッフの応力テンソルのベクトル表示
 Π : ポテンシャルエネルギー
 ξ_e, ς_e : 変形後の要素座標

添え字

- 0 : 軸線上の点, 変形前
e : 要素
E : オイラー
En : Engesser の理論
H : Haringx の理論
L : 弾性主軸方向
KG : キルヒホッフの応力とグリーンの歪の間にフックの法則が成り立つ場合
KT : 本研究の三次元弾性論による座屈荷重厳密解
n : 梁の座屈の半波数
T : Timoshenko の理論
T : 弾性主軸と直角方向

1 序論

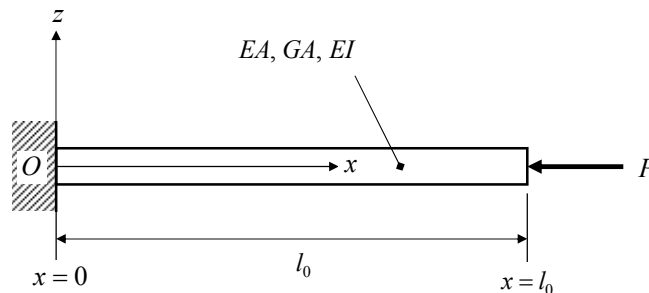
真っ直ぐな梁の端部に軸方向の圧縮荷重を負荷していくと、荷重が小さいうちは軸方向に縮むだけであるが、ある限界荷重（座屈荷重）に達すると、真っ直ぐなままでいられなくなり、梁が曲がってしまう。この現象が梁の座屈であり、梁の圧縮座屈後の変形を取り扱う理論がエラスティカの理論である。エラスティカの理論は、梁が弾性範囲内にあるとし、軸方向の伸び変形（縮み）および、軸に垂直方向のせん断変形が無いと仮定して構築された厳密な理論である。梁の長さに対して断面が小さい場合にはこの仮定が成り立つ。しかし、厳密に言えば、実際の梁では伸び変形とせん断変形も生じる。特に、サンドイッチ梁や組立梁では、曲げ剛性に比べてせん断剛性が低い場合、せん断変形の影響を無視することができなくなる。

梁の圧縮座屈と座屈後の変形についてはこれまでに多くの研究が行われており、すでに研究しつくされたように思えるが、以下に説明するように研究課題が残っている。

本章では、伸び変形とせん断変形をする梁の圧縮座屈荷重の理論とエラスティカの理論の現状について説明し、研究課題を明らかにする。この研究課題を受けて、本研究の目的を示し、論文の構成について説明する。

1.1 せん断変形をする梁の圧縮座屈荷重の理論

せん断変形をする梁（柱）の圧縮座屈荷重の理論の概要を説明し、研究課題を示す。本研究では図 1.1-1 に示す片持ち梁の弾性圧縮座屈を取り扱う。



ここで、 EA : 梁の有効軸剛性、 GA : 梁の有効せん断剛性、 EI : 梁の有効曲げ剛性

図 1.1-1 圧縮荷重を受ける片持ち梁

1.1.1 せん断変形をする梁の圧縮座屈荷重に関する Timoshenko and Gere の記述

せん断変形をする梁では圧縮座屈荷重がオイラー座屈荷重に比べて低下するが、その座屈荷重の理論には Engesser の理論と Haringx の理論の 2 種類があり、どちらの理論が妥当であるかという論争が続いている。

論争の発端となったのは Timoshenko and Gere 1961 の 2.17. The Effect of Shearing Force on the Critical Load の記述である。この本では、Engesser の理論を説明したあとで、Modified Theory として Haringx の理論を説明している。抜粋を以下に示す。

1 序論

The difference in the results obtained from Eqs. (2-57) and (2-59) are negligible for solid columns. However, for cases in which the effect of shear is unusually large, as in the buckling of helical springs, Eq. (2-59) may be more accurate, although Eq. (2-57) is more on the safe side. For a column with hinged ends Eq. (2-59) can be used, provided P_E is taken as the Euler critical load for a bar with hinged ends. A graph of Eqs. (2-57) and (2.59) is given in Fig.2-54 for comparison.

$$\text{Engesser の理論} : P_{cr} = \frac{P_E}{1 + \frac{P_E}{GA}} \quad \text{原著の Eq.(2.57)} \quad (1.1-1)$$

$$\text{Haringx の理論} : P_{cr} = \frac{\sqrt{1 + \frac{4P_E}{GA}} - 1}{\frac{2}{GA}} \quad \text{原著の Eq.(2.59)} \quad (1.1-2)$$

$$\text{ここで, } P_E = \frac{\pi^2 EI}{4l_0^2} : \text{オイラー座屈荷重} \quad (1.1-3)$$

P_{cr} : せん断変形を考慮した圧縮座屈荷重

l_0 : 一端固定, 他端自由の梁の長さ

EI : 梁の有効曲げ剛性

EA : 梁の有効軸剛性

GA : 梁の有効せん断剛性

図 1.1-2 に上の2つの式の比較を示す。横軸にせん断剛性パラメータ P_E/GA をとり, 縦軸に座屈荷重とオイラー座屈荷重の比 P_{cr}/P_E をとった。

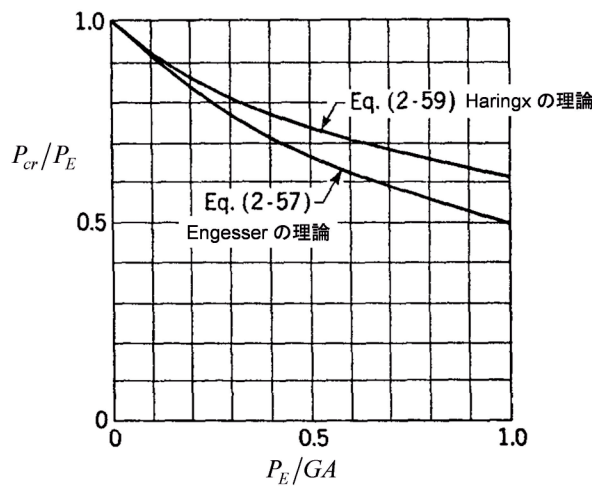


FIG. 2-54

図 1.1-2 Engesser の理論と Haringx の理論の座屈荷重の比較

この記述からわかるように、Timoshenko and Gere 1961 は実用的には梁の座屈に Engesser の理論を適用することを勧めているが、理論的には Haringx の理論のほうを支持しているように読み取ることができる。この記述が発端となって、1.1.4 項で説明するように、Engesser の理論と Haringx の理論のどちらが正しいかという論争が続いてきた。

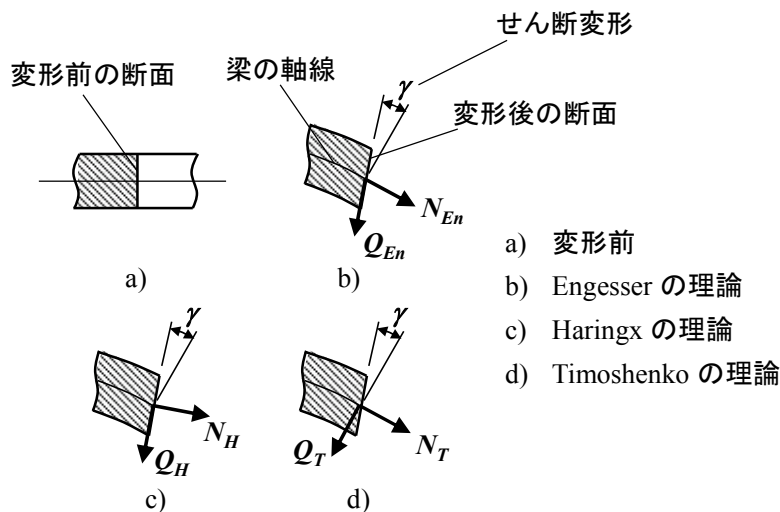
1.1.2 Engesser の理論と Haringx の理論の説明

Engesser の理論 (Standard Theory ともいう) と Haringx の理論 (Modified Theory ともいう) の違いは、変形後の梁に働く軸力の方向をどうとるかによる (図 1.1-3 参照)。Engesser の理論では、変形後の梁に働く軸力 N_{En} の向きを梁の軸線方向にとる。Haringx の理論では、変形後の梁に働く軸力 N_H の向きを梁の断面 (変形前に軸線に垂直な面の変形後の面) に垂直にとる。せん断力 Q の方向は両理論とも、変形後の断面に平行にとる。Engesser の理論の変形版として、せん断力の方向を軸力方向に垂直にとる理論があり、これを Timoshenko の理論と呼ぶ (Atanackovic 1997)。

Haringx の理論は、もともとコイルばねやゴムの棒の圧縮座屈に対して作られた理論である。コイルばねやゴムの棒の剛性は非常に低く、圧縮座屈にせん断変形の影響が大きく表れる。この理論はコイルばねやゴムの棒に対して成り立つことが実験的に確かめられている (図 1.1-4, 図 1.1-5)。

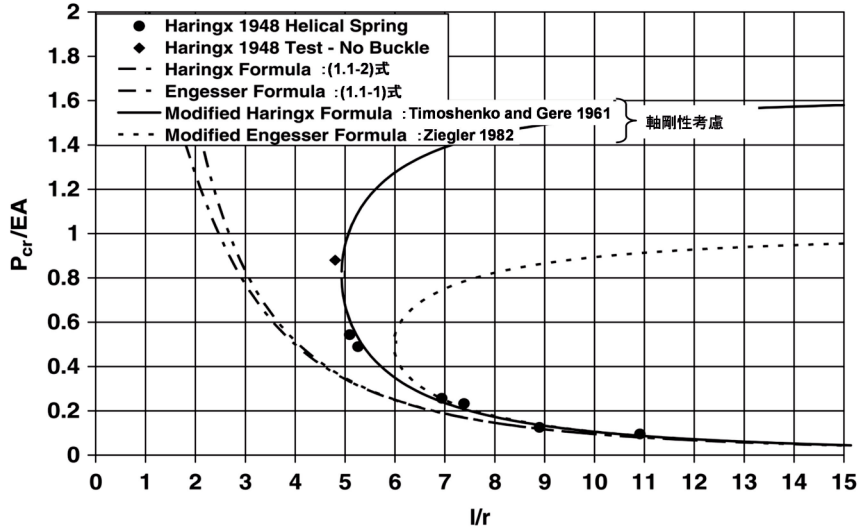
Engesser の理論は、組立梁やサンドイッチ梁のように、せん断剛性の低い梁の圧縮座屈に用いるために作られた。組立梁やサンドイッチ梁の設計には Engesser の理論による座屈荷重の式が使われている。Timoshenko の理論は Atanackovic が分類に使ってはいるが、一般的にはあまり知られていない。

実用的な意味はともかくとして、このような基本的な問題が解決されずに残っているということで、Engesser 理論と Haringx 理論の論争は理論的には興味深い。



Atanackovic 1997 による

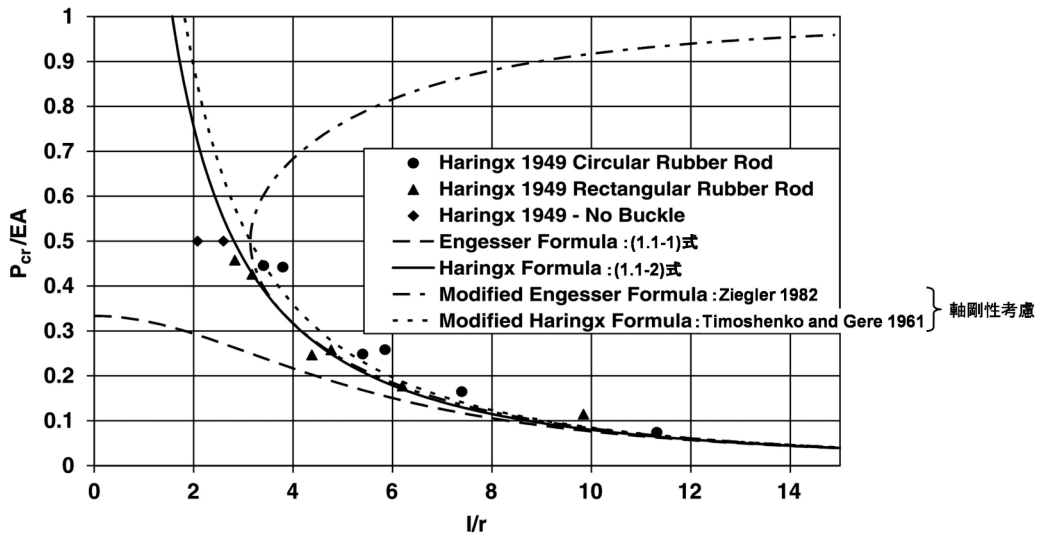
図 1.1-3 梁の断面に作用する力の定義の違い



横軸 l/r はコイルばねの細長比

Attard and Hunt 2008a

図 1.1-4 コイルばねの圧縮座屈荷重の実験値と理論値の比較



横軸 l/r はゴム棒の細長比

Attard and Hunt 2008a

図 1.1-5 ゴム棒の圧縮座屈荷重の実験値と理論値の比較

1.1.3 圧縮座屈荷重計算式

Engesser の理論, Timoshenko の理論, Haringx の理論による圧縮座屈荷重計算式を表 1.1-1, 表 1.1-2, 表 1.1-3 にまとめた. 圧縮座屈荷重計算式の重要なパラメータは, 軸剛性パラメータ P_E/EA とせん断剛性パラメータ P_E/GA である. 軸剛性パラメータはオイラー座屈荷重が負荷されたときの軸歪を表す.

Engesser の理論と Haringx の理論の大きな違いは, せん断剛性が非常に小さいときの座屈荷重に表れる. このとき, (1.1-4)式に示すように Engesser の式では, 座屈荷重はせん断剛性に比例し, 曲げ剛性にはよらない. したがって, 曲げ剛性がいくら大きくても座屈する. この式はサンドイッチ梁の Shear Crimp 破壊の式である. Haringx の式 ((1.1-5)式) では, 曲げ剛性が無限大になれば座屈しないことになる.

$$\text{Engesser : } P_{En} = \frac{P_E}{1 + \frac{P_E}{GA}} = \frac{1}{\frac{1}{P_E} + \frac{1}{GA}} \cong GA \quad (1.1-4)$$

$$\text{Haringx : } P_H = \frac{P_E \left(\sqrt{1 + \frac{4P_E}{GA}} - 1 \right)}{\frac{2P_E}{GA}} = \frac{\sqrt{1 + \frac{4P_E}{GA}} - 1}{\frac{2}{GA}} = \frac{\sqrt{(GA)^2 + 4GAP_E} - 1}{2} \cong \sqrt{GAP_E} \quad (1.1-5)$$

ここで, P_E : オイラー座屈荷重,

P_{En} : Engesser の座屈荷重, P_H : Haringx の座屈荷重

EA : 等価軸剛性, GA : 等価せん断剛性

Engesser の理論による圧縮座屈荷重の式については, 軸剛性を考慮した場合について 3 種類の式が発表されている (表 1.1-1). 宮崎 2012 の式は, Timoshenko 梁の断面のキルヒホッフの応力とグリーンの歪の間にフックの法則が成り立つと仮定したときの座屈荷重の式を, 断面のキルヒホッフの応力を積分して求めたものである.

Timoshenko の理論による圧縮座屈荷重の式についても, 軸剛性を考慮した場合について 2 種類の式が発表されている (表 1.1-2). これらの式の違いについて検討する必要がある.

Haringx の理論については, 軸剛性を考慮した圧縮座屈荷重の式はどの研究者も同じ式を導き出している (表 1.1-3).

1 序論

表 1.1-1 Engesser の理論による梁の座屈荷重計算式

圧縮座屈荷重計算式	出典	備考
$\frac{P_{En}}{P_E} = \frac{1}{1 + \frac{P_E}{GA}}$	Timoshenko and Gere 1961	軸剛性を考慮していない。
$\left(\frac{P_E}{EA}\right)^2 \left(\frac{P_{En}}{P_E}\right)^3 - 2\left(\frac{P_E}{EA}\right)\left(\frac{P_{En}}{P_E}\right)^2 + \left(1 + \frac{P_E}{EA} + \frac{P_E}{GA}\right)\left(\frac{P_{En}}{P_E}\right) - 1 = 0$	Iwakura and Kuranishi 1984	軸剛性を考慮している。
$\left(\frac{P_E}{EA}\right)\left(\frac{P_{En}}{P_E}\right)^2 - \left(1 + \frac{P_E}{GA}\right)\left(\frac{P_{En}}{P_E}\right) + 1 = 0$	Atanackovic 1997	軸剛性を考慮している。
$\frac{P_{En}}{P_E} = \frac{(1 + 3\varepsilon_t)\left(1 + \varepsilon_t - \frac{P_{En}}{P_E} \frac{P_E}{GA}\right)}{(1 + \varepsilon_t)^2}$ $\frac{P_{En}}{EA} = -\varepsilon_t(1 + \varepsilon_t)$	宮崎 2012	軸剛性を考慮している。 キルヒホッフの応力とグリーン の歪の間にフックの法 則を仮定。 式の中の ε_t は変数。

表 1.1-2 Timoshenko の理論による梁の座屈荷重計算式

圧縮座屈荷重計算式	出典	備考
$\frac{P_T}{P_E} = \frac{1}{1 + \frac{P_E}{GA}}$	Timoshenko and Gere 1961 Atanackovic 1997	軸剛性を考慮していな い。 Engesser の理論と同じ式 になる。
$\left(\frac{P_E}{EA}\right)\left(\frac{P_E}{GA}\right)\left(\frac{P_{En}}{P_E}\right)^3 - \left(\frac{P_E}{GA} - \frac{P_E}{EA}\right)\left(\frac{P_{En}}{P_E}\right)^2 - \left(\frac{P_{En}}{P_E}\right) + 1 = 0$	Huddleston 1972	軸剛性を考慮している。
$\frac{P_T}{P_E} = \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{4\frac{P_E}{EA}}{1 + \frac{P_E}{GA}}}}{2\frac{P_E}{EA}}$	Ziegler 1982	軸剛性を考慮している。 Ziegler の原論文では Engesser の理論とって いるが、Timoshenko の理 論である。

表 1.1-3 Haringx の理論による梁の座屈荷重計算式

圧縮座屈荷重計算式	出典	備考
$\frac{P_H}{P_E} = \frac{\pm \sqrt{1 + \frac{4P_E}{GA}} - 1}{\frac{2P_E}{GA}}$	Timoshenko and Gere 1961	軸剛性を考慮していない。
$\frac{P_H}{P_E} = \frac{\pm \sqrt{1 + 4 \left(\frac{P_E}{GA} - \frac{P_E}{EA} \right)} - 1}{2 \left(\frac{P_E}{GA} - \frac{P_E}{EA} \right)}$	Timoshenko and Gere 1961 Goto et al. 1990 Atanackovic 1997 Humer 2013	軸剛性を考慮している。 Timoshenko and Gere 1961 のコイルばねの式。

1.1.4 Engesser の理論と Haringx の理論の論争

せん断剛性の低い梁の圧縮座屈に関して、Engesser の理論と Haringx の理論のどちらが適切かについて、論争が続いてきた。論争の経緯を表 1.1-4 に示す。

Ziegler 1982 は梁の座屈には Engesser の理論が適切だとしている。ただし、Ziegler が導いた座屈荷重の式は Timoschnko の理論に基づいている。Blaauwendraad 2010 もサンドイッチ梁の圧縮座屈試験結果に Engesser の理論が合うとしている。

しかし、Kardomateas 1995 が三次元弾性論を使って片持ち円形断面梁の圧縮座屈を計算した結果、Engesser の式よりも Haringx の式に近い値が得られたと報告している。この結果は現在でも有効であるとみなされており、Attard は一貫して Haringx の理論が適切であると主張している。サンドイッチ梁の圧縮座屈の解析値を実験結果と比較し、Haringx の理論が適用できると主張している (Attard and Hunt 2008, Attard 2011)。なお、Chattopadhyay and Gu 1996 が二次元弾性論を使って梁の座屈荷重の厳密解を求めているが、Engesser の理論と Haringx の理論との比較には言及していない。

一方、Bažant 2003 は、Engesser の理論と Haringx の理論の違いは有限歪を使った構成方程式の定義のしかたにあり、両者は等価であると主張している。せん断剛性が軸応力に依存する場合に Engesser の理論になり、せん断剛性が軸応力に依存しない場合に Haringx の理論になると説明した。図 1.1-6 に組立梁の場合の説明を示す。右上の図が Engesser の理論で使うべきせん断剛性を示しており、せん断変形 γ によって上下方向の高さが低くならないように軸力部材を伸ばした ($\gamma/2$) 状態のせん断剛性を使う必要がある。Haringx の理論の場合には、右下の図に示すせん断剛性を使い、軸力に依存しない。したがって、軸力に依存しないせん断剛性を使う Haringx の理論を適用するのが適切であるとした。しかし、サンドイッチ梁の座屈試験結果がこの説明に合わないことがわかり、Bažant は組立梁、サンドイッチ梁、直交異方性材料の梁では Engesser の理論の方が適切であると訂正したが、両理論が等価であるという主張は変えていない (Bažant and Beghini 2004, 2005, Bažant and Beghini 2005b, Bažant and Beghini 2006)。

1 序論

このように、現在のところ Engesser の理論のほうが分がよいと考えられるが、Kardomateas 1995 の三次元弾性論の結果があるために、最終的な結論が出ていないと考えられる (Atanackovic 1997)。また、Timoshenko の理論と Engesser の理論の差は軸剛性が低い場合にしか表れないので実用的には問題にならないため、これまでの論争の中で Timoshenko の理論については言及されていない。したがって、Timoshenko の理論も含めて、どの理論を使うのが適切であるのかを明らかにする必要があると考える。

表 1.1-4 せん断剛性の低い梁の圧縮座屈に適用する理論に関する主張

出典	支持する理論	主張
Timoshenko and Gere 1961	Haringx	Engesser の理論のほうが安全側であるが, Haringx の理論のほうが正確であろう.
Ziegler 1982	Engesser	Engesser の理論を支持. (Ziegler が導出した軸剛性を考慮した座屈の式は Timoshenko の理論に基づく.)
Kardomateas 1995	Haringx	三次元弾性論を使った面内等方性円形断面梁の座屈解析結果が, Haringx の理論の座屈荷重のほうに近いと結論. (座屈前変形を無視した近似解である.)
Attard 2003	Haringx	Haringx の理論の方向の応力について構成方程式を立てて中実断面梁の座屈荷重の式を導出している.
Bazant 2003	両理論は等価	Engesser と Haringx の理論は有限歪とせん断弾性係数の定義のしかたを変えれば等価である. 組立梁のせん断剛性の定義を図 1.1-6 に示す. Engesser の理論ではせん断剛性が軸力に依存しなければならない. せん断弾性剛性が軸力によらない Haringx の理論が自然である.
Bazant and Beghini 2004, 2005	Engesser	サンドイッチ梁については Engesser の理論が合うと 2003 の結論を訂正.
Kardomateas and Simitse 2004	Haringx	ABAQUS を使ったサンドイッチ梁の解析結果が Haringx の理論と合う.
Bazant and Beghini 2005b	Engesser	サンドイッチ梁との類似から組立梁には Engesser の理論が合うと 2003 の結論を訂正.
Bazant and Beghini 2006	Engesser	直交異方性材料の梁の FEM 解析結果は Engesser の理論と合う.
Blaauwendraad 2010	Engesser	サンドイッチ梁の圧縮座屈試験結果は, 表板が厚いとして導いた Engesser の理論の式と合っている.
Kardomateas 2010	Engesser	サンドイッチ梁の座屈荷重の理論解が Engesser の理論と合っている.
Attard and Hunt 2008, Attard 2011	差なし	ひとつの材料の梁と考えると Haringx の理論は合わない. しかし, せん断剛性が低いサンドイッチ梁では Haringx と Engesser の理論に基づいて導出した座屈荷重の差はない.

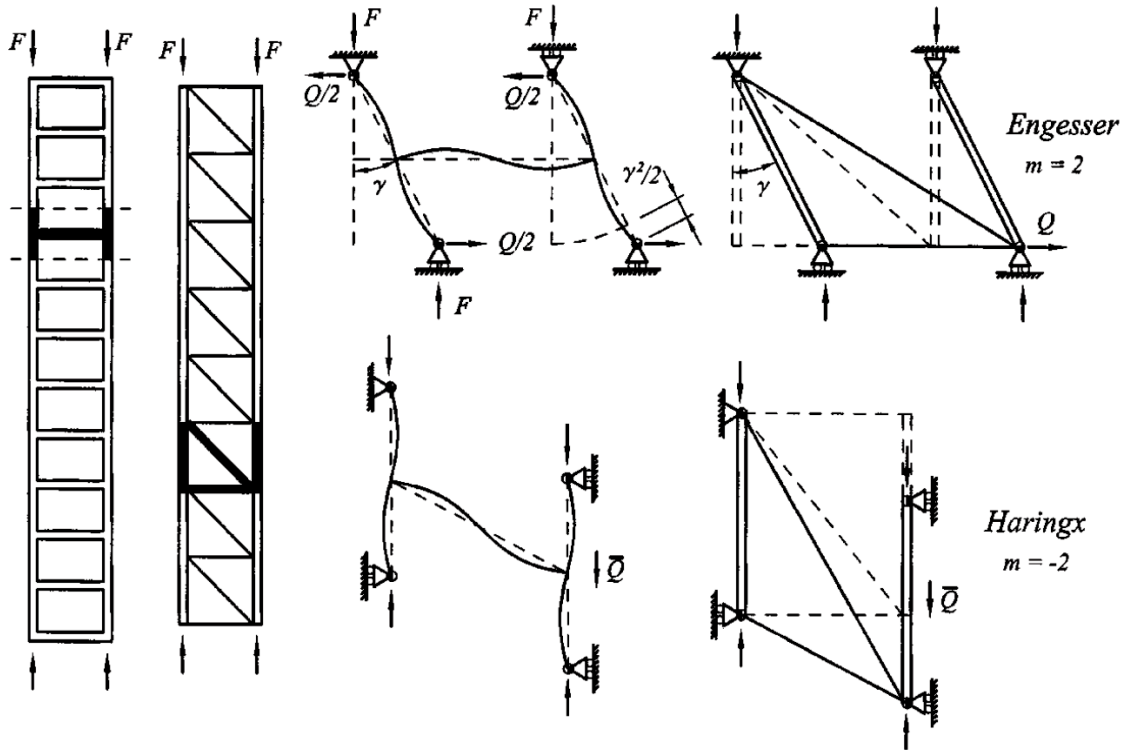


Fig. 5 Left: Column with battens and pin-jointed lattice column. Middle: Shearing of a cell of batten column. Right: Shearing of a cell of lattice column. Top: Shearing with second-order axial extension. Bottom: Shearing with no axial extension.

Bazant 2003 より

図 1.1-6 組立梁の場合の Bazant 2003 の主張 - せん断剛性の定義のしかた

1.2 エラスティカの理論

1.2.1 これまでの研究

エラスティカは圧縮力を受けて座屈した梁の大変形問題である（図 1.2-1, 図 1.2-2）。エラスティカでは軸線の伸びと断面のせん断変形は無視する。この問題の解は楕円積分で表される（Timoshenko and Gere 1961）。

軸線の伸びを考慮したエラスティカ（伸張エラスティカ）の解析を Magnusson et al. 2001 が行っている。Magnusson et al. は楕円積分を使って座屈後の変形を解析した。軸剛性が小さい場合

$$\left(\frac{P_E}{EA} \geq \frac{3}{16} = 0.1875\right) \text{ に飛び移り現象が起こることを見出した。}$$

軸線の伸びと断面のせん断変形を考慮したエラスティカ（伸張せん断エラスティカ）の解析は Huddleston 1972, Goto et al. 1990 と Humer 2013 が行っている。

Huddleston 1972 が用いている断面力は Timoshenko の理論であるが、座屈荷重の式は Ziegler 1982 の式とは異なっている（表 1.1-2）。軸剛性が無限大のときの座屈荷重の式は Timoshenko and Gere 1961 の式とは異なっており、せん断剛性が小さいときは数値的に Timoshenko and Gere の式とほぼ一致するが、せん断剛性が高くなると差が出てくる。Huddleston は座屈後の変形を数値計算で求めている。

Goto et al. 1990 が用いている断面力は Haringx の理論である。座屈荷重の式は Timoshenko and Gere 1961 のコイルばねの式と一致している（表 1.1-3）。Goto et al. は座屈後の変形を楕円積分で表した。

Humer 2013 が用いている断面力は Haringx の理論である。座屈荷重の式は Timoshenko and Gere 1961 のコイルばねの式と一致している（表 1.1-3）。Humer は座屈後の変形を楕円積分で表した。せん断変形を考慮した場合にも軸剛性が小さいと飛び移り現象が発生することを示した。

近藤 2004 は軸線が伸びないエラスティカの変分原理を導いた。断面力（曲げモーメント）とそれに対応する一般化歪（曲げ歪）の間に線形のフックの法則を仮定した。これを軸線が伸び縮みする梁に拡張して、近藤 2006 が伸張エラスティカの変分原理を導き、座屈荷重の式も導いた。断面力（軸力と曲げモーメント）とそれに対応する一般化歪（伸び歪と曲げ歪）の間に線形のフックの法則を仮定した。この伸張エラスティカの変分原理に基づいて蔵本・近藤 2006 が有限要素法の定式化を行い、伸張エラスティカの変形解析を行った。

以上に示したように、Engesser の理論を用いた伸張せん断エラスティカの理論と解析は無い。また、Engesser の理論、Timoshenko の理論、Haringx の理論に対して統一的に伸張せん断エラスティカの変分原理と座屈荷重の式を導いた文献も無い。

1 序論

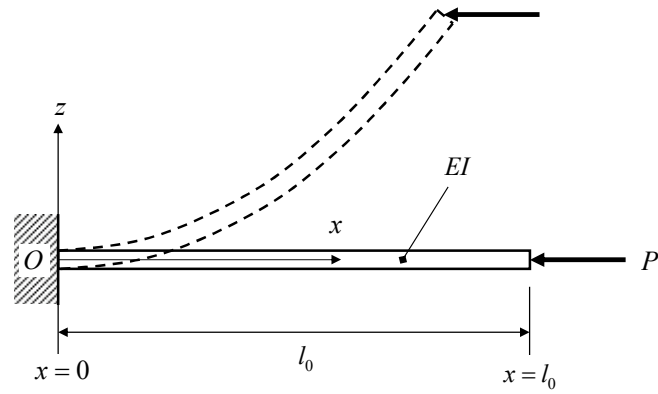
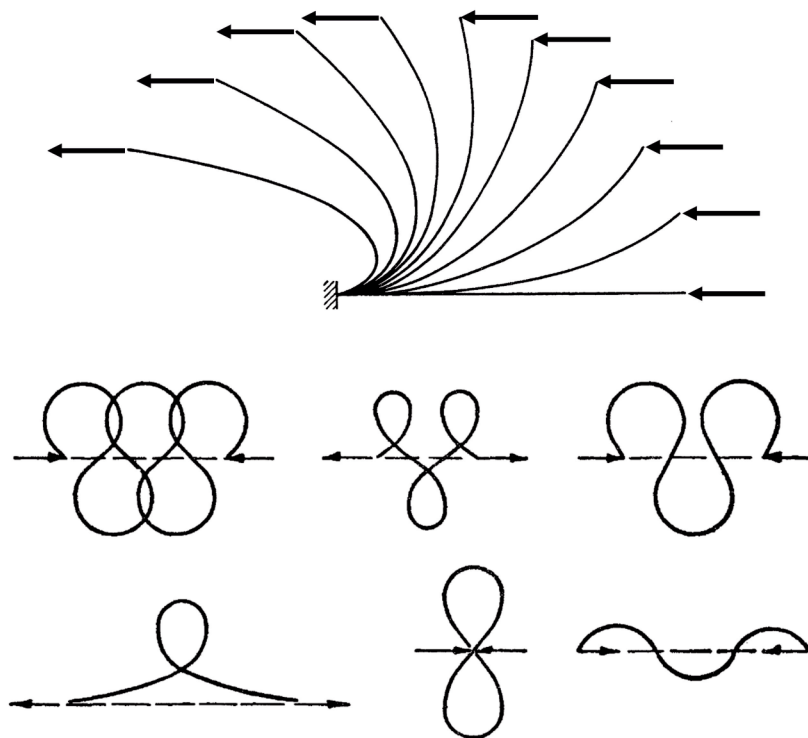


図 1.2-1 エラスティカ - 圧縮荷重が負荷される一端固定，他端自由の直線梁



Timoshenko and Gere 1961 より

図 1.2-2 エラスティカの変形

1.2.2 伸張せん断エラスティカの理論の必要性

伸張せん断エラスティカの理論や座屈荷重の式はこれまでに各種提案されているものの、次のような問題点がある。

- 軸剛性とせん断剛性を考慮した梁の厳密な座屈荷重の式を導くには、厳密な伸張せん断エラスティカの理論が必要である。座屈荷重の式に関して Engesser 対 Haringx 論争があり、

しかも同じ理論の中でも異なる座屈荷重の式があるということは、その基礎となる伸張せん断エラスティカの理論が確立していないということである。

- Engesser の理論に基づく伸張せん断エラスティカの理論は発表されていない。

したがって、Engesser, Timoshenko, Haringx の各理論に基づいた統一的な伸張せん断エラスティカの理論が必要であるといえる。

1.3 研究課題

以上に示した梁の座屈と座屈後挙動に関する理論の現状から、次のような研究課題があると考えられる。

- ① 軸剛性とせん断剛性を考慮したエラスティカの理論（伸張せん断エラスティカの理論）の構築
 - Engesser の理論，Timoshenko の理論，Haringx の理論の 3 種類の理論で，統一的な取扱いを行うことが必要
 - 発表されている座屈荷重計算式の妥当性の評価
 - 座屈荷重におよぼす梁の軸剛性，せん断剛性の影響の把握
 - 座屈後変形におよぼす梁の軸剛性，せん断剛性の影響の把握
- ② せん断剛性を考慮した梁の座屈計算式は 3 種類の理論のうちのどの理論が適切かを判断することが必要

1.4 研究の目的

本研究の主目的は、伸び変形とせん断変形を考慮した直線梁の圧縮座屈後の変形を解析する理論（以下「伸張せん断エラスティカの理論」という）を構築することである。曲げ変形だけを考慮した理論がエラスティカの理論で、変形の厳密解が得られている。梁の軸線の伸び（縮み）を考慮した理論（伸張エラスティカの理論）を近藤 2006 が導き、蔵本と近藤 2006 が座屈後変形を解析した。本研究は近藤と蔵本の研究をさらに進め、エラスティカにおいて伸び変形に加え、せん断変形も考慮するものである。適用する仮定を明確にし、変分原理を用いて理論を構築する。変分原理に基づいて、座屈荷重の式を得るとともに、座屈後変形を計算する 2 種類の解析方法（有限要素法とエネルギー法による直接解法）を導く。伸張せん断エラスティカの理論を使うと、せん断剛性の低い梁の圧縮座屈荷重の厳密な式を統一的に導出することができ、伸び変形とせん断変形が座屈荷重に与える影響を検討することができる。

第 2 の目的は、せん断変形を考慮した梁の座屈理論について考察することである。せん断変形をする梁の圧縮座屈の式は、梁の断面力のとり方によって 3 種類の理論（Engesser の理論，Timoshenko の理論，Haringx の理論）があり、どれが正しいかという論争が続いている。次の 3 つの方法を使ってせん断変形をする梁の圧縮座屈を検討し、この論争に決着をつける。

- ① 三次元弾性論による円形断面梁の圧縮座屈荷重の厳密解
- ② 軸力部材で構成される組立梁（Laced Column）の大変形解析

1 序論

③ 伸張せん断エラスティカの理論による座屈荷重の式

1.5 本論文の構成

本論文の構成を図 1.5-1 に示す。

第2章の「伸張せん断エラスティカの変分原理」では、近藤 2006 の伸張エラスティカの変分原理を拡張して、伸張せん断エラスティカの厳密な変分原理を導く。断面力のとり方は、Engesser の理論、Timoshenko の理論、Haringx の理論の3種類を使う。3種類の理論に関して統一的な定式化を行う。構成方程式として、断面力とそれと共役な一般化歪の間にフックの法則を仮定する。導出した変分原理に基づいて3種類の理論について厳密な座屈荷重計算式を導く。これらの座屈荷重計算式と他の研究者が導いた座屈荷重計算式を比較する。

第3章の「伸張せん断エラスティカの有限要素法」では、伸張せん断エラスティカの変形を解析する方法のひとつである有限要素法の定式化を行う。合わせて、有限要素法を使った座屈解析のための定式化も行う。これらの定式化は Engesser, Timoshenko, Haringx の3つの理論に対して行う。定式化に基づいて、変形解析の有限要素法プログラムを作成する。

第4章の「エネルギー法による伸張せん断エラスティカの直接解法」では、伸張せん断エラスティカの変形を解析するもうひとつの方法であるエネルギー法による直接解法について説明する。この方法は筆者が開発した方法で、汎用の表計算ソフト MS-Excel を使って解くことができるのが特徴である。エネルギー法による直接解法では、Engesser, Timoshenko, Haringx の理論の他に、キルヒホッフの応力とグリーンの歪の間にフックの法則が成り立つ場合も解析できる。

第5章の「端末圧縮荷重を受ける一定断面の片持ち梁の数値解析」では、有限要素法とエネルギー法による直接解法を使って端末圧縮荷重を受ける一定断面の片持ち梁の変形解析を行い、座屈荷重と座屈後変形に対するせん断剛性と軸剛性の影響を明らかにする。Engesser, Timoshenko, Haringx の理論、キルヒホッフの応力とグリーンの歪の間にフックの法則が成り立つ場合の4つの場合について解析を行って、それらの間の違いを把握する。軸剛性が低い場合に飛び移り現象があることを示す。Haringx の理論では引張荷重で座屈が発生し、安定な座屈後の変形状態が存在することを示す。

第6章の「三次元弾性論による梁の座屈解析」では、圧縮荷重を受ける円形断面の片持ち梁の座屈荷重を三次元弾性論で厳密に解析する。これは、Kardomateas 1995 の近似解を拡張した厳密解である。構成方程式として、キルヒホッフの応力とグリーンの歪の間にフックの法則を仮定する。Chattopadhyay and Gu 1996 の二次元弾性論による圧縮座屈荷重の厳密解と比較して、本論文の厳密解が妥当であることを確認する。この厳密解を、Kardomateas の近似解、第2章で導いた伸張せん断エラスティカ理論による座屈荷重計算式と比較して、Engesser, Timoshenko, Haringx の理論のうちどれが妥当かを検討する。

第7章の「Laced Column の座屈解析」では、せん断剛性が低い梁の代表として Laced Column を検討対象として選び、いろいろなせん断剛性と軸剛性の組み合わせに対して幾何学非線形解析を行って、座屈荷重を求める。これを伸張せん断エラスティカ理論による座屈荷重計算式と比較して、Engesser, Timoshenko, Haringx の理論のうちどれが妥当かを検討する。キルヒホッフの応力とグ

リーンの歪の間にフックの法則が成り立つ場合についても検討する.

第8章には本研究の結論を示す.

なお, 実際の材料でできた梁では, 材料強度の限界から軸剛性パラメータ P_E/EA が 0.02 以上で弾性範囲内であることはないが, 本研究では座屈荷重の式の理論的な妥当性を検討するために, P_E/EA が大きくなっても弾性を保つと仮定して議論を進めた. 本研究は純粋に理論的な研究であり, 現実にはありえない P_E/EA の範囲まで取り扱っている.

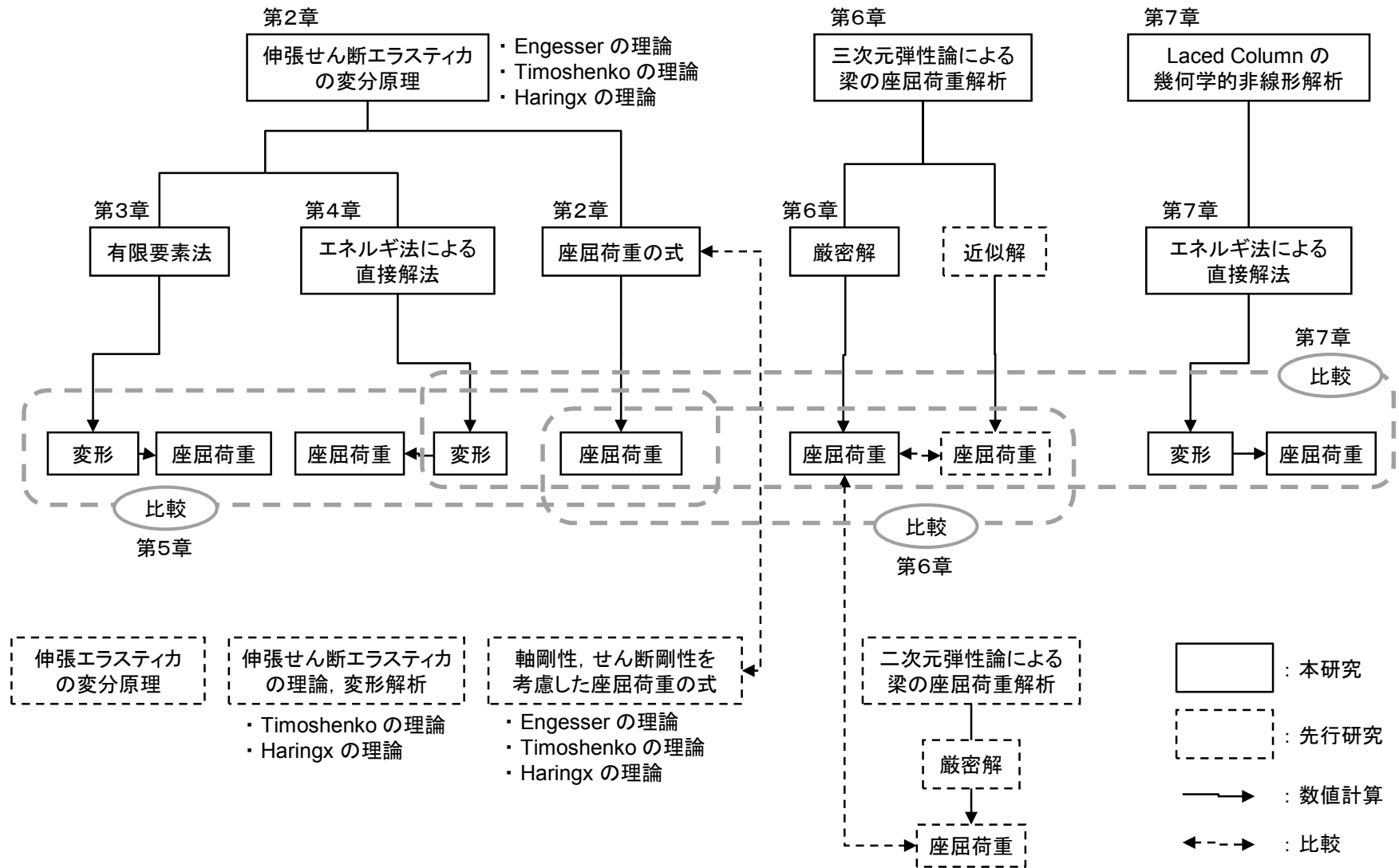


図 1.5-1 本論文の構成

4 エネルギー法による伸張せん断エラスティカの直接解法の定式化

ポテンシャルエネルギー停留の原理を適用して、全ポテンシャルエネルギーを停留させる変形状態を直接に求める方法である。数値計算には表計算ソフト (MS-Excel) の最適化機能である「ソルバー」を使用する。梁を要素に分割し、要素変位を仮定し、MS-Excel で仮定した変位に対する全ポテンシャルエネルギーを計算する。「ソルバー」を使うことにより、全ポテンシャルエネルギーを最小にする変位を求めることができる。この方法は変数が少ない場合に構造解析に広く適用できる方法である (滝 2008)。なお、本章の 4.4 項以外は滝 2009, 滝 2010, 滝 2011 によっている。

4.1 Engesser の理論の計算式

4.1.1 全体座標系での伸張剪断エラスティカの変形

変形前に直線だった梁の変形後の軸線の方向の基本ベクトルは(2.1-6.1)式より

$$\mathbf{G}_{x0}(x) = \frac{\partial \mathbf{R}_0(x)}{\partial x} = \sqrt{G_{xx0}} (\cos \theta_0 \mathbf{g}_x + \sin \theta_0 \mathbf{g}_z) \quad (4.1-1)$$

である。

また、図 2.1-2 を参照して、(2.1-4)式と(2.1-1)式から

$$\mathbf{R}_0(x) = \mathbf{r}_0(x) + \mathbf{u}_0(x) = x\mathbf{g}_x + \mathbf{u}_0(x) = x\mathbf{g}_x + u(x)\mathbf{g}_x + w(x)\mathbf{g}_z \quad (4.1-2)$$

ここで、 u 、 w は軸線の x 方向と z 方向の変位であり、 x のみの関数である。

この式を x で偏微分すると

$$\frac{\partial \mathbf{R}_0(x)}{\partial x} = \mathbf{g}_x + \frac{du}{dx} \mathbf{g}_x + \frac{dw}{dx} \mathbf{g}_z = (1+u')\mathbf{g}_x + w'\mathbf{g}_z \quad (4.1-3)$$

(4.1-1)式と(4.1-3)式を比較すると、 $\sqrt{G_{xx0}}$ 、 $\cos \theta_0$ 、 $\sin \theta_0$ を変位 u 、 w の微分で表現でき、次の式が得られる。

$$\begin{aligned} \sqrt{G_{xx0}} &= \sqrt{(1+u')^2 + w'^2} \\ \cos \theta_0 &= \frac{1+u'}{\sqrt{(1+u')^2 + w'^2}} \\ \sin \theta_0 &= \frac{w'}{\sqrt{(1+u')^2 + w'^2}} \end{aligned} \quad (4.1-4)$$

(4.1-4.3)式を x で微分すると

$$\frac{d}{dx}(\sin \theta_0) = \theta_0' \cos \theta_0 = -\left[(1+u')^2 + w'^2\right]^{\frac{3}{2}} [(1+u')u'' + w'w''] w' + w'' \left[(1+u')^2 + w'^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

この式に(4.1-4.2)式を代入して整理すると

$$\begin{aligned} \theta_0' (1+u') &= -\left[(1+u')^2 + w'^2\right]^{-1} [(1+u')u'' + w'w''] w' + w'' \\ &= \frac{-(1+u')u''w' - w'^2w'' + (1+u')^2w'' + w'^2w''}{(1+u')^2 + w'^2} \\ &= \frac{-(1+u')u''w' + (1+u')^2w''}{(1+u')^2 + w'^2} \end{aligned}$$

θ_0' を求めると次の式が得られる。

4 エネルギー法による伸張せん断エラスティカの直接解法の定式化

$$\theta_0' = \frac{(1+u')w'' - u''w'}{(1+u')^2 + w'^2} \quad (4.1-5)$$

Engesser の理論による一般化歪は(2.2-6)式で表されるので、(2.2-6)式に(4.1-4)式を代入して

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_{x0} &= \sqrt{(1+u')^2 + w'^2} - 1 \\ \tilde{\kappa}_y &= -(\theta_0 - \gamma)' \\ \tilde{\gamma}_{xz0} &= \sqrt{(1+u')^2 + w'^2} \sin \gamma \end{aligned} \quad (4.1-6)$$

以上の式は全体座標系での厳密な式である。

断面に働く力 \tilde{N}_x , \tilde{M}_y , \tilde{Q}_z と一般化歪の関係は(2.2-16)式である。

$$\tilde{N}_x = EA\tilde{\varepsilon}_{x0}, \quad \tilde{Q}_z = GA\tilde{\gamma}_{xz0}, \quad \tilde{M}_y = EI\tilde{\kappa}_y = -EI(\theta_0 - \gamma)' \quad (2.2-16)$$

歪エネルギーは(2.2-19)式である。

$$U_{En} = \int_0^{l_0} \left[\frac{1}{2} EA(\tilde{\varepsilon}_{x0})^2 + \frac{1}{2} GA(\tilde{\gamma}_{xz0})^2 + \frac{1}{2} EI \left\{ (\theta_0 - \gamma)' \right\}^2 \right] dx \quad (2.2-19)$$

4.1.2 要素座標系の定義

変形前の長さ L_e の要素を考え、節点 1 を原点とし、節点 2 の方向に x_e 軸をとる要素座標系 Ox_ez_e を考える。変形後の要素に関して節点 1 を原点とし、節点 2 の方向に ξ_e をとる要素座標系 $O\xi_e\zeta_e$ を考える (図 4.1-1)。変形前の要素座標系を移動・回転させて変形後の要素座標系と重ねる (図 4.1-2)。このとき、変形前と変形後の関係式は以下のようなになる。

$$\begin{aligned} \phi_e &= \tan^{-1} \frac{w_2 - w_1}{x_2 + u_2 - x_1 - u_1} \\ \theta_{0e} &= \theta_0 - \phi_e \\ \gamma_e &= \gamma \\ \Lambda_e &= \sqrt{(x_2 + u_2 - x_1 - u_1)^2 + (w_2 - w_1)^2} \\ \xi_e &= \{x + u(x) - x_1 - u_1\} \cos \phi_e + \{w(x) - w_1\} \sin \phi_e \\ \zeta_e &= -\{x + u(x) - x_1 - u_1\} \sin \phi_e + \{w(x) - w_1\} \cos \phi_e \\ u_e &= \xi_e - x_e \\ w_e &= \zeta_e \end{aligned} \quad (4.1-7)$$

$u_{e1} = w_{e1} = w_{e2} = 0$ であることに注意されたい。

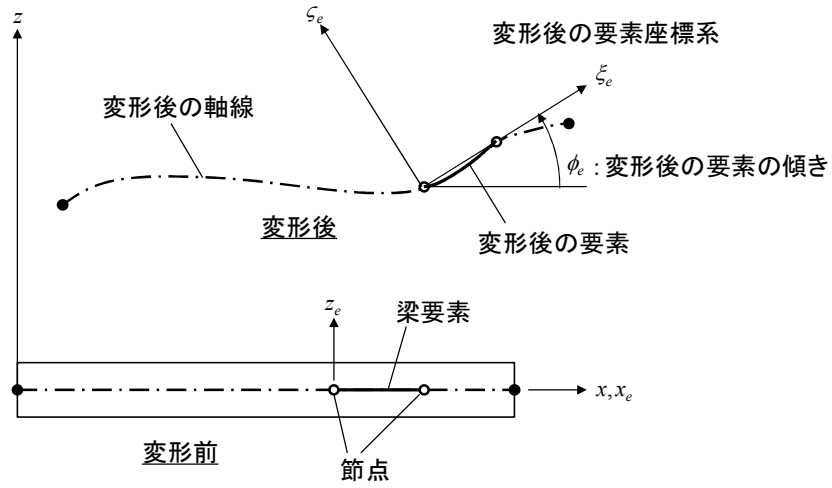


図 4.1-1 要素座標系

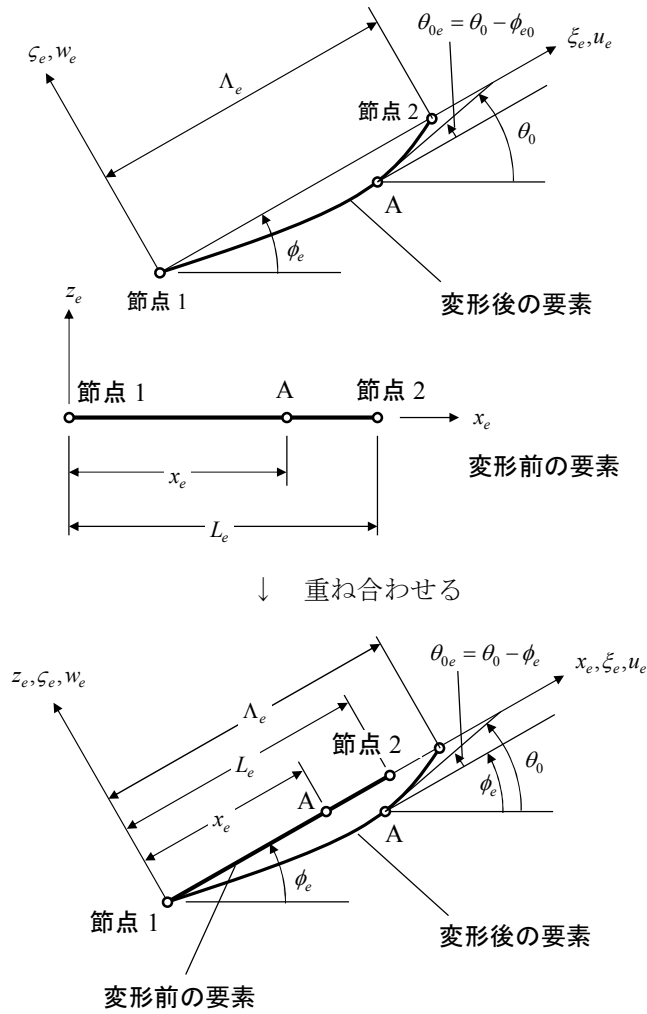


図 4.1-2 変形前後の要素

4 エネルギー法による伸張せん断エラスティカの直接解法の定式化

4.1.3 要素座標系での一般化歪と歪エネルギーの式

(1) 要素内変位の内挿

図 4.1-2 において, 変形から一般化歪の式を導く. 要素座標系で考えると, u_e と γ_e は大きい変位で, w_e は微小変位であるので, $w'_e \ll 1$ として(4.1-6)式は次のように簡略化できる.

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon}_{x0e} &= \sqrt{(1+u'_e)^2 + w_e'^2} - 1 \cong \sqrt{(1+u'_e)^2} - 1 \\ &= u'_e \\ \bar{\gamma}_{xz0e} &= \sqrt{(1+u'_e)^2 + w_e'^2} \sin \gamma_e \cong \sqrt{(1+u'_e)^2} \sin \gamma_e \\ &= (1+u'_e) \sin \gamma_e\end{aligned}\quad (4.1-8)$$

(4.1-4)式に $\theta_{0e} \ll 1$ を適用すると θ_{0e} の式は

$$\theta_{0e} \cong \sin \theta_{0e} = \frac{w_e'}{\sqrt{(1+u_e')^2 + (w_e')^2}} \cong \frac{w_e'}{1+u_e'} \quad (4.1-9)$$

(4.1-5)式に $w'_e \ll 1$ を適用すると θ_{0e}' の式は

$$\theta_{0e}' = \frac{(1+u_e')w_e'' - u_e''w_e'}{(1+u_e')^2 + (w_e')^2} \cong \frac{w_e''}{1+u_e'} \quad (4.1-10)$$

となる.

要素内変位を, 節点変位パラメータを使って次のように内挿する. 変位 w_e については節点変位 w_{e1} , w_{e2} と軸線の傾き w_{e1}' , w_{e2}' によりエルミート多項式を使って内挿する. 変位 u_e とせん断変形による断面の傾き γ_e は節点変位の 1 次式で内挿する. $u_{e1} = w_{e1} = w_{e2} = 0$ だから要素内の変位は次のように表される.

$$\begin{pmatrix} u_e \\ w_e \\ \gamma_e \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x_e}{L_e} & 0 & 0 & \frac{x_e}{L_e} & 0 & 0 \\ 0 & x_e - 2\frac{x_e^2}{L_e} + \frac{x_e^3}{L_e^2} & 0 & 0 & -\frac{x_e^2}{L_e} + \frac{x_e^3}{L_e^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{x_e}{L_e} & 0 & 0 & \frac{x_e}{L_e} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ w_{e1}' \\ \gamma_{e1} \\ u_{e2}' \\ w_{e2}' \\ \gamma_{e2}' \end{pmatrix} \quad (4.1-11)$$

(4.1-11)式を x_e で微分すると

$$\begin{aligned}u_e' &= \frac{u_{e2}}{L_e} \\ w_e' &= \left(1 - 4\frac{x_e}{L_e} + 3\frac{x_e^2}{L_e^2}\right)w_{e1}' + \left(-2\frac{x_e}{L_e} + 3\frac{x_e^2}{L_e^2}\right)w_{e2}' \\ \gamma_e' &= \frac{\gamma_{e2} - \gamma_{e1}}{L_e}\end{aligned}\quad (4.1-12)$$

(4.1-9)式, (4.1-10)式と(4.1-12)の関係から

$$\theta_{0e} = \left(1 - 4\frac{x_e}{L_e} + 3\frac{x_e^2}{L_e^2}\right)\theta_{0e1} + \left(-2\frac{x_e}{L_e} + 3\frac{x_e^2}{L_e^2}\right)\theta_{0e2} \quad (4.1-13)$$

が得られ, この式をさらに x_e で微分すると次の式が得られる.

$$\theta_{0e}' = \left(-\frac{4}{L_e} + 6\frac{x_e}{L_e^2} \right) \theta_{0e1} + \left(-\frac{2}{L_e} + 6\frac{x_e}{L_e^2} \right) \theta_{0e2} \quad (4.1-14)$$

(2) 一般化歪の式

要素内の一般化歪を節点変位パラメータで表す式を求める。(4.1-8)式, (4.1-11)式, (4.1-12)式, (4.1-14)式より

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_{x0e} &= u_e' = \frac{u_{e2}}{L_e} \\ \tilde{\kappa}_{ye} &= -(\theta_{0e} - \gamma_e)' = -\theta_{0e}' + \gamma_e' = -\left(-\frac{4}{L_e} + 6\frac{x_e}{L_e^2} \right) \theta_{0e1} - \left(-\frac{2}{L_e} + 6\frac{x_e}{L_e^2} \right) \theta_{0e2} + \frac{\gamma_{e2} - \gamma_{e1}}{L_e} \\ \tilde{\gamma}_{x0e} &= \left(1 + u_e' \right) \sin \gamma_e = \left(1 + \frac{u_{e2}}{L_e} \right) \sin \left[\left(1 - \frac{x_e}{L_e} \right) \gamma_{e1} + \left(\frac{x_e}{L_e} \right) \gamma_{e2} \right] \end{aligned} \quad (4.1-15)$$

(3) 歪エネルギー

要素の歪エネルギーの(2.2-19)式に(4.1-15)式を代入して, 要素全体にわたって積分すると, 要素の歪エネルギーを次のように表すことができる.

$$\begin{aligned} U_{Ene} &= \frac{EA_e L_e}{2} \left(\frac{u_{e2}}{L_e} \right)^2 \\ &+ \frac{GA_e L_e}{4} \left(1 + \frac{u_{e2}}{L_e} \right)^2 \left\{ 1 - \frac{\sin 2\gamma_{e2} - \sin 2\gamma_{e1}}{2(\gamma_{e2} - \gamma_{e1})} \right\} \\ &+ \frac{EI_e}{2L_e} \left\{ 4(\theta_{0e1}^2 + \theta_{0e2}^2 + \theta_{0e1}\theta_{0e2}) \right. \\ &\quad \left. - 2(\theta_{0e2} - \theta_{0e1})(\gamma_{e2} - \gamma_{e1}) + (\gamma_{e2} - \gamma_{e1})^2 \right\} \end{aligned} \quad (4.1-16)$$

ここで, EA_e は要素の軸剛性, GA_e は要素のせん断剛性, EI_e は要素の曲げ剛性である.

4.1.4 全ポテンシャルエネルギー停留の原理の適用

図 2.2-4 に示す末端に圧縮荷重を受ける片持ち梁の全ポテンシャルエネルギーは, 全要素の歪エネルギーを合計したものに外力によるポテンシャルエネルギーを足し合わせて得られる.

$$\Pi_{En} = U_{En} - Pu(l_0) = \sum_{\text{all elements}} U_{Ene} - Pu(l_0) \quad (4.1-17)$$

全ポテンシャルエネルギー停留の原理は(2.2-21)式で表される.

$$\delta \Pi_{En} = 0 \quad (2.2-21)$$

4 エネルギー法による伸張せん断エラスティカの直接解法の定式化

4.2 Timoshenko の理論の計算式

Timoshenko の理論に関しても, 4.1 項で説明した Engesser の理論と同様の計算式を導くことができる. 一般化歪が関係する部分が異なるだけである. 以下, 異なる部分だけを記載する. 式番号(4.2-x)の末尾の数字 x は Engesser の理論と同じとする.

4.2.1 全体座標系での伸張剪断エラスティカの変形

Timoshenko の理論による一般化歪は(2.3-6)式で表されるので, (2.3-6)式に(4.1-4)式を代入して

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon}_{x0} &= \sqrt{(1+u')^2 + w'^2} - 1 \\ \bar{\kappa}_y &= -(\theta_0 - \gamma)' \\ \bar{\gamma}_{xz0} &= \gamma\end{aligned}\tag{4.2-6}$$

以上の式は全体座標系での厳密な式である.

断面に働く力 \bar{N}_x , \bar{M}_y , \bar{Q}_z と一般化歪の関係は(2.3-16)式である.

$$\bar{N}_x = EA\bar{\varepsilon}_{x0}, \quad \bar{Q}_z = GA\bar{\gamma}_{xz0}, \quad \bar{M}_y = EI\bar{\kappa}_y = -EI(\theta_0 - \gamma)'\tag{2.3-16}$$

歪エネルギーは(2.3-19)式である.

$$U_T = \int_0^{l_0} \left[\frac{1}{2} EA (\bar{\varepsilon}_{x0})^2 + \frac{1}{2} GA (\bar{\gamma}_{xz0})^2 + \frac{1}{2} EI \left\{ (\theta_0 - \gamma)' \right\}^2 \right] dx\tag{2.3-19}$$

4.2.2 要素座標系の定義

4.1.2 項と同じである.

4.2.3 要素座標系での一般化歪と歪エネルギーの式

(1) 要素内変位の内挿

図 4.1-2 において, 変形から一般化歪の式を導く. 要素座標系で考えると, u_e と γ_e は大きい変位で, w_e は微小変位であるので, $w_e' \ll 1$ として(4.2-6)式は次のように簡略化できる.

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon}_{x0e} &= \sqrt{(1+u_e')^2 + w_e'^2} - 1 \cong \sqrt{(1+u_e')^2} - 1 \\ &= u_e' \\ \bar{\gamma}_{xz0e} &= \gamma_e\end{aligned}\tag{4.2-8}$$

(2) 一般歪の式

要素内の一般化歪を節点変位パラメータで表す式を求める. (4.2-8)式, (4.1-11)式, (4.1-12)式, (4.1-14)式より

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon}_{x0e} &= u_e' = \frac{u_{e2}}{L_e} \\ \bar{\kappa}_{ye} &= -(\theta_{0e} - \gamma_e)' = -\theta_{0e}' + \gamma_e' = -\left(-\frac{4}{L_e} + 6\frac{x_e}{L_e^2} \right) \theta_{0e1} - \left(-\frac{2}{L_e} + 6\frac{x_e}{L_e^2} \right) \theta_{0e2} + \frac{\gamma_{e2} - \gamma_{e1}}{L_e} \\ \bar{\gamma}_{xz0e} &= \gamma_e = \left(1 - \frac{x_e}{L_e} \right) \gamma_{e1} + \left(\frac{x_e}{L_e} \right) \gamma_{e2}\end{aligned}\tag{4.2-15}$$

(3) 歪エネルギー

要素の歪エネルギーの(2.3-19)式に(4.2-15)式を代入して、要素全体にわたって積分すると、要素の歪エネルギーを次のように表すことができる。

$$\begin{aligned}
 U_{Te} = & \frac{EA_e L_e}{2} \left(\frac{u_{e2}}{L_e} \right)^2 \\
 & + \frac{GA_e L_e}{6} (\gamma_{e1}^2 + \gamma_{e1} \gamma_{e2} + \gamma_{e2}^2) \\
 & + \frac{EI_e}{2L_e} \left\{ 4(\theta_{0e1}^2 + \theta_{0e2}^2 + \theta_{0e1} \theta_{0e2}) \right. \\
 & \left. - 2(\theta_{0e2} - \theta_{0e1})(\gamma_{e2} - \gamma_{e1}) + (\gamma_{e2} - \gamma_{e1})^2 \right\}
 \end{aligned} \tag{4.2-16}$$

ここで、 EA_e は要素の軸剛性、 GA_e は要素のせん断剛性、 EI_e は要素の曲げ剛性である。

4.2.4 全ポテンシャルエネルギー停留の原理の適用

図 2.2-4 に示す端末に圧縮荷重を受ける片持ち梁の全ポテンシャルエネルギーは、全要素の歪エネルギーを合計したものに外力によるポテンシャルエネルギーを足し合わせて得られる。

$$\Pi_T = U_T - Pu(l_0) = \sum_{\text{all elements}} U_{Te} - Pu(l_0) \tag{4.2-17}$$

全ポテンシャルエネルギー停留の原理は(2.3-21)式で表される。

$$\delta \Pi_T = 0 \tag{2.3-21}$$

4 エネルギー法による伸張せん断エラスティカの直接解法の定式化

4.3 Haringx の理論の計算式

Haringx の理論に関しても, 4.1 項で説明した Engesser の理論と同様の計算式を導くことができる. 一般化歪が関係する部分が異なるだけである. 以下, 異なる部分だけを記載する. 式番号 (4.3-x) の末尾の数字 x は Engesser の理論と同じとする.

4.3.1 全体座標系での伸張剪断エラスティカの変形

Haringx の理論による一般化歪は(2.4-6)式で表されるので, (2.4-6)式に(4.1-4)式を代入して

$$\begin{aligned}\hat{\varepsilon}_{x0} &= \sqrt{(1+u')^2 + w'^2} \cos \gamma - 1 \\ \hat{\kappa}_y &= -(\theta_0 - \gamma)' \\ \hat{\gamma}_{xz0} &= \sqrt{(1+u')^2 + w'^2} \sin \gamma\end{aligned}\tag{4.3-6}$$

以上の式は全体座標系での厳密な式である.

断面に働く力 \hat{N}_x , \hat{M}_y , \hat{Q}_z と一般化歪の関係は(2.4-16)式である.

$$\hat{N}_x = EA\hat{\varepsilon}_{x0}, \quad \hat{Q}_z = GA\hat{\gamma}_{xz0}, \quad M_y = EI\hat{\kappa}_y = -EI(\theta_0 - \gamma)'\tag{2.4-16}$$

歪エネルギーは(2.4-19)式である.

$$U_H = \int_0^l \left[\frac{1}{2} EA (\hat{\varepsilon}_{x0})^2 + \frac{1}{2} GA (\hat{\gamma}_{xz0})^2 + \frac{1}{2} EI (\theta_0 - \gamma)'^2 \right] dx\tag{2.4-19}$$

4.3.2 要素座標系の定義

4.1.2 項と同じである.

4.3.3 要素座標系での一般化歪と歪エネルギーの式

(1) 要素内変位の内挿

図 4.1-2 において, 変形から一般化歪の式を導く. 要素座標系で考えると, u_e と γ_e は大きい変位で, w_e は微小変位であるので, $w'_e \ll 1$ として(4.3-6)式は次のように簡略化できる.

$$\begin{aligned}\hat{\varepsilon}_{x0e} &= \sqrt{(1+u'_e)^2 + w_e'^2} \cos \gamma_e - 1 \cong \sqrt{(1+u'_e)^2} \cos \gamma_e - 1 \\ &= (1+u'_e) \cos \gamma_e - 1 \\ \hat{\gamma}_{xz0e} &= \sqrt{(1+u'_e)^2 + w_e'^2} \sin \gamma_e \cong \sqrt{(1+u'_e)^2} \sin \gamma_e \\ &= (1+u'_e) \sin \gamma_e\end{aligned}\tag{4.3-8}$$

(2) 一般歪の式

要素内の一般化歪を節点変位パラメータで表す式を求める. (4.3-8)式, (4.1-11)式, (4.1-12)式, (4.1-14)式より

$$\begin{aligned}
\hat{\varepsilon}_{x_{0e}} &= \left(1 + u_e'\right) \cos \gamma_e - 1 = \left(1 + \frac{u_{e2}}{L_e}\right) \cos \left[\left(1 - \frac{x_e}{L_e}\right) \gamma_{e1} + \frac{x_e}{L_e} \gamma_{e2} \right] - 1 \\
\hat{\kappa}_{y_e} &= -(\theta_{0e} - \gamma_e)' = -\theta_{0e}' + \gamma_e' = -\left(-\frac{4}{L_e} + 6 \frac{x_e}{L_e^2}\right) \theta_{0e1} - \left(-\frac{2}{L_e} + 6 \frac{x_e}{L_e^2}\right) \theta_{0e2} + \frac{\gamma_{e2} - \gamma_{e1}}{L_e} \\
\hat{\gamma}_{xz_{0e}} &= \left(1 + u_e'\right) \sin \gamma_e = \left(1 + \frac{u_{e2}}{L_e}\right) \sin \left[\left(1 - \frac{x_e}{L_e}\right) \gamma_{e1} + \frac{x_e}{L_e} \gamma_{e2} \right]
\end{aligned} \tag{4.3-15}$$

(3) 歪エネルギー

要素の歪エネルギーの(2.4-19)式に(4.3-15)式を代入して、要素全体にわたって積分すると、要素の歪エネルギーを次のように表すことができる。

$$\begin{aligned}
U_{He} &= \frac{EA_e L_e}{2(\gamma_{e2} - \gamma_{e1})} \left[\left(1 + \frac{u_{e2}}{L_e}\right)^2 \left\{ \frac{\gamma_{e2} - \gamma_{e1}}{2} + \frac{1}{4} (\sin 2\gamma_{e2} - \sin 2\gamma_{e1}) \right\} \right. \\
&\quad \left. - 2 \left(1 + \frac{u_{e2}}{L_e}\right) (\sin \gamma_{e2} - \sin \gamma_{e1}) + (\gamma_{e2} - \gamma_{e1}) \right] \\
&\quad + \frac{GA_e L_e}{4} \left(1 + \frac{u_{e2}}{L_e}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{2(\gamma_{e2} - \gamma_{e1})} (\sin 2\gamma_{e2} - \sin 2\gamma_{e1})\right) \\
&\quad + \frac{EI_e}{2L_e} \left\{ 4(\theta_{0e1}^2 + \theta_{0e2}^2 + \theta_{0e1} \theta_{0e2}) \right. \\
&\quad \left. - 2(\theta_{0e2} - \theta_{0e1})(\gamma_{e2} - \gamma_{e1}) + (\gamma_{e2} - \gamma_{e1})^2 \right\}
\end{aligned} \tag{4.3-16}$$

ここで、 EA_e は要素の軸剛性、 GA_e は要素のせん断剛性、 EI_e は要素の曲げ剛性である。

4.3.4 全ポテンシャルエネルギー停留の原理の適用

図 2.2-4 に示す末端に圧縮荷重を受ける片持ち梁の全ポテンシャルエネルギーは、全要素の歪エネルギーを合計したものに外力によるポテンシャルエネルギーを足し合わせて得られる。

$$\Pi_H = U_H - Pu(l_0) = \sum_{\text{all elements}} U_{He} - Pu(l_0) \tag{4.3-17}$$

全ポテンシャルエネルギー停留の原理は(2.4-21)式で表される。

$$\delta \Pi_H = 0 \tag{2.4-21}$$

4 エネルギー法による伸張せん断エラスティカの直接解法の定式化

4.4 キルヒホッフの応力とグリーンの歪の間にフックの法則が成り立つ場合の計算式

キルヒホッフの応力とグリーンの歪の間にフックの法則が成り立つ場合にも、ポテンシャルエネルギーを計算することによって伸張せん断エラスティカの変形を計算することができる。この構成方程式は、宮崎 2012 の座屈の式と三次元弾性論による厳密解に対応している。(2.1-17)式から、キルヒホッフの応力の向きは \mathbf{G}_x と \mathbf{G}_z であるので、Engesser の理論と同じ向きである。したがって、本項で説明する計算式は Engesser の理論の一種であると言える。

4.4.1 構成方程式

ヤング率を E 、せん断剛性を G とするとき、キルヒホッフの応力とグリーンの歪の間にフックの法則が成り立つとすると

$$s^{xx} = E f_{xx}, \quad s^{xz} = 2G f_{xz} \quad (4.4-1)$$

ここで、 E はヤング率、 G はせん断弾性係数である。

4.4.2 伸張せん断エラスティカの歪エネルギー

内部仮想仕事は、(2.1-20)式より

$$\delta W_i = \int_0^{l_0} \iint_A s^{ij} \delta f_{ij} dA dx = \int_0^{l_0} \iint_A (s^{xx} \delta f_{xx} + 2s^{xz} \delta f_{xz}) dA dx \quad (2.1-20)$$

であるから、構成方程式(4.4-1)式より、歪エネルギー U_{KG} は

$$U_{KG} = \int_0^{l_0} \iint_A \left[\frac{1}{2} E (f_{xx})^2 + 2G (f_{xz})^2 \right] dA dx \quad (4.4-2)$$

と表わされる。

グリーンの歪は、(2.1-16)式から

$$\begin{aligned} f_{xx} &= \frac{1}{2} \left[\left\{ \sqrt{G_{xx0}} \cos \gamma - z(\theta_0 - \gamma)' \right\}^2 + \left\{ \sqrt{G_{xx0}} \sin \gamma \right\}^2 - 1 \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[G_{xx0} \cos^2 \gamma + z^2 \left\{ (\theta_0 - \gamma)' \right\}^2 - 2z \sqrt{G_{xx0}} \cos \gamma (\theta_0 - \gamma)' + G_{xx0} \sin^2 \gamma - 1 \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[G_{xx0} - 1 - 2z \sqrt{G_{xx0}} \cos \gamma (\theta_0 - \gamma)' + z^2 \left\{ (\theta_0 - \gamma)' \right\}^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} (G_{xx0} - 1) - z \sqrt{G_{xx0}} \cos \gamma (\theta_0 - \gamma)' + \frac{1}{2} z^2 \left\{ (\theta_0 - \gamma)' \right\}^2 \\ f_{xz} &= \frac{1}{2} \sqrt{G_{xx0}} \sin \gamma \end{aligned}$$

であるので、これを(4.4-2)式に代入して歪エネルギーを計算すると

$$U_{KG} = \int_0^{l_0} \iint_A \left[\frac{1}{2} E \left(\frac{1}{2} (G_{xx0} - 1) - z \sqrt{G_{xx0}} \cos \gamma (\theta_0 - \gamma)' + \frac{1}{2} z^2 \left\{ (\theta_0 - \gamma)' \right\}^2 \right)^2 + 2G \left(\frac{1}{2} \sqrt{G_{xx0}} \sin \gamma \right)^2 \right] dx$$

4.4 キルヒホッフの応力とグリーンの歪の間にフックの法則が成り立つ場合の計算式

$$= \int_0^{l_0} \iint_A \left[\frac{1}{2} E \left\langle \begin{array}{l} \frac{1}{4} (G_{xx0} - 1)^2 + \frac{1}{2} z^2 \{ 2G_{xx0} \cos^2 \gamma + G_{xx0} - 1 \} \{ (\theta_0 - \gamma)' \}^2 \\ + \frac{1}{4} z^4 \{ (\theta_0 - \gamma)' \}^4 - z (G_{xx0} - 1) \sqrt{G_{xx0}} \cos \gamma (\theta_0 - \gamma)' \\ - z^3 \sqrt{G_{xx0}} \cos \gamma \{ (\theta_0 - \gamma)' \}^3 \\ + \frac{1}{2} G G_{xx0} \sin^2 \gamma \end{array} \right\rangle \right] dx \quad (4.4-3)$$

$z = 0$ に関して対称断面であると仮定すると、 z の 1 乗の項と 3 乗の項が消えて、(4.4-3)式は次のように表される。

$$U_{KG} = \int_0^{l_0} \left[\frac{1}{8} EA (G_{xx0} - 1)^2 + \frac{1}{4} EI \{ 2G_{xx0} \cos^2 \gamma + G_{xx0} - 1 \} \{ (\theta_0 - \gamma)' \}^2 + \frac{1}{8} EK \{ (\theta_0 - \gamma)' \}^4 \right. \\ \left. + \frac{1}{2} GA G_{xx0} \sin^2 \gamma \right] dx \quad (4.4-4)$$

$$\text{ここで、} K = \iint_A z^4 dA \quad \text{である。} \quad (4.4-5)$$

4.4.3 要素の歪エネルギー

(4.1-4.1)式, (4.1-8.1)式, (4.1-12.1)式より,

$$\sqrt{G_{xx0e}} = \sqrt{(1+u_e')^2 + w_e'^2} \cong \sqrt{(1+u_e')^2} = 1+u_e' = 1 + \frac{u_{e2}}{L_e} \quad (4.4-6)$$

(4.1-11)式より

$$\gamma_e = \left(1 - \frac{x_e}{L_e} \right) \gamma_{e1} + \frac{x_e}{L_e} \gamma_{e2} = \frac{\gamma_{e2} - \gamma_{e1}}{L_e} x_e + \gamma_{e1}$$

(4.1-12.3)式より

$$\gamma_e' = \frac{\gamma_{e2} - \gamma_{e1}}{L_e}$$

(4.1-14)式より

$$\theta_{0e}' = \left(-\frac{4}{L_e} + 6 \frac{x_e}{L_e^2} \right) \theta_{0e1} + \left(-\frac{2}{L_e} + 6 \frac{x_e}{L_e^2} \right) \theta_{0e2}$$

これらの式を(4.4-4)式に代入して、要素の歪エネルギーを節点変位で表し、 $\theta_{0e}' - \gamma_e'$ は小さいので 4 乗の項を省略すると

4 エネルギー法による伸張せん断エラスティカの直接解法の定式化

$$\begin{aligned}
 U_{KGe} &= \int_0^{L_e} \left[\frac{1}{8}EA(G_{xx0e} - 1)^2 + \frac{1}{4}EI \left\{ 2G_{xx0e} \cos^2 \gamma_e + G_{xx0e} - 1 \right\} \left\{ (\theta_{0e} - \gamma_e)' \right\}^2 + \frac{1}{8}EK \left\{ (\theta_{0e} - \gamma_e)' \right\}^4 \right] dx \\
 &\equiv \int_0^{L_e} \left[\frac{1}{2}GAG_{xx0e} \sin^2 \gamma_e \right. \\
 &\quad \left. \left[\frac{1}{8}EA \left\{ \left(1 + \frac{u_{e2}}{L_e} \right)^2 - 1 \right\} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{1}{4}EI \left\{ \begin{aligned} &2 \left(1 + \frac{u_{e2}}{L_e} \right)^2 \cos^2 \left(\frac{\gamma_{e2} - \gamma_{e1}}{L_e} x_e + \gamma_{e1} \right) \\ &+ \left(1 + \frac{u_{e2}}{L_e} \right)^2 - 1 \end{aligned} \right\} \left\{ \left(-\frac{4}{L_e} + 6 \frac{x_e}{L_e^2} \right) \theta_{0e1} + \left(-\frac{2}{L_e} + 6 \frac{x_e}{L_e^2} \right) \theta_{0e2} - \frac{\gamma_{e2} - \gamma_{e1}}{L_e} \right\}^2 \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{1}{2}GA \left(1 + \frac{u_{e2}}{L_e} \right)^2 \sin^2 \left(\frac{\gamma_{e2} - \gamma_{e1}}{L_e} x_e + \gamma_{e1} \right) \right] dx
 \end{aligned} \tag{4.4-7}$$

(4.4-7)式の第1項は

$$\frac{1}{8}EA \left\{ \left(1 + \frac{u_{e2}}{L_e} \right)^2 - 1 \right\} L_e$$

(4.4-7)式の第2項は、要素内の γ_e の変化が小さいとして $\Delta\gamma_e = \gamma_{e2} - \gamma_{e1}$ と置き

$$\begin{aligned}
 &\cos^2 \left(\frac{\gamma_{e2} - \gamma_{e1}}{L_e} x_e + \gamma_{e1} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left[1 + \cos 2 \left(\frac{\Delta\gamma_e}{L_e} x_e + \gamma_{e1} \right) \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[1 + \cos \left(2 \frac{\Delta\gamma_e}{L_e} x_e \right) \cos(2\gamma_{e1}) - \sin \left(2 \frac{\Delta\gamma_e}{L_e} x_e \right) \sin(2\gamma_{e1}) \right] \\
 &\cong \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\gamma_{e1} - (\sin 2\gamma_{e1}) \frac{\Delta\gamma_e}{L_e} x_e
 \end{aligned} \tag{4.4-8}$$

を使うと

$$\begin{aligned}
 &\int_0^{L_e} \left[\frac{1}{4}EI \left\{ \begin{aligned} &2 \left(1 + \frac{u_{e2}}{L_e} \right)^2 \cos^2 \left(\frac{\Delta\gamma_e}{L_e} x_e + \gamma_{e1} \right) \\ &+ \left(1 + \frac{u_{e2}}{L_e} \right)^2 - 1 \end{aligned} \right\} \left\{ \left(-\frac{4}{L_e} + 6 \frac{x_e}{L_e^2} \right) \theta_{0e1} + \left(-\frac{2}{L_e} + 6 \frac{x_e}{L_e^2} \right) \theta_{0e2} - \frac{\Delta\gamma_e}{L_e} \right\}^2 \right] dx \\
 &\cong \int_0^{L_e} \left[\frac{1}{4}EI \left\{ \begin{aligned} &2 \left(1 + \frac{u_{e2}}{L_e} \right)^2 \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\gamma_{e1} - (\sin 2\gamma_{e1}) \frac{\Delta\gamma_e}{L_e} x_e \right\} \\ &+ \left(1 + \frac{u_{e2}}{L_e} \right)^2 - 1 \end{aligned} \right\} \left\{ \frac{6(\theta_{0e1} + \theta_{0e2})}{L_e^2} x_e - \frac{2(2\theta_{0e1} + \theta_{0e2}) + \Delta\gamma_e}{L_e} \right\}^2 \right] dx
 \end{aligned}$$

4.4 キルヒホッフの応力とグリーンの歪の間にフックの法則が成り立つ場合の計算式

$$\begin{aligned}
 &= \frac{EI}{12L_e} \left\{ 2 \left(1 + \frac{u_{e2}}{L_e} \right)^2 + \left(1 + \frac{u_{e2}}{L_e} \right)^2 \cos 2\gamma_{e1} - 1 \right\} \left\langle \begin{array}{l} \{2\theta_{0e1} + 4\theta_{0e2} - \Delta\gamma_e\}^2 \\ - \{2\theta_{0e1} + 4\theta_{0e2} - \Delta\gamma_e\} \{4\theta_{0e1} + 2\theta_{0e2} + \Delta\gamma_e\} \\ + \{4\theta_{0e1} + 2\theta_{0e2} + \Delta\gamma_e\}^2 \end{array} \right\rangle \\
 &- \frac{1}{2} EI \left(1 + \frac{u_{e2}}{L_e} \right)^2 (\sin 2\gamma_{e1}) \frac{\Delta\gamma_e}{L_e} \left\langle \begin{array}{l} \left[\frac{1}{2} \{2\theta_{0e1} + 4\theta_{0e2} - \Delta\gamma_e\}^2 \right] \\ - (\theta_{0e1} + \theta_{0e2}) \{ \theta_{0e1} + 5\theta_{0e2} - 2\Delta\gamma_e \} \end{array} \right\rangle
 \end{aligned} \tag{4.4-9}$$

(4.4-7)式の第3項は、(4.4-8)式と同様の近似を使い

$$\begin{aligned}
 &\int_0^{L_e} \left[\frac{1}{2} GA \left(1 + \frac{u_{e2}}{L_e} \right)^2 \sin^2 \left(\frac{\Delta\gamma_e}{L_e} x_e + \gamma_{e1} \right) \right] dx \\
 &= \frac{1}{2} GA \left(1 + \frac{u_{e2}}{L_e} \right)^2 \int_0^{L_e} \frac{1}{2} \left[1 - \cos 2 \left(\frac{\Delta\gamma_e}{L_e} x_e + \gamma_{e1} \right) \right] dx \\
 &= \frac{1}{4} GA \left(1 + \frac{u_{e2}}{L_e} \right)^2 \int_0^{L_e} \left[1 - \cos \left(2 \frac{\Delta\gamma_e}{L_e} x_e \right) \cos(2\gamma_{e1}) + \sin \left(2 \frac{\Delta\gamma_e}{L_e} x_e \right) \sin(2\gamma_{e1}) \right] dx \\
 &\cong \frac{1}{4} GA \left(1 + \frac{u_{e2}}{L_e} \right)^2 \int_0^{L_e} \left[1 - \cos(2\gamma_{e1}) + 2 \frac{\Delta\gamma_e}{L_e} x_e \sin(2\gamma_{e1}) \right] dx \\
 &= \frac{1}{4} GAL_e \left(1 + \frac{u_{e2}}{L_e} \right)^2 \left[1 - \cos(2\gamma_{e1}) + \Delta\gamma_e \sin(2\gamma_{e1}) \right]
 \end{aligned} \tag{4.4-10}$$

結局、要素の歪エネルギーは次のように表すことができる。

$$\begin{aligned}
 U_{KG_e} &= \frac{1}{8} EAL_e \left\{ \left(1 + \frac{u_{e2}}{L_e} \right)^2 - 1 \right\} \\
 &+ \frac{EI}{12L_e} \left\{ 2 \left(1 + \frac{u_{e2}}{L_e} \right)^2 + \left(1 + \frac{u_{e2}}{L_e} \right)^2 \cos 2\gamma_{e1} - 1 \right\} \left\langle \begin{array}{l} \{2\theta_{0e1} + 4\theta_{0e2} - \Delta\gamma_e\}^2 \\ - \{2\theta_{0e1} + 4\theta_{0e2} - \Delta\gamma_e\} \{4\theta_{0e1} + 2\theta_{0e2} + \Delta\gamma_e\} \\ + \{4\theta_{0e1} + 2\theta_{0e2} + \Delta\gamma_e\}^2 \end{array} \right\rangle \\
 &- \frac{1}{2} EI \left(1 + \frac{u_{e2}}{L_e} \right)^2 (\sin 2\gamma_{e1}) \frac{\Delta\gamma_e}{L_e} \left\langle \begin{array}{l} \left[\frac{1}{2} \{2\theta_{0e1} + 4\theta_{0e2} - \Delta\gamma_e\}^2 \right] \\ - (\theta_{0e1} + \theta_{0e2}) \{ \theta_{0e1} + 5\theta_{0e2} - 2\Delta\gamma_e \} \end{array} \right\rangle \\
 &+ \frac{1}{4} GAL_e \left(1 + \frac{u_{e2}}{L_e} \right)^2 \left[1 - \cos(2\gamma_{e1}) + \Delta\gamma_e \sin(2\gamma_{e1}) \right]
 \end{aligned} \tag{4.4-11}$$

4.4.4 全ポテンシャルエネルギー停留の原理の適用

図 2.2-4 に示す末端に圧縮荷重を受ける片持ち梁の全ポテンシャルエネルギーは、全要素の歪エネルギーを合計したものに外力によるポテンシャルエネルギーを足し合わせて得られる。

$$\Pi_{KG} = U_{KG} - Pu(l_0) = \sum_{\text{all elements}} U_{KG_e} - Pu(l_0) \tag{4.4-12}$$

全ポテンシャルエネルギー停留の原理は次のようになる。

$$\delta\Pi_{KG} = 0 \tag{4.4-13}$$

4 エネルギー法による伸張せん断エラスティカの直接解法の定式化

4.5 エネルギー法による直接解法の計算手順

MS-Excel のソルバーを使って伸張せん断エラスティカの変位を計算する手順を図 4.5-1 に示す。

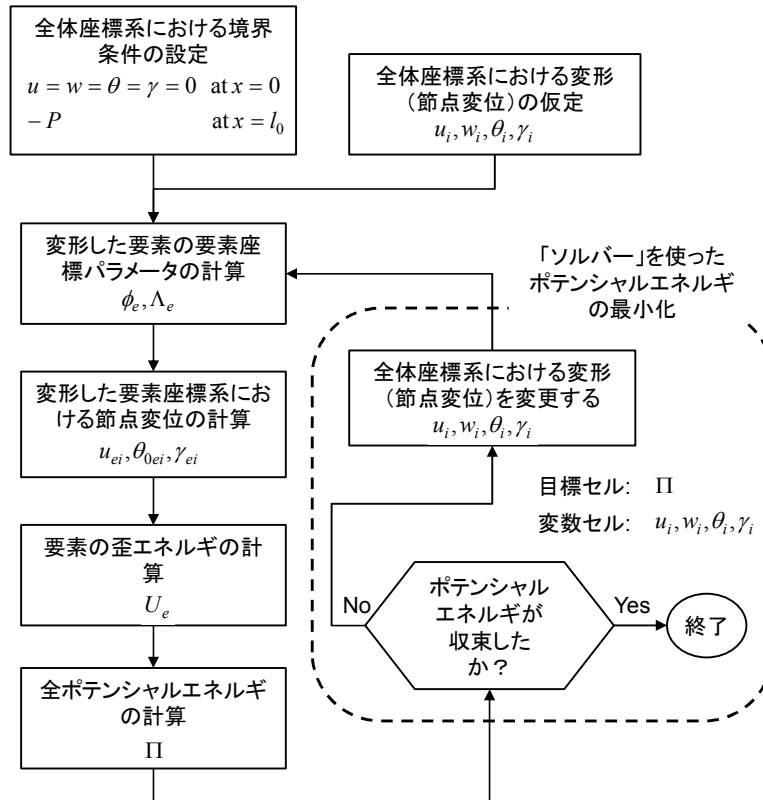


図 4.5-1 エネルギー法による直接解法の計算手順

5 端末圧縮荷重を受ける一定断面の片持ち梁の数値解析

前項までに示した伸張せん断エラスティカの理論に基づいて、図 5.1-1 に示す端末圧縮荷重を受ける一定断面の片持ち梁の数値解析を行い、Engesser の理論、Timoshenko の理論、Haringx の理論の比較を行う。

5.1 有限要素法とエネルギー法による直接解法の比較

有限要素法の解析モデルを図 5.1-2 に示す。節点数が 401、要素数が 400 である。エネルギー法による直接解法の解析モデルを図 5.1-3 に示す。節点数が 26 で、要素数が 25 である。エネルギー法による直接解法では節点数が少なくても精度の良い計算ができる。

代表例として軸剛性とせん断剛性が低い $P_E/EA = 0.20, P_E/GA = 0.20$ の場合について、有限要素法とエネルギー法による直接解法で変形を計算した。図 5.1-4～図 5.1-6 に示すように有限要素法とエネルギー法による直接解法の変形の解析結果はよく一致した。どちらの数値計算法でもほとんど同じ結果が得られるので、以下の数値計算では主にエネルギー法による直接解法を使う。

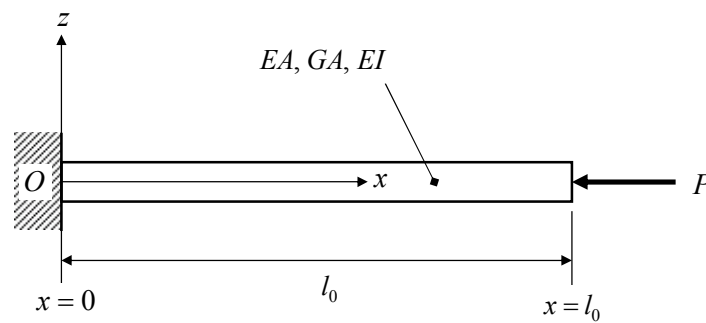


図 5.1-1 端末圧縮荷重を受ける一定断面の片持ち梁

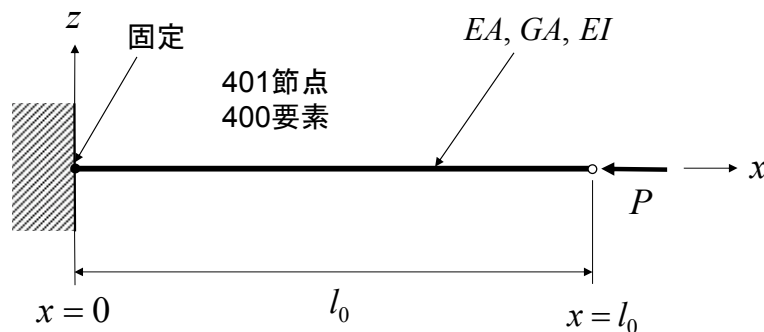


図 5.1-2 有限要素法のモデル

5 端末圧縮荷重を受ける一定断面の片持ち梁の数値解析

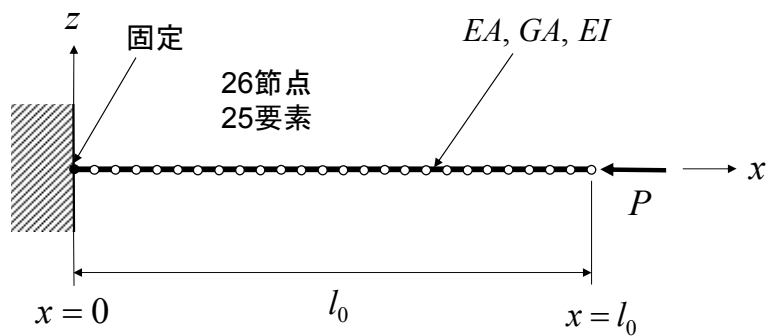


図 5.1-3 エネルギー法による直接解法のモデル

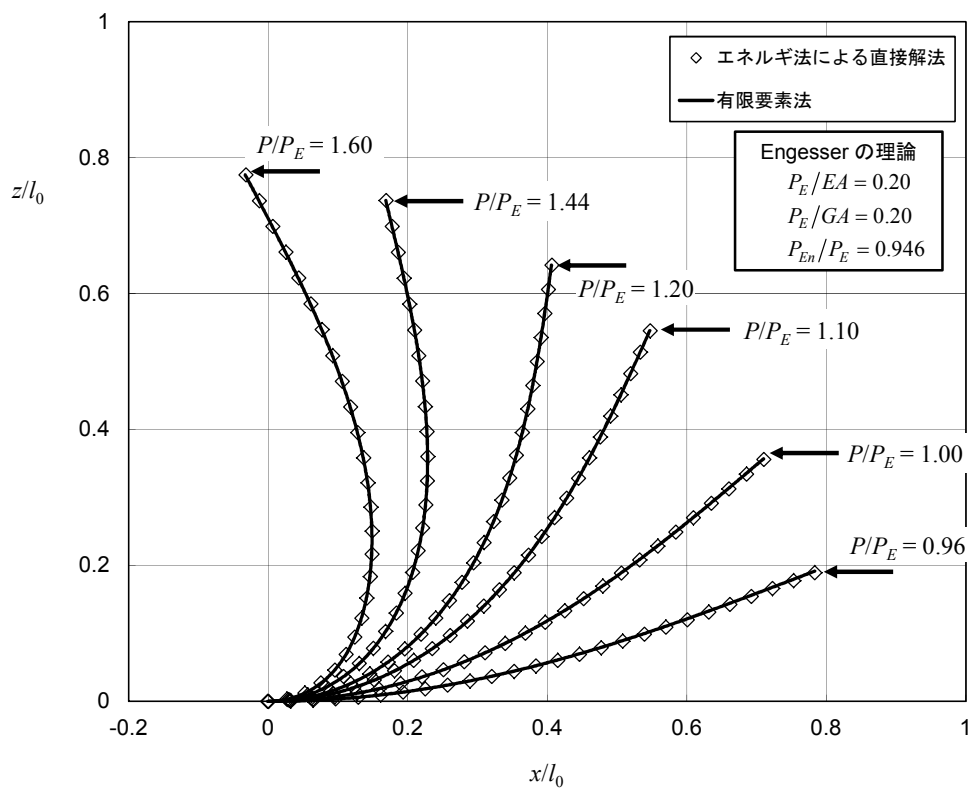


図 5.1-4 変形の解析結果の比較 - Engesser の理論

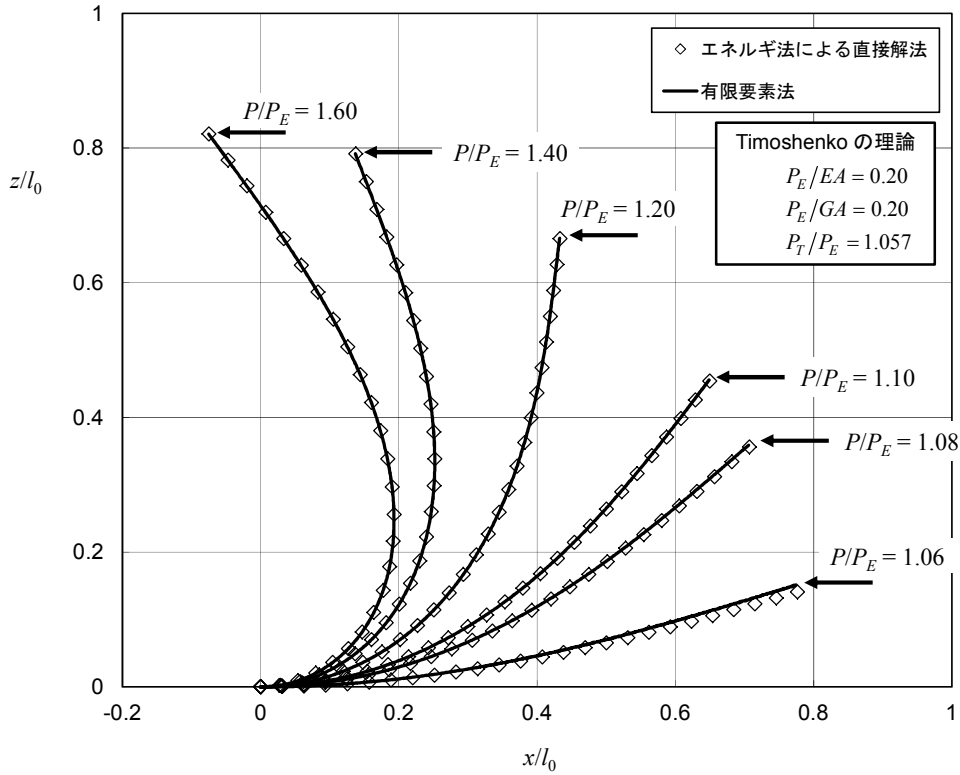


図 5.1-5 変形の解析結果の比較 - Timoshenko の理論

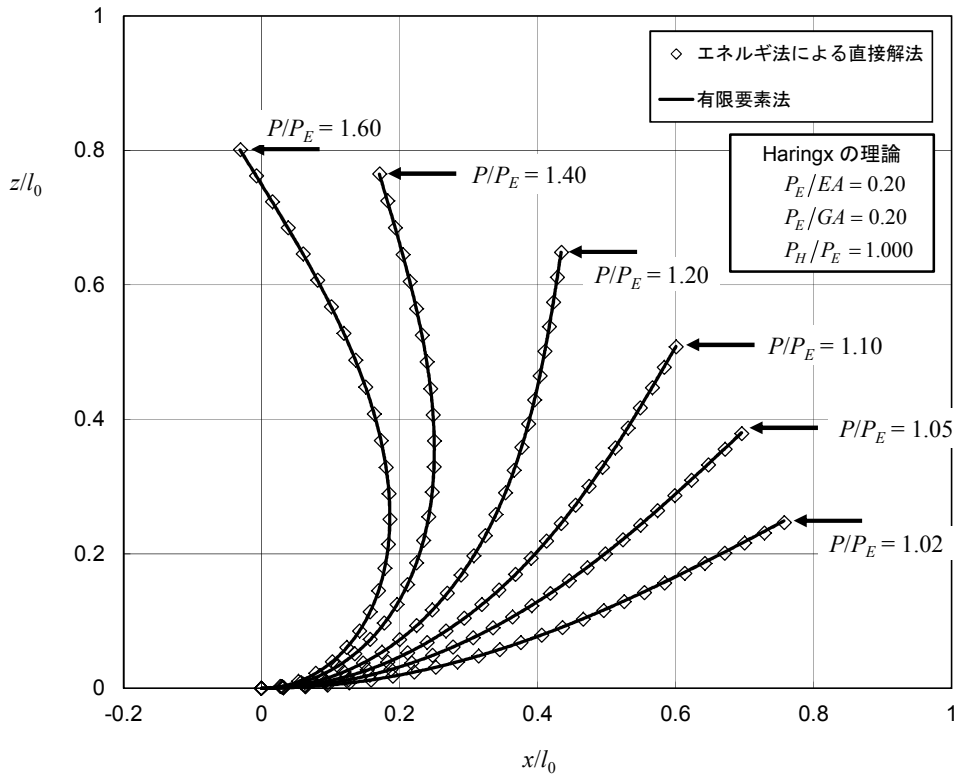


図 5.1-6 変形の解析結果の比較 - Haringx の理論

5 端末圧縮荷重を受ける一定断面の片持ち梁の数値解析

5.2 座屈荷重の解析式と数値解との比較

第2章で求めた座屈荷重の解析式による座屈荷重と、第3章で説明した有限要素法または第4章で説明したエネルギー法による直接解法による座屈荷重を比較する。

5.2.1 座屈荷重の求め方

有限要素法、またはエネルギー法によって計算した荷重-変位関係から座屈荷重を求めるには、図5.2-1に示すように、横軸に端末の横変位 w の2乗を、縦軸に荷重をプロットする。縦軸との交点が座屈荷重となる。

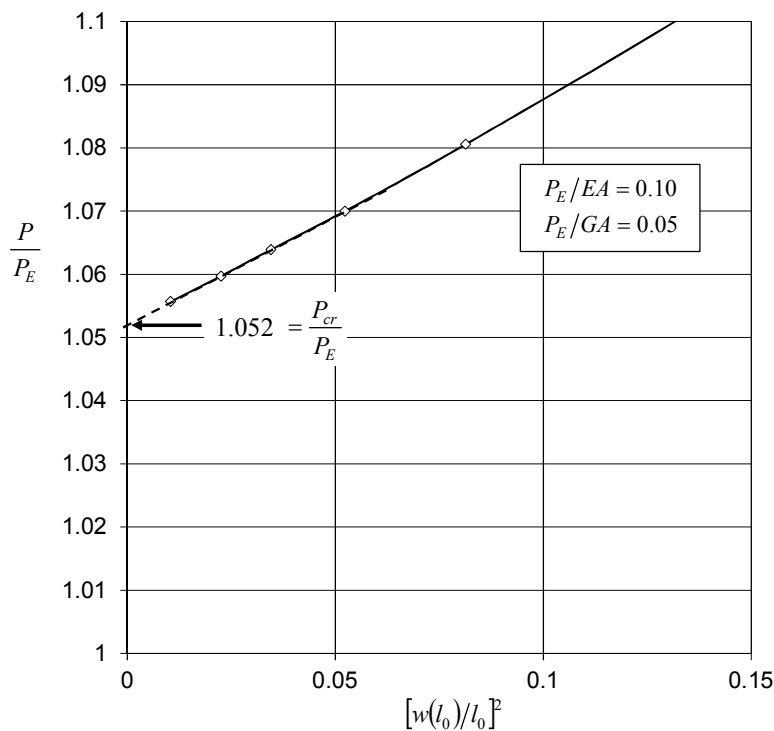


図 5.2-1 座屈荷重の求め方

5.2.2 座屈荷重の比較

有限要素法またはエネルギー法による数値計算によって求めた座屈荷重と、2.5項に示した座屈荷重計算式による座屈荷重を比較した。2.4.6項で示したように Haringx の理論によると、引張荷重で座屈する場合がある。

- 断面力と一般化歪の間にフックの法則が成り立つ場合 (公称応力と公称歪の間にフックの法則が成り立つ)
 - Engesser の理論 : 表 5.2-1, 図 5.2-2
 - Timoshenko の理論 : 表 5.2-2, 図 5.2-3
 - Haringx の理論 (圧縮座屈荷重) : 表 5.2-3, 図 5.2-4
 - Haringx の理論 (引張座屈荷重) : 表 5.2-4, 図 5.2-5

これらの図と表によると、数値計算による座屈荷重は座屈荷重計算式とよく一致しているが、軸剛性が小さい (P_E/EA が大きい) 領域で座屈荷重より低い荷重の安定な変形が存在する。(この荷重を安定最小荷重と呼ぶ。) これは、5.3 項で説明するように、飛び移り現象によるものである。せん断剛性が低くなる (P_E/GA が大きくなる) と、飛び移り現象が発生する軸剛性が小さくなる (P_E/EA が大きくなる)。

図 5.2-5 によると、Haringx の理論による引張座屈荷重は圧縮座屈荷重に比べて非常に大きい荷重であることがわかる。

- キルヒホッフの応力とグリーンの歪の間にフックの法則が成り立つ場合
 - 宮崎 2012 の座屈荷重計算式 (表 1.1-1) との比較 : 表 5.2-5, 図 5.2-6

宮崎の計算式による座屈荷重とエネルギー法の直接解法による座屈荷重はよく一致している。

キルヒホッフの応力とグリーンの歪の間にフックの法則が成り立つ場合には、軸剛性パラメータ (P_E/EA) が大きくなると座屈荷重が低下する。これは、公称応力と公称歪の間にフックの法則が成り立つ場合とは逆の現象である。

5 端末圧縮荷重を受ける一定断面の片持ち梁の数値解析

表 5.2-1 座屈荷重の数値解の比較 – Engesser の理論

梁の剛性/パラメータ		座屈荷重 P_{En}/P_E			安定最小荷重 P_{min}/P_E	
P_E/EA	P_E/GA	座屈計算式 (2.2-47)式	有限要素法	エネルギー法	有限要素法	エネルギー法
0.001	0.001	1.000	1.000	1.000	x	x
0.05	0.001	1.054	1.056	1.055	x	x
0.1	0.001	1.125	1.126	1.126	x	x
0.15	0.001	1.223	1.223	1.223	x	x
0.2	0.001	1.378	--	1.378	1.372	1.372
0.22	0.001	1.479	--	1.473	1.429	1.429
0.25	0.001	1.881	--	--	--	1.494
0.25	0.01	1.663	--	1.663	--	1.477
0.001	0.05	0.953	--	0.953	x	x
0.05	0.05	0.997	--	0.998	x	x
0.1	0.05	1.052	--	1.052	x	x
0.15	0.05	1.121	--	1.122	x	x
0.2	0.05	1.215	--	1.215	x	x
0.25	0.05	1.359	--	1.359	x	x
0.3	0.05	1.667	--	1.649	--	1.499
0.001	0.1	0.910	0.910	0.910	x	x
0.05	0.1	0.945	0.945	0.946	x	x
0.1	0.1	0.988	0.988	0.988	x	x
0.15	0.1	1.039	1.039	1.039	x	x
0.2	0.1	1.101	1.101	1.102	x	x
0.25	0.1	1.181	1.181	1.182	x	x
0.3	0.1	1.288	1.288	1.288	x	x
0.001	0.15	0.870	--	0.870	x	x
0.1	0.15	0.933	--	0.933	x	x
0.2	0.15	1.015	--	1.015	x	x
0.25	0.15	1.066	--	1.067	x	x
0.3	0.15	1.125	--	1.125	x	x
0.001	0.2	0.834	0.834	0.834	x	x
0.05	0.2	0.858	0.858	0.858	x	x
0.1	0.2	0.884	0.884	0.885	x	x
0.15	0.2	0.913	0.913	0.913	x	x
0.2	0.2	0.946	0.946	0.946	x	x
0.25	0.2	0.981	0.981	0.981	x	x
0.3	0.2	1.018	1.018	1.018	x	x
0.001	0.25	0.800	--	0.801	x	x
0.1	0.25	0.841	--	0.842	x	x
0.2	0.25	0.888	--	0.888	x	x
0.25	0.25	0.913	--	0.913	x	x
0.3	0.25	0.938	--	0.938	x	x
0.001	0.3	0.770	0.770	0.770	x	x
0.05	0.3	0.786	0.786	0.786	x	x
0.1	0.3	0.803	0.803	0.803	x	x
0.15	0.3	0.820	0.820	0.820	x	x
0.2	0.3	0.838	0.838	0.839	x	x
0.25	0.3	0.856	0.856	0.856	x	x
0.3	0.3	0.874	0.874	0.874	x	x

注 x : 存在しない
-- : 計算せず

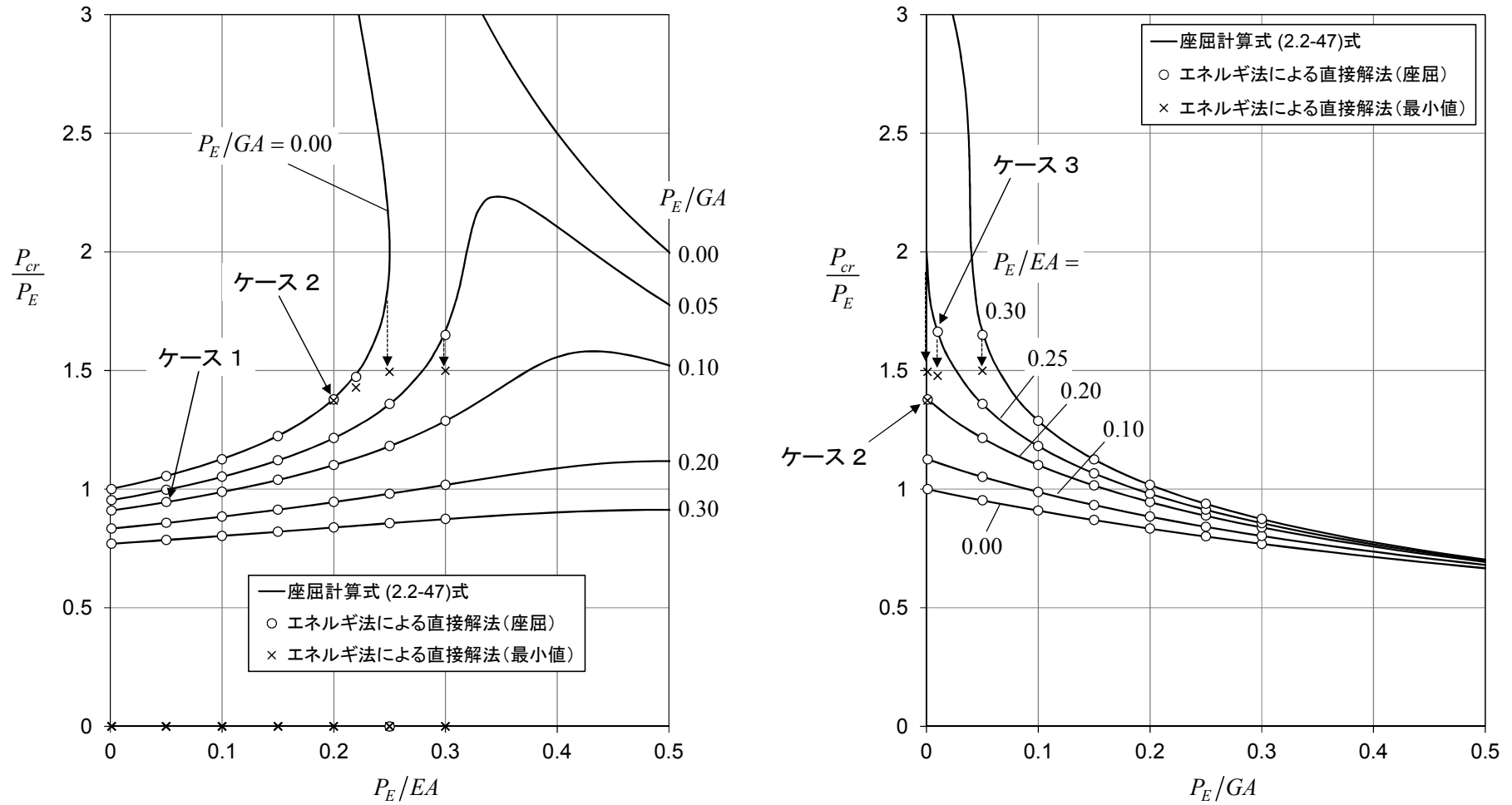


図 5.2-2 座屈荷重の比較 – Engesser の理論

5 端末圧縮荷重を受ける一定断面の片持ち梁の数値解析

表 5.2-2 座屈荷重の数値解の比較 – Timoshenko の理論

梁の剛性パラメータ		座屈荷重 P_T/P_E			安定最小荷重 P_{min}/P_E	
P_E/EA	P_E/GA	座屈計算式 (2.3-45)式	有限要素法	エネルギー法	有限要素法	エネルギー法
0.001	0.001	1.000	1.000	1.000	x	x
0.05	0.001	1.055	1.055	1.055	x	x
0.1	0.001	1.126	1.126	1.126	x	x
0.15	0.001	1.224	1.224	1.224	x	x
0.2	0.001	1.380	--	--	1.373	1.373
0.22	0.001	1.483	--	--	1.429	1.429
0.24	0.001	1.662	--	--	1.475	1.474
0.25	0.001	1.937	--	--	--	1.494
0.001	0.05	0.953	--	0.953	x	x
0.1	0.05	1.066	--	1.066	x	x
0.2	0.05	1.280	--	1.281	--	1.280
0.25	0.05	1.564	--	--	--	1.403
0.001	0.1	0.910	--	0.910	x	x
0.05	0.1	0.955	--	0.955	x	x
0.1	0.1	1.011	--	1.012	x	x
0.15	0.1	1.086	--	1.086	x	x
0.2	0.1	1.194	--	1.195	x	x
0.25	0.1	1.397	--	--	--	1.317
0.001	0.15	0.870	--	0.870	x	x
0.1	0.15	0.962	--	0.962	x	x
0.2	0.15	1.121	--	1.121	x	x
0.25	0.15	1.278	--	--	--	1.239
0.001	0.2	0.834	0.834	0.834	x	x
0.1	0.2	0.918	0.918	0.918	x	x
0.2	0.2	1.057	1.057	1.057	x	x
0.24	0.2	1.152	--	--	1.146	1.146
0.25	0.2	1.184	--	--	--	1.167
0.28	0.2	1.325	--	--	1.219	1.219
0.295	0.2	1.476	--	--	1.240	1.240
0.001	0.25	0.801	--	0.801	x	x
0.1	0.25	0.877	--	0.877	x	x
0.2	0.25	1.000	--	1.000	x	x
0.25	0.25	1.106	--	--	--	1.100
0.001	0.3	0.770	--	0.770	x	x
0.1	0.3	0.840	--	0.840	x	x
0.2	0.3	0.950	--	0.950	x	x

注 x : 存在しない
-- : 計算せず

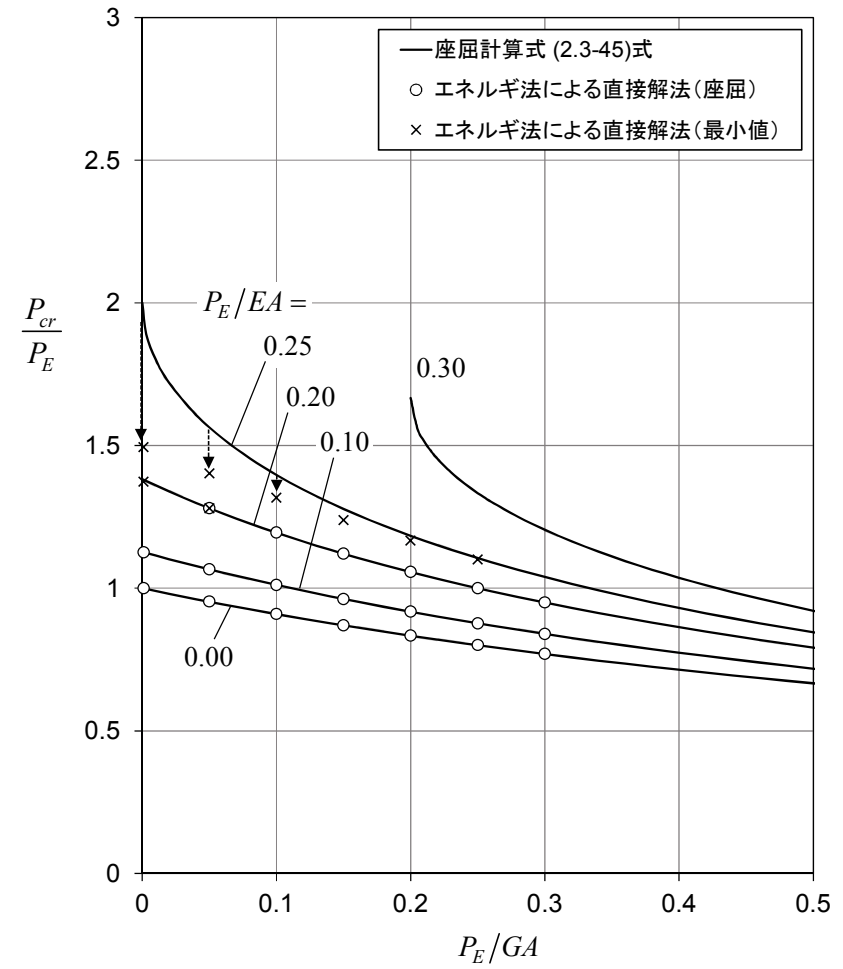
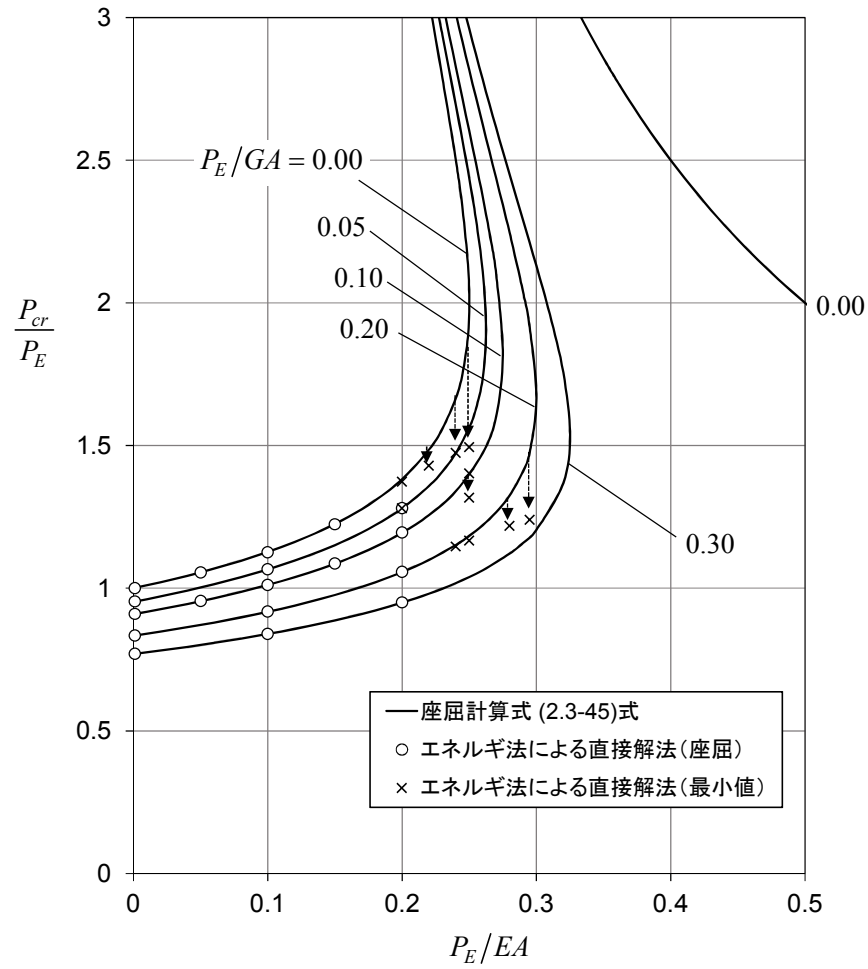


図 5.2-3 座屈荷重の比較 – Timoshenko の理論

5 端末圧縮荷重を受ける一定断面の片持ち梁の数値解析

表 5.2-3 圧縮座屈荷重の数値解の比較 - Haringx の理論

梁の剛性パラメータ		座屈荷重 P_H/P_E			安定最小荷重 P_{min}/P_E	
P_E/EA	P_E/GA	座屈計算式 (2.4-44)式	有限要素法	エネルギー法	有限要素法	エネルギー法
0.001	0.001	1.000	1.000	1.000	x	x
0.05	0.001	1.054	1.054	1.055	x	x
0.1	0.001	1.125	1.125	1.125	x	x
0.15	0.001	1.223	1.223	1.223	x	x
0.2	0.001	1.378	--	--	1.372	1.372
0.22	0.001	1.479	--	--	1.429	1.429
0.24	0.001	1.653	--	--	1.475	1.474
0.25	0.001	1.881	--	--	--	1.494
0.001	0.05	0.955	--	0.955	x	x
0.1	0.05	1.056	--	1.056	x	x
0.2	0.05	1.225	--	1.225	x	x
0.25	0.05	1.382	--	--	--	1.375
0.001	0.1	0.917	--	0.917	x	x
0.05	0.1	0.954	--	0.955	x	x
0.1	0.1	1.000	--	1.000	x	x
0.15	0.1	1.056	--	1.056	x	x
0.2	0.1	1.127	--	1.127	x	x
0.25	0.1	1.225	--	1.225	x	x
0.001	0.15	0.884	--	0.884	x	x
0.1	0.15	0.954	--	0.955	x	x
0.2	0.15	1.056	--	1.056	x	x
0.25	0.15	1.127	--	1.127	x	x
0.001	0.2	0.855	0.855	0.855	x	x
0.1	0.2	0.916	0.916	0.916	x	x
0.2	0.2	1.000	1.000	1.000	x	x
0.24	0.2	1.044	--	1.044	x	x
0.25	0.2	1.056	--	1.056	x	x
0.28	0.2	1.096	--	1.097	x	x
0.3	0.2	1.127	1.127	--	x	x
0.001	0.25	0.829	--	0.829	x	x
0.1	0.25	0.883	--	0.883	x	x
0.2	0.25	0.954	--	0.955	x	x
0.25	0.25	1.000	--	1.000	x	x

注 x : 存在しない
-- : 計算せず

表 5.2-4 引張座屈荷重の数値解の比較 - Haringx の理論

梁の剛性パラメータ		座屈荷重 P_H/P_E	
P_E/EA	P_E/GA	座屈計算式 (2.4-44)式	エネルギー法
0.001	0.05	-21.36	-21.48
0.001	0.1	-11.02	-11.02
0.05	0.1	-20.95	-21.07
0.001	0.15	-7.60	-7.62
0.05	0.15	-10.92	-10.94
0.1	0.15	-20.95	-20.97
0.001	0.2	-5.88	-5.88
0.1	0.2	-10.92	-10.94
0.15	0.2	-20.95	-21.02
0.001	0.25	-4.84	-4.84
0.1	0.25	-7.55	-7.55
0.15	0.25	-10.92	-10.94
0.2	0.25	-20.95	-20.97
0.001	0.3	-4.15	-4.15
0.05	0.3	-4.83	-4.81

5 端末圧縮荷重を受ける一定断面の片持ち梁の数値解析

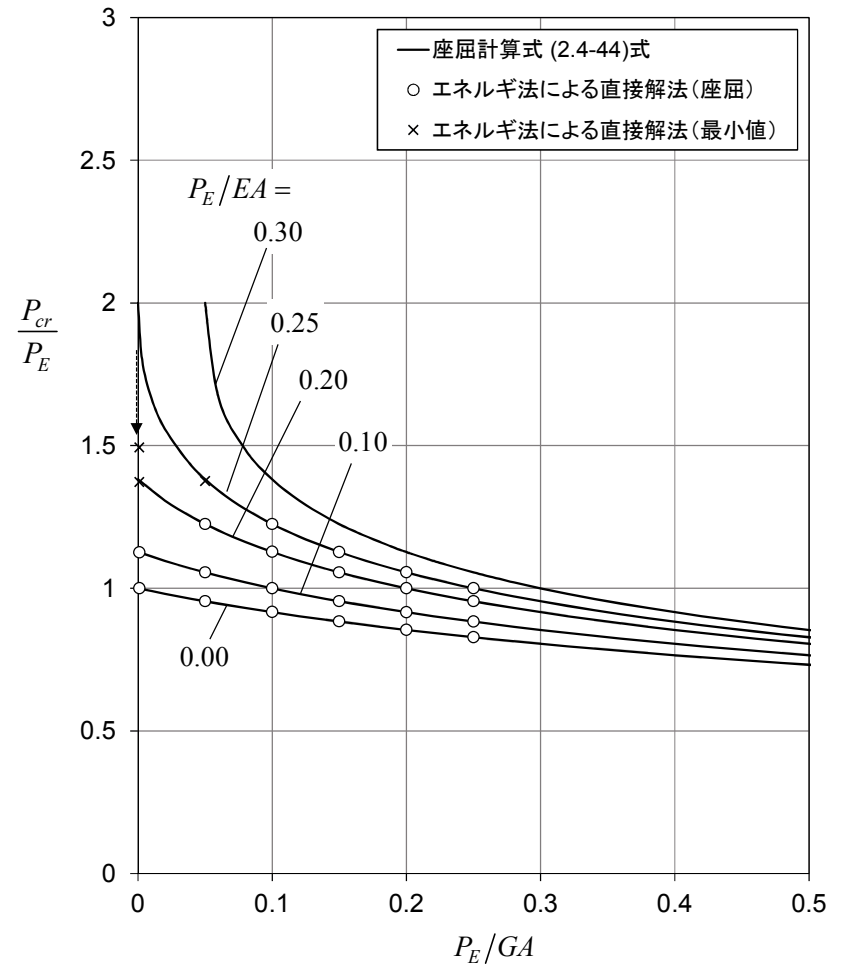
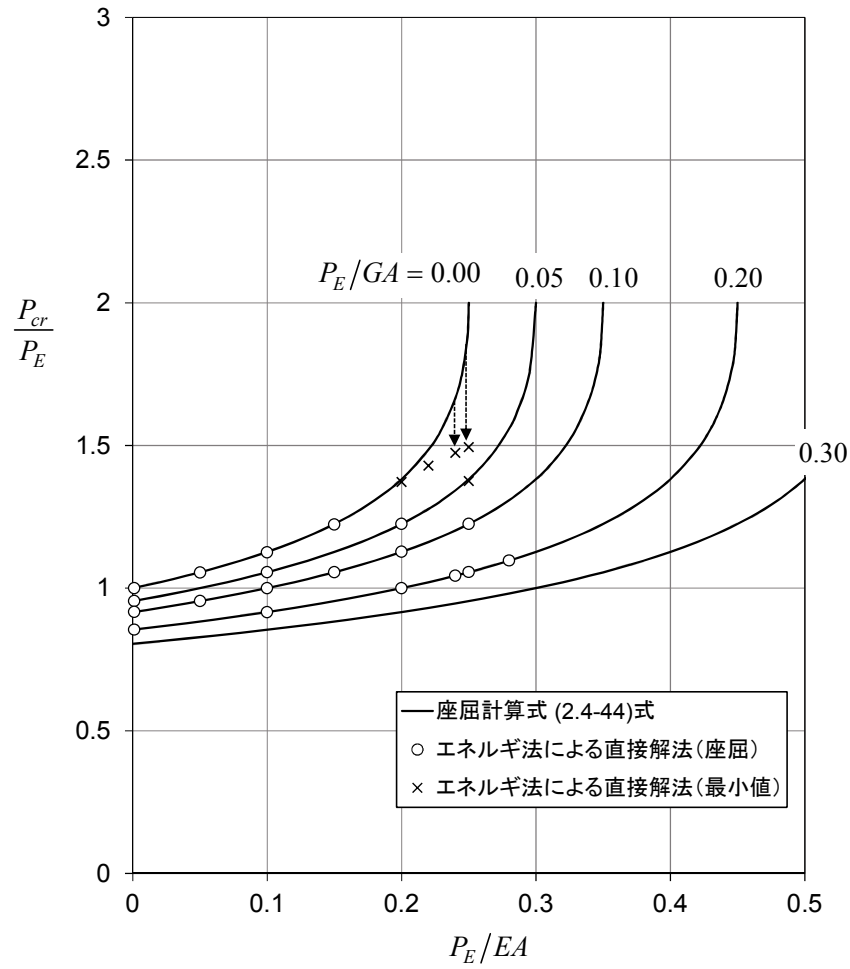


図 5.2-4 圧縮座屈荷重の比較 - Haringx の理論

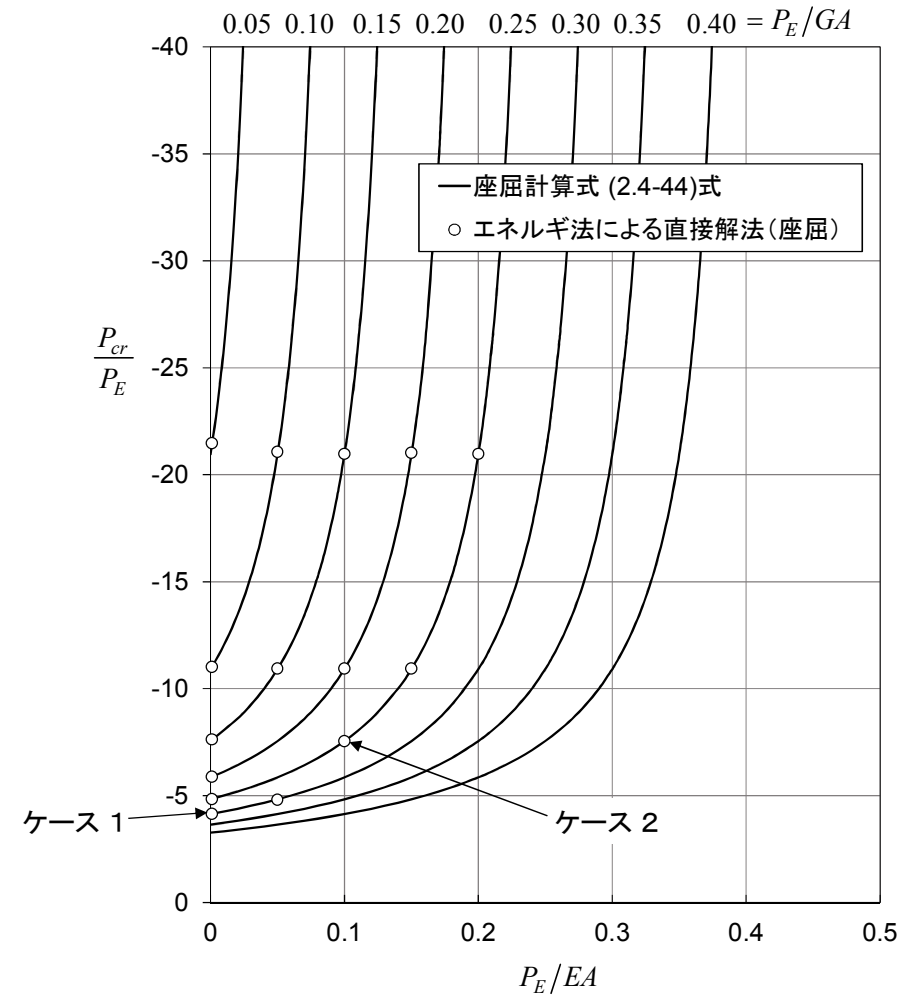
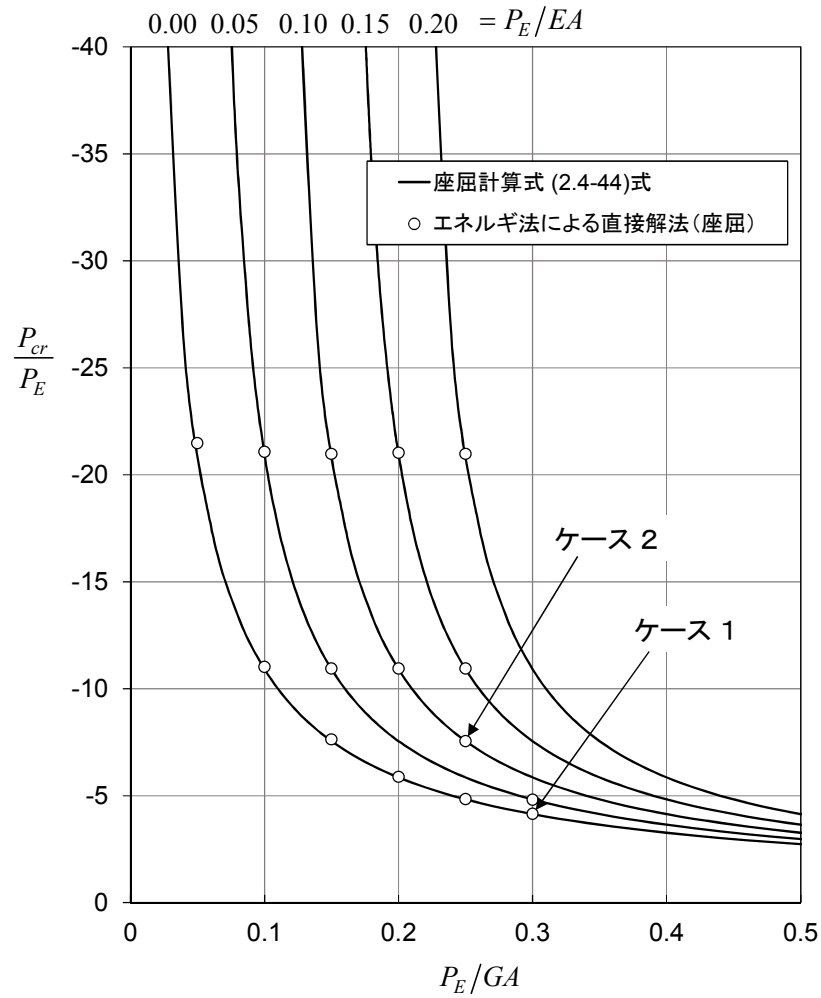


図 5.2-5 引張座屈荷重の比較 – Haringx の理論

5 端末圧縮荷重を受ける一定断面の片持ち梁の数値解析

表 5.2-5 圧縮座屈荷重の数値解の比較 - 宮崎の座屈荷重計算式とエネルギー法による直接解法

梁の剛性パラメータ		座屈荷重 P_M/P_E	
P_E/EA	P_E/GA	座屈計算式 (表1.1-1)	エネルギー法
0.05	0.05	0.864	0.865
0.05	0.1	0.830	0.831
0.05	0.15	0.799	0.800
0.05	0.2	0.770	0.771
0.1	0.05	0.779	0.782
0.1	0.1	0.754	0.756
0.1	0.15	0.730	0.732
0.1	0.2	0.707	0.710

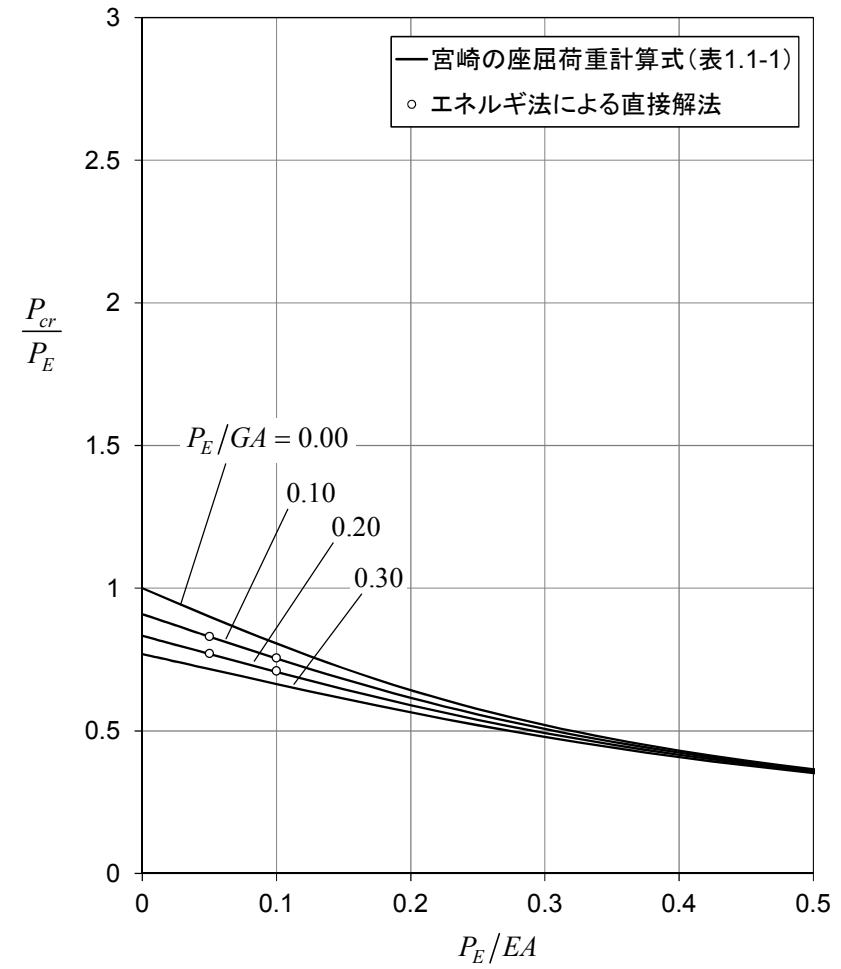
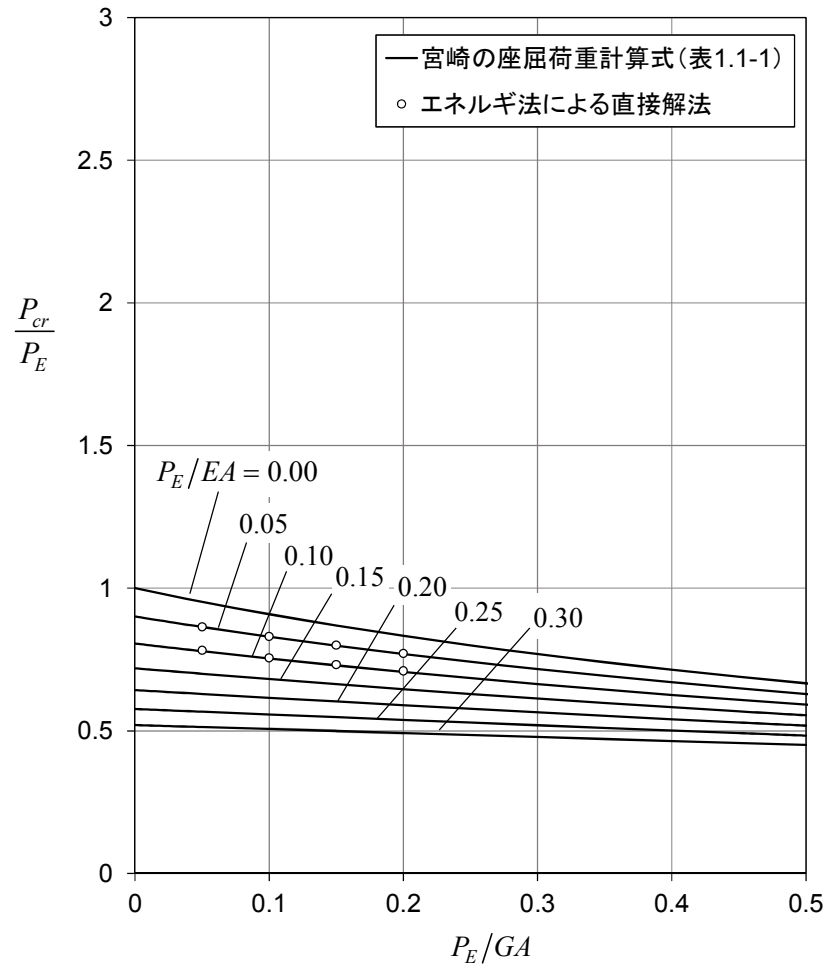


図 5.2-6 圧縮座屈荷重の比較 - 宮崎の座屈計算式

5 端末圧縮荷重を受ける一定断面の片持ち梁の数値解析

5.3 座屈後変形

エネルギー法による直接解法で計算した代表的な梁の変形を示す。飛び移り現象があるケースについては、梁の長さの1%の横方向の初期不整がある場合の荷重 - 変位線図も示した。

- 圧縮座屈 (Engesser の理論) : 図 5.2-2
 - ◇ ケース 1 ($P_E/EA = 0.05$, $P_E/GA = 0.10$) : 図 5.3-1, 図 5.3-2, 図 5.3-3
飛び移り現象が起きないケース
 - ◇ ケース 2 ($P_E/EA = 0.20$, $P_E/GA = 0.001$) : 図 5.3-4, 図 5.3-5, 図 5.3-6
飛び移り現象が起き始めるケース
 - ◇ ケース 3 ($P_E/EA = 0.25$, $P_E/GA = 0.01$) : 図 5.3-7, 図 5.3-8, 図 5.3-9
飛び移り現象が明らかなケース
- 引張座屈 (Haringx の理論) : 図 5.2-5
 - ◇ ケース 1 ($P_E/EA = 0.001$, $P_E/GA = 0.30$) : 図 5.3-10, 図 5.3-11, 図 5.3-12
 - ◇ ケース 2 ($P_E/EA = 0.10$, $P_E/GA = 0.25$) : 図 5.3-13, 図 5.3-14, 図 5.3-15

図 5.3-10～図 5.3-15 によると、Haringx の理論における引張座屈の座屈荷重と伸び変形は非常に大きく、横変形は小さいことがわかる。座屈後に安定な変形状態が存在する。引張座屈のケース 2 では座屈直後の変形が計算できないので、圧縮座屈の場合と同様に飛び移り現象があるものと考えられる (図 5.3-13)。

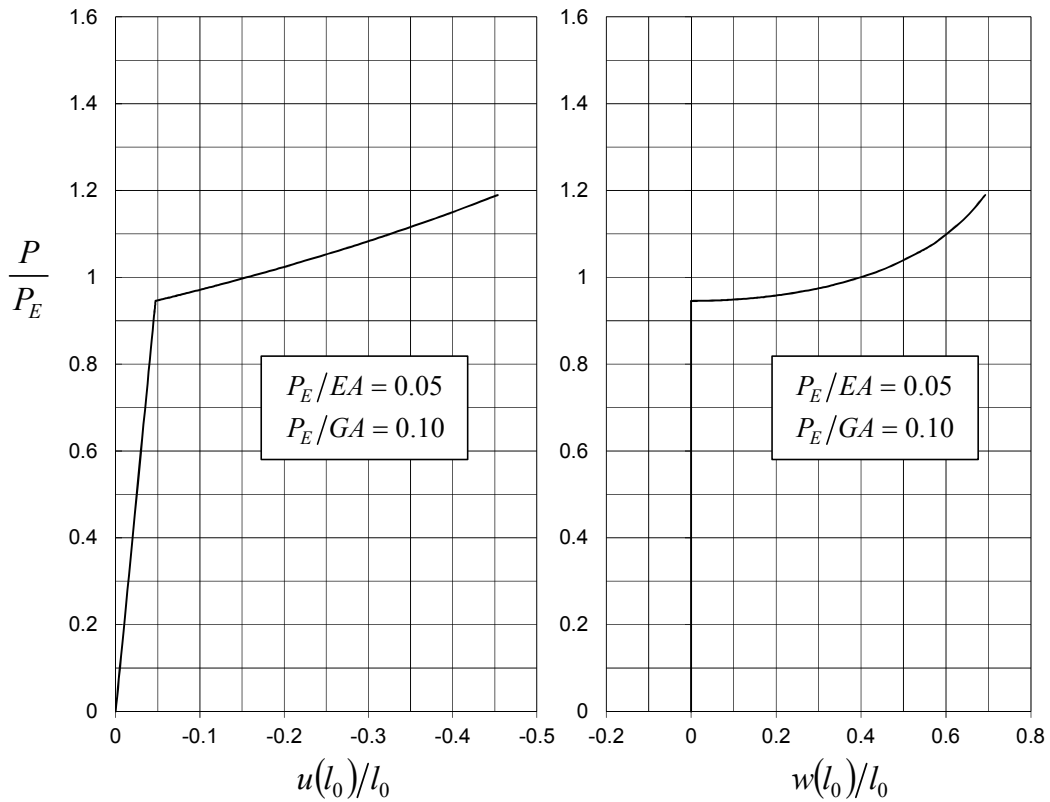


図 5.3-1 伸張せん断エラスティカの荷重-変位線図 - Engesser の理論, ケース 1

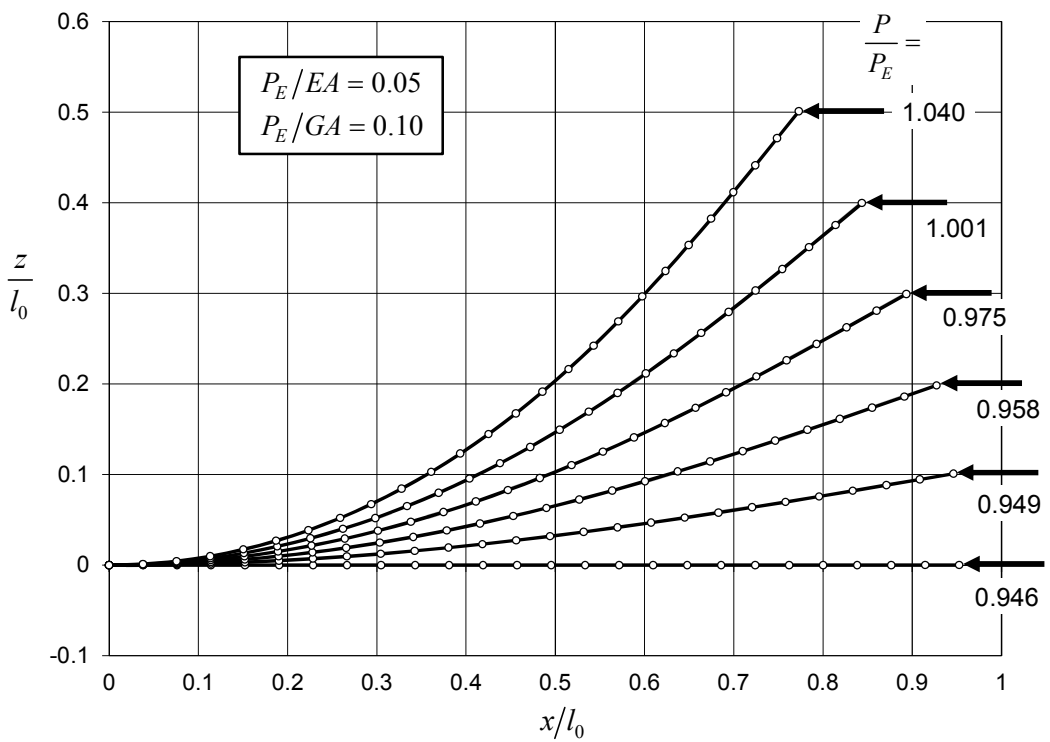


図 5.3-2 伸張せん断エラスティカの変形 - Engesser の理論, ケース 1

5 端末圧縮荷重を受ける一定断面の片持ち梁の数値解析

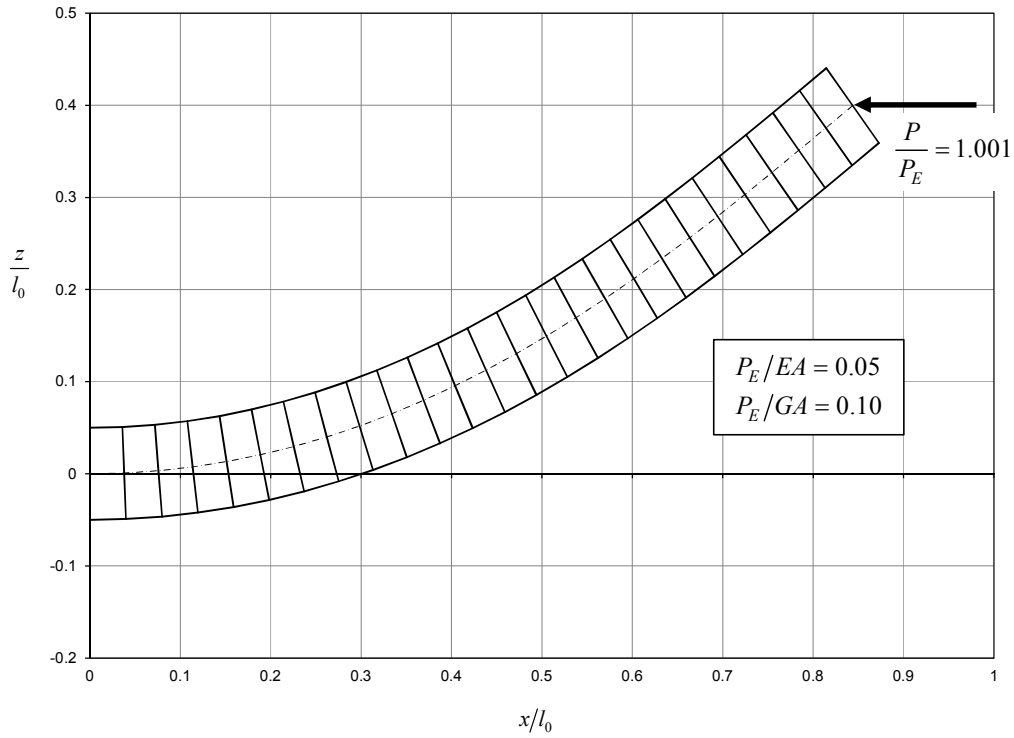


図 5.3-3 伸張せん断エラスティカの変形 – Engesser の理論, ケース 1

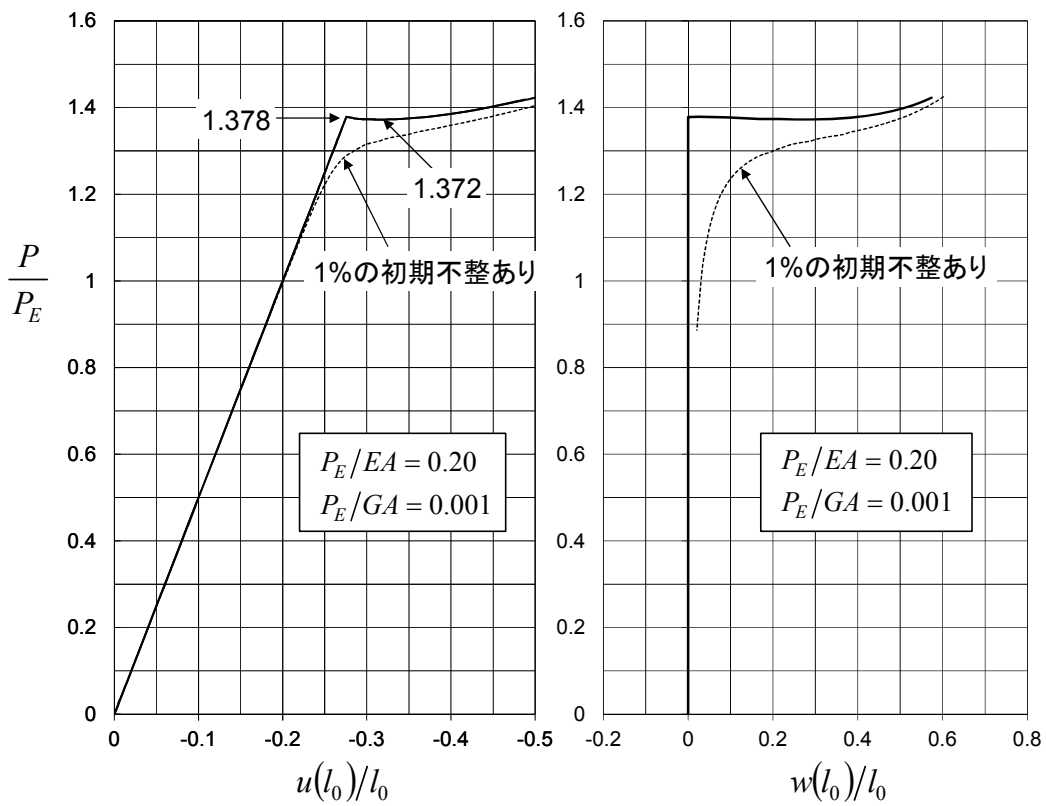


図 5.3-4 (1/2) 伸張せん断エラスティカの荷重-変位線図 – Engesser の理論, ケース 2

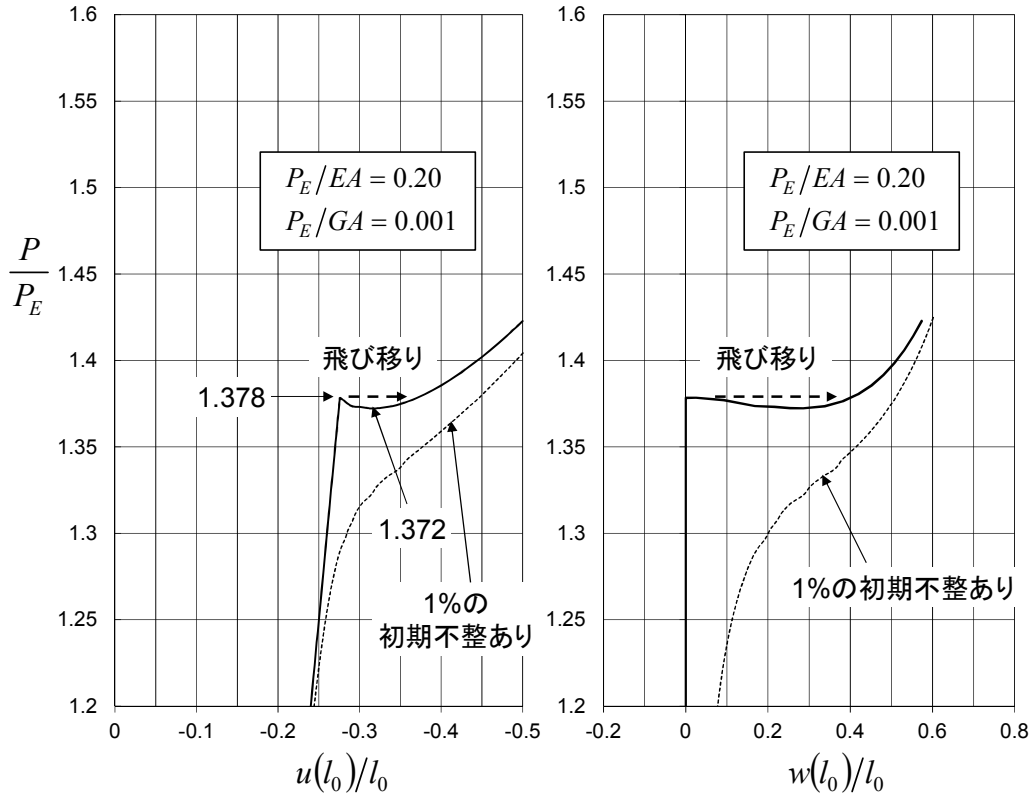


図 5.3-4 (2/2) 伸張せん断エラスティカの荷重-変位線図 - Engesser の理論, ケース 2

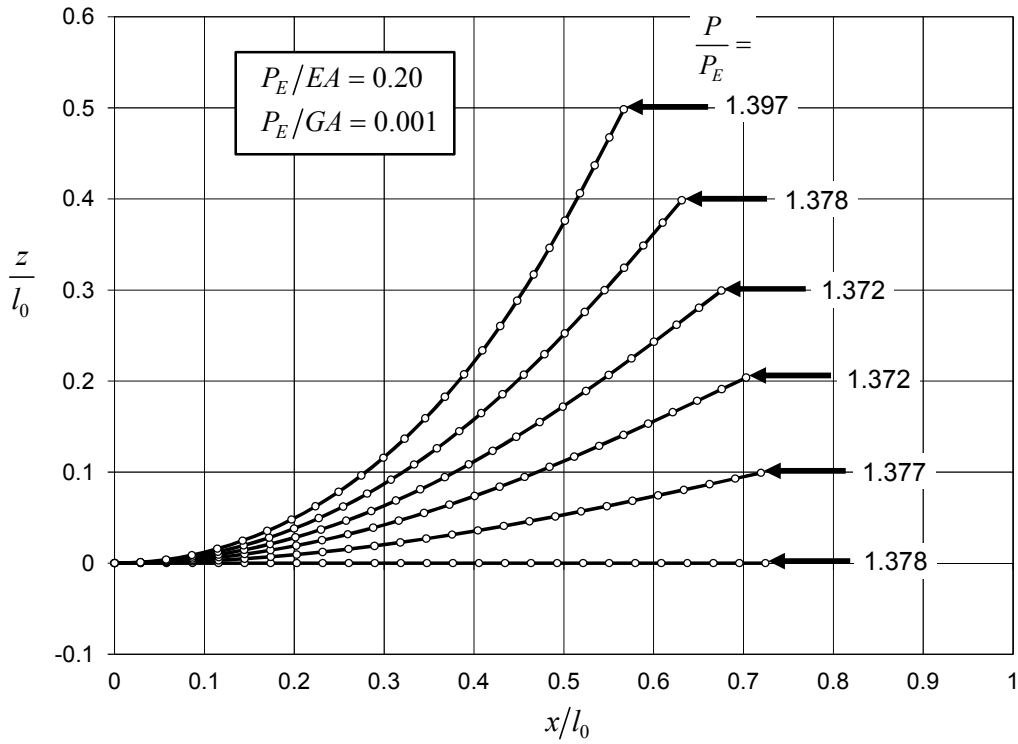


図 5.3-5 伸張せん断エラスティカの変形 - Engesser の理論, ケース 2

5 端末圧縮荷重を受ける一定断面の片持ち梁の数値解析

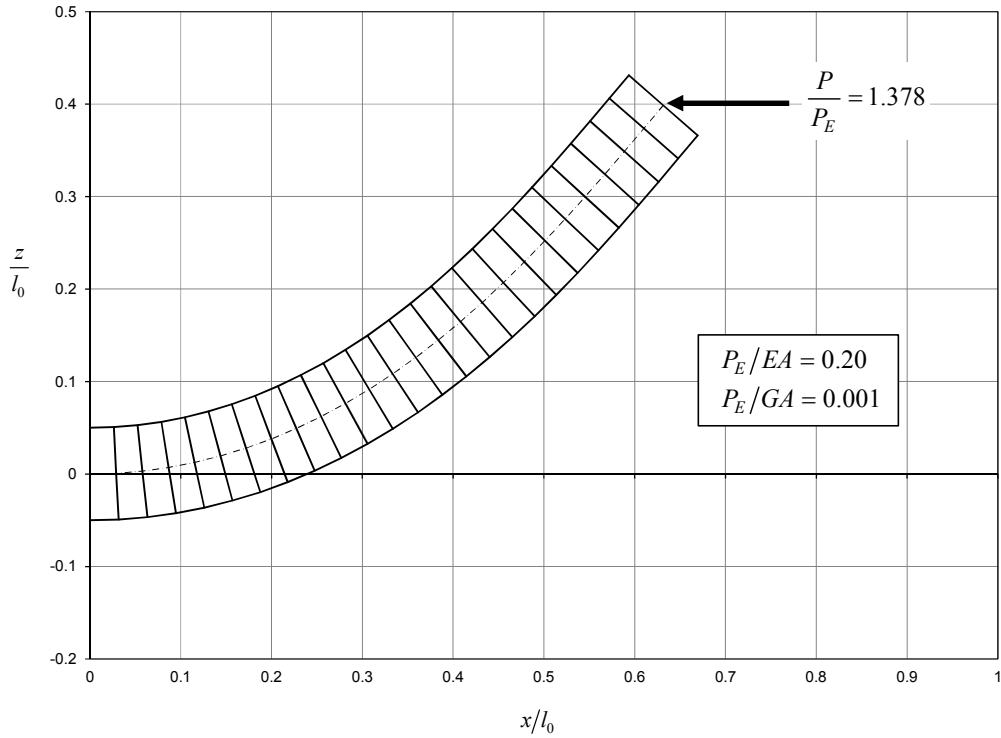


図 5.3-6 伸張せん断エラスティカの変形 – Engesser の理論, ケース 2

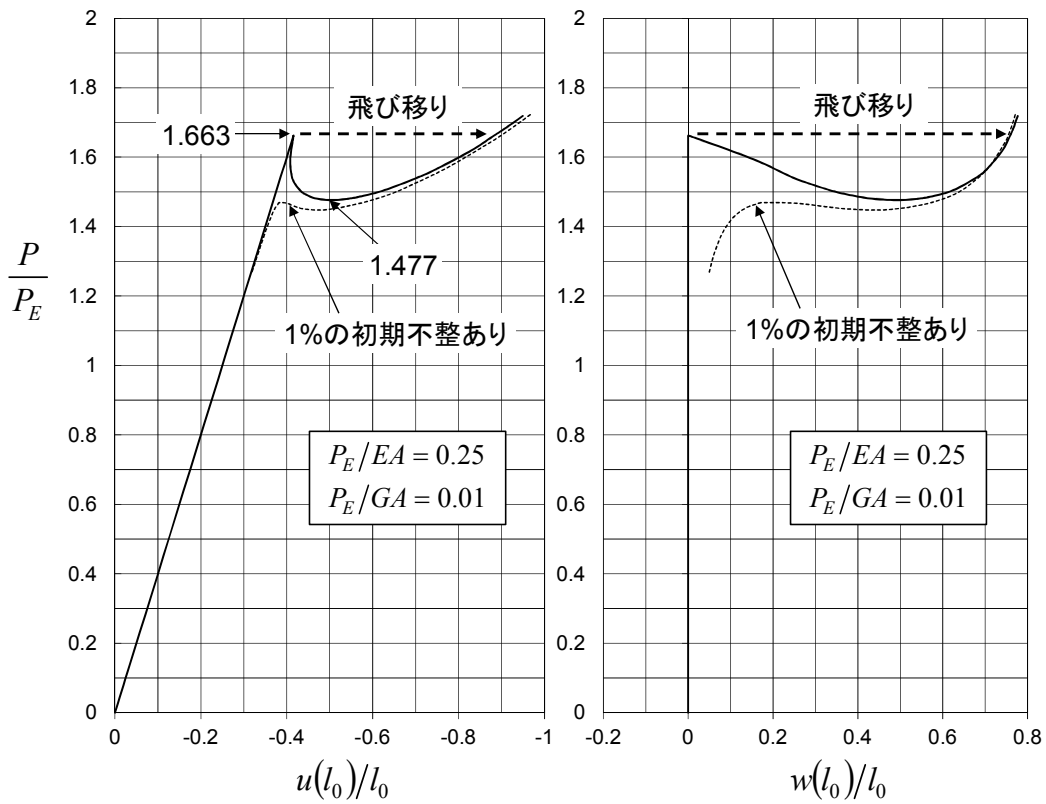


図 5.3-7 伸張せん断エラスティカの荷重-変位線図 – Engesser の理論, ケース 3

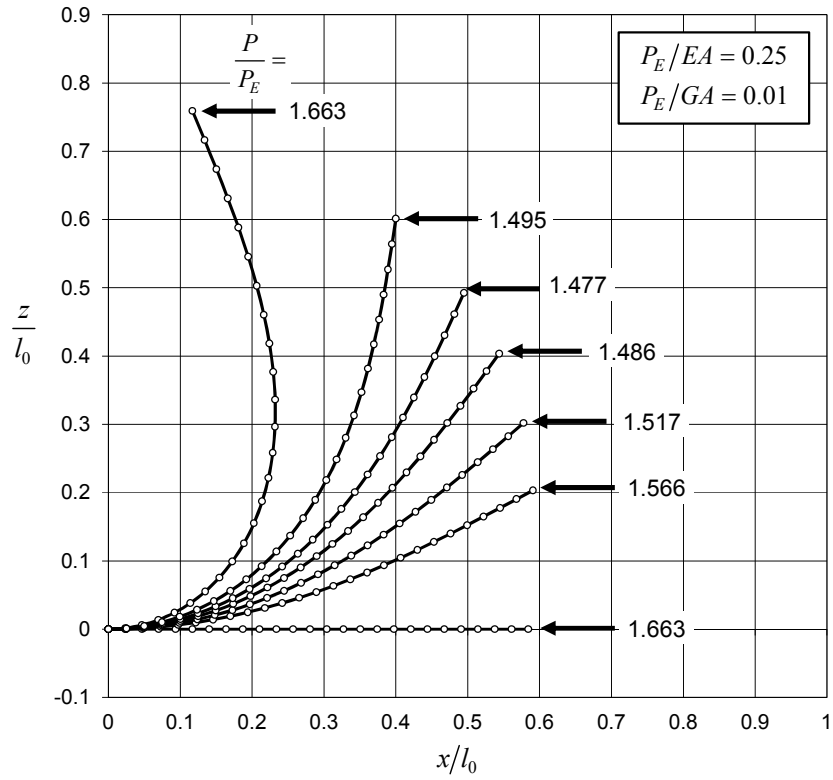


図 5.3-8 伸張せん断エラスティカの変形 - Engesser の理論, ケース 3

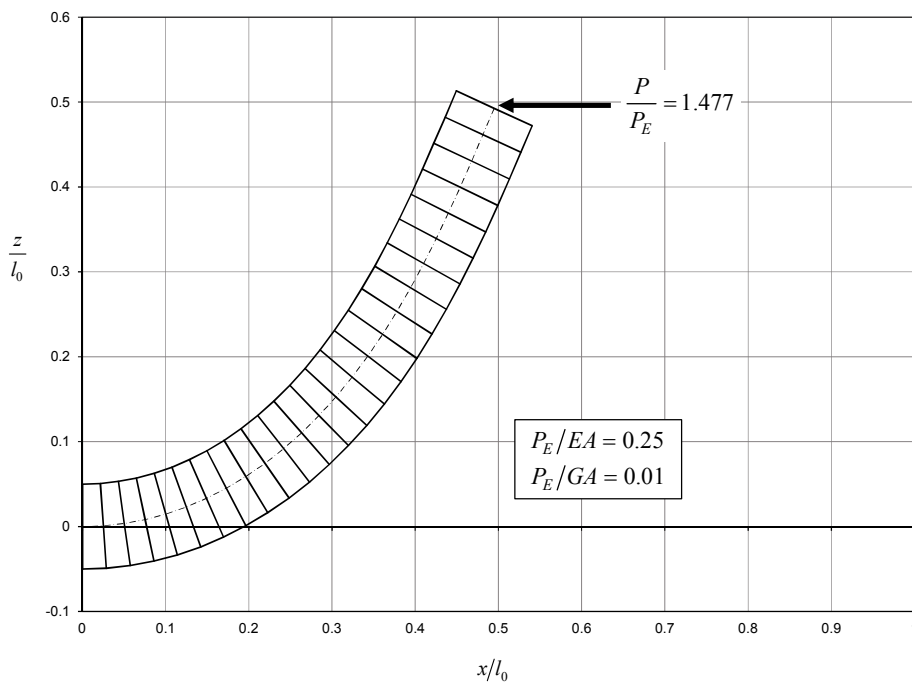


図 5.3-9 伸張せん断エラスティカの変形 - Engesser の理論, ケース 3

5 端末圧縮荷重を受ける一定断面の片持ち梁の数値解析

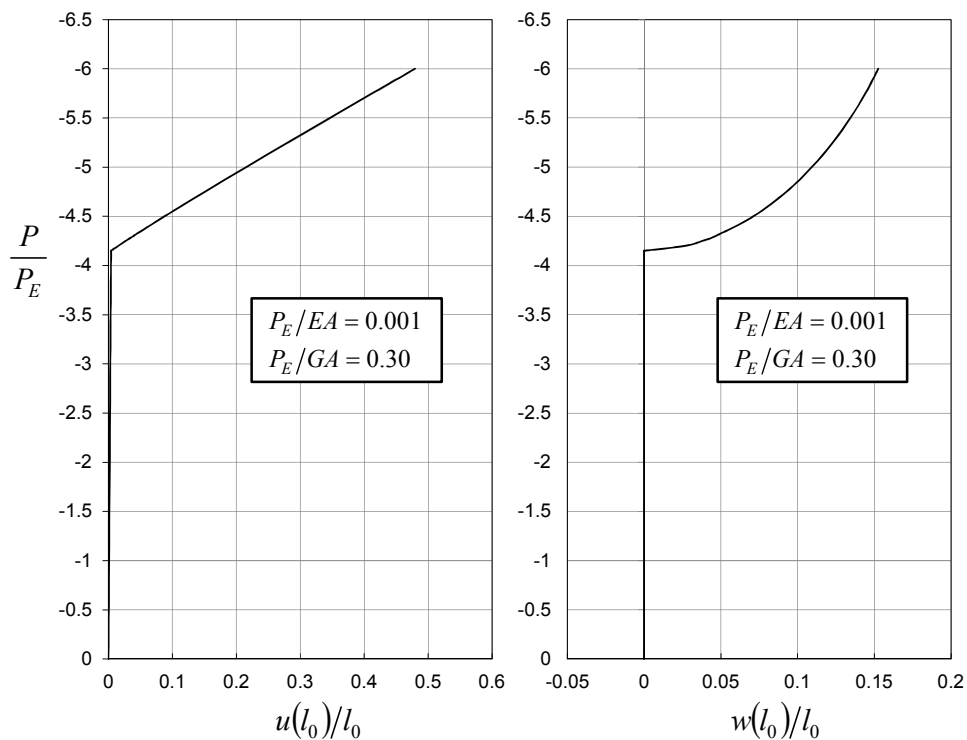


図 5.3-10 伸張せん断エラスティカの荷重-変位線図 - Haringx の理論, ケース 1 (引張)

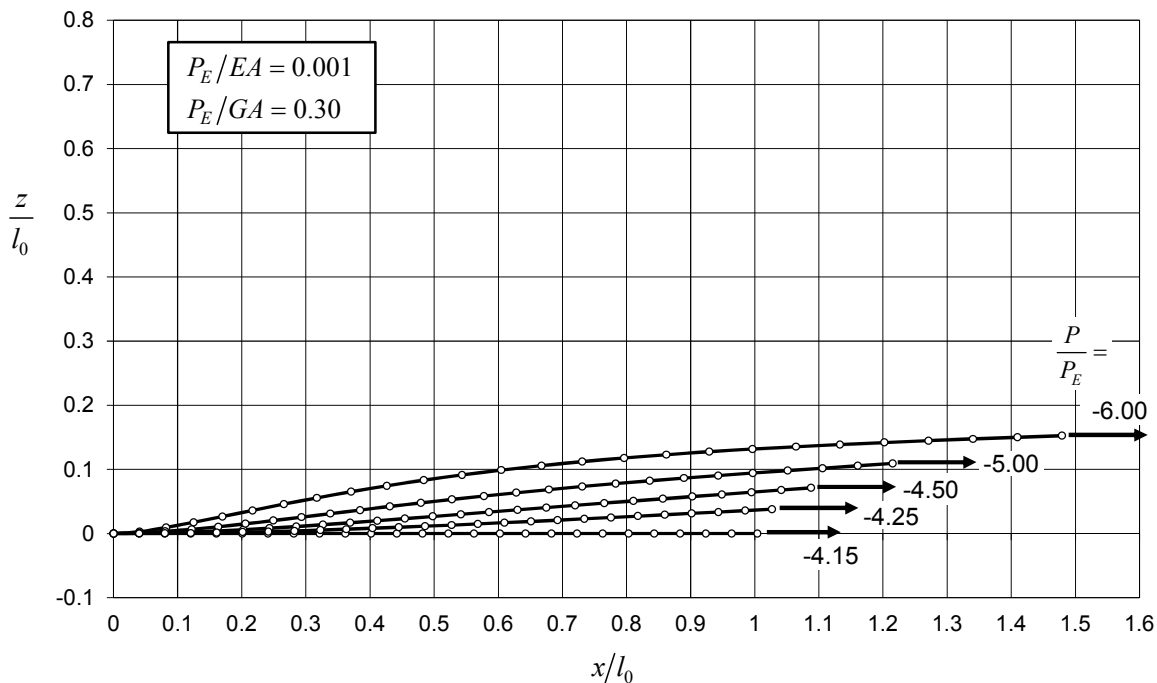


図 5.3-11 伸張せん断エラスティカの変形 - Haringx の理論, ケース 1 (引張)

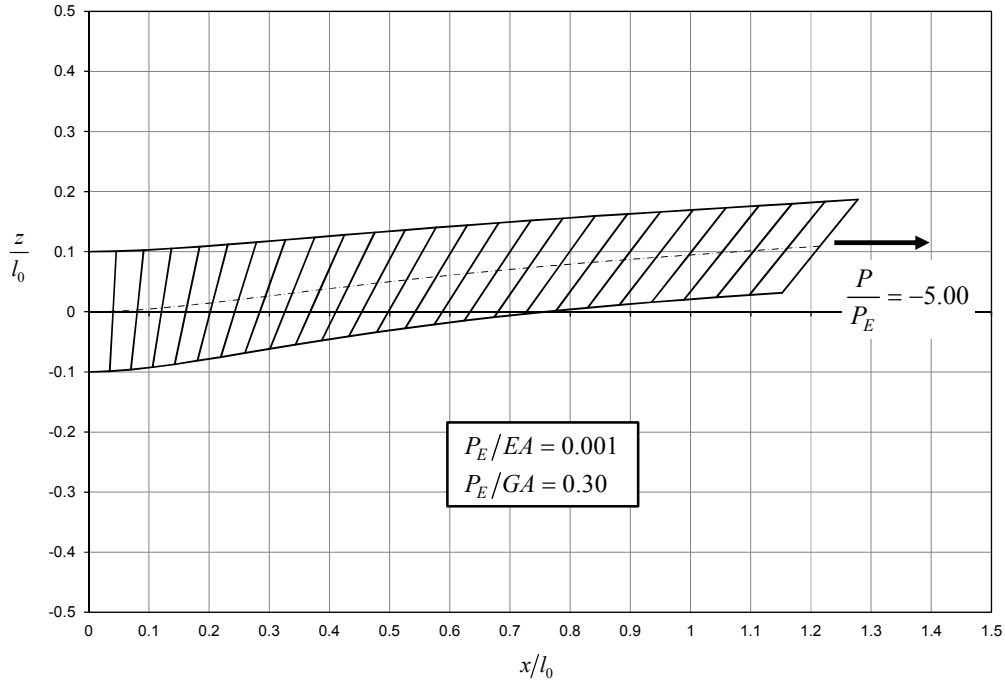


図 5.3-12 伸張せん断エラスティカの変形 – Haringx の理論, ケース 1 (引張)

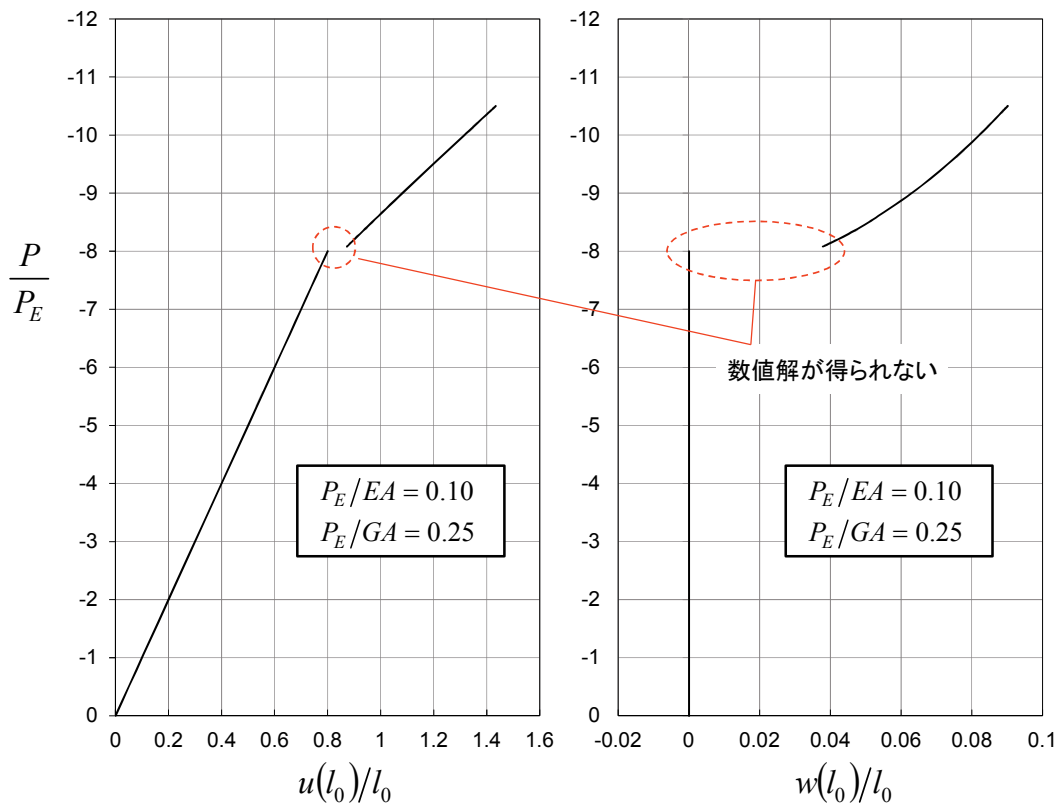


図 5.3-13 伸張せん断エラスティカの荷重-変位線図 – Haringx の理論, ケース 2 (引張)

5 端末圧縮荷重を受ける一定断面の片持ち梁の数値解析

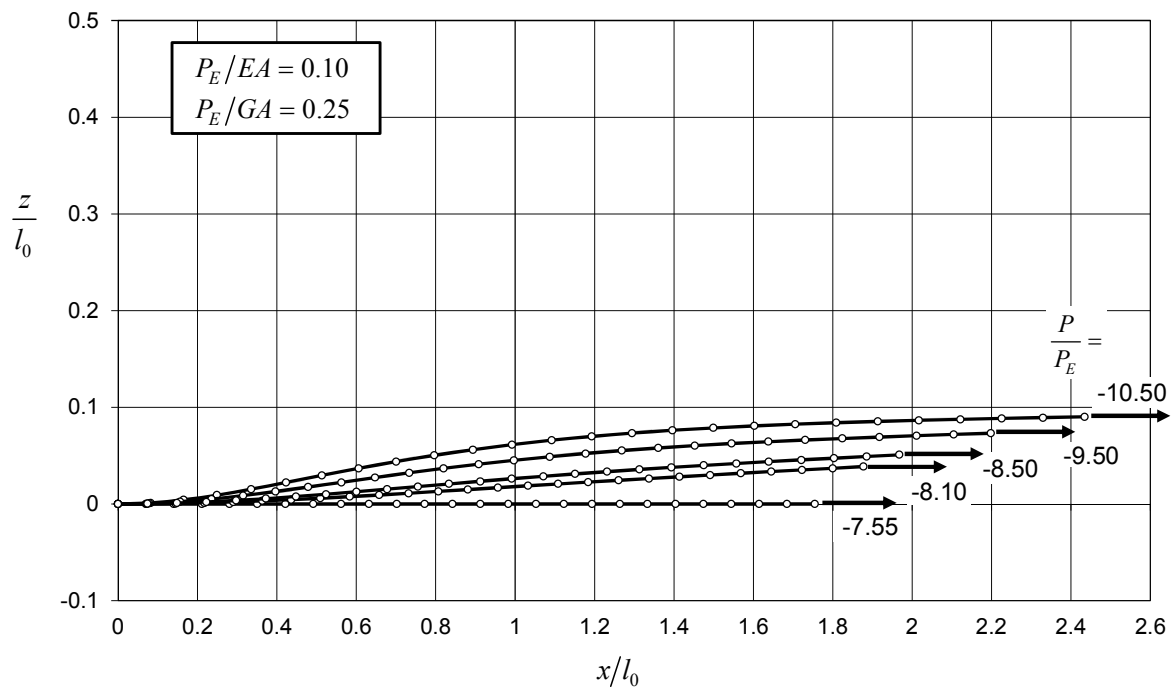


図 5.3-14 伸張せん断エラスティカの変形 - Haringx の理論, ケース 2 (引張)

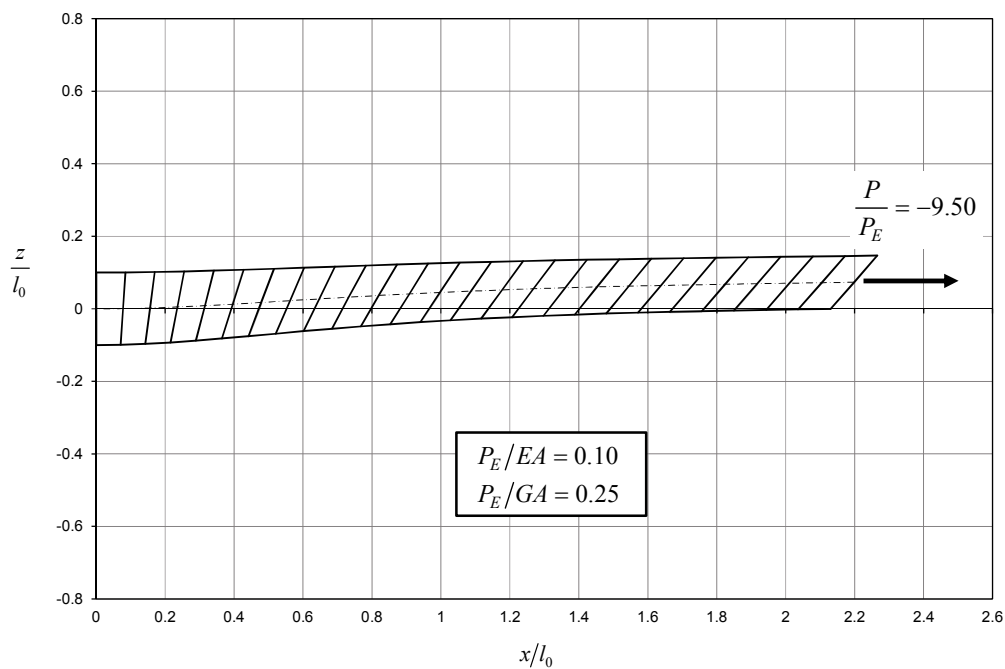


図 5.3-15 伸張せん断エラスティカの変形 - Haringx の理論, ケース 2 (引張)

7 Laced Column の座屈解析

前章までに軸方向伸び変形と横せん断変形を考慮した梁の大変形圧縮挙動について、伸張せん断エラスティカの理論と三次元弾性論を用いて検討してきた。伸張せん断エラスティカの理論における軸力とせん断力の方向の定義方法（Engesser, Timoshenko, Haringx の理論）が座屈荷重に与える影響を明らかにすることができたが、Engesser の理論と Timoshenko の理論のどちらが適切かについて結論は得られていない。本章では、伸張せん断梁の具体例として、軸力部材だけで構成された組立梁（Laced Column）の圧縮座屈荷重を解析して、伸張せん断エラスティカの理論等の他のモデルによる結果と比較し、軸力とせん断力の方向、構成方程式の影響について考察した。Laced Column の幾何学的非線形解析には著者が開発したエネルギー法を使った直接解法（滝 2008）を適用した。Laced Column を解析対象として選んだのは、軸力部材だけで構成された梁であるため、幾何学的非線形解析が容易なことと、軸剛性、せん断剛性、曲げ剛性の比を独立に変更することができるからである。

7.1 組立梁

圧縮座屈に関してせん断剛性の影響が顕著に出る梁（柱）として、図 7.1-1 に示すような組立梁がある。このような梁は曲げ剛性に比べてせん断剛性が低いため、圧縮座屈荷重がオイラー座屈荷重よりも低くなる。曲げ剛性とせん断剛性の計算式は Bleich 1952 と Timoshenko and Gere 1961 に載っている。

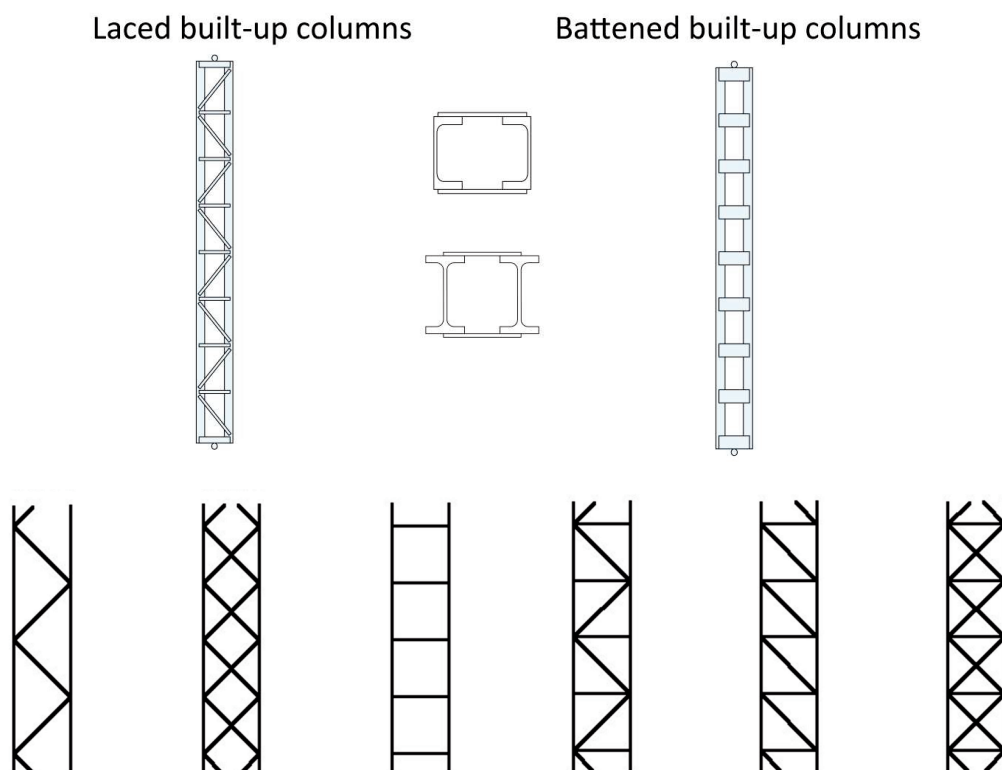


図 7.1-1 組立梁の種類

7 Laced Column の座屈解析

7.2 解析対象

軸方向伸び剛性、横せん断剛性、曲げ剛性を独立に変化させることができる梁を解析対象とするために、図 7.2-1 に示すようなピン結合された軸力部材だけで構成される長さ l_0 の組立梁の柱 (Laced Column) を考え、一端を固定し、他端に圧縮荷重を負荷する。この梁の等価曲げ剛性 EI 、等価軸剛性 EA 、等価せん断剛性 GA は次の式で表わされる (Timoshenko and Gere 1961)。

$$EA = 2EA_s, EI = \frac{EA_s b^2}{2}, GA = 2EA_d \sin \phi \cos^2 \phi, \phi = \tan^{-1} \left(\frac{b}{d} \right) \quad (7.2-1)$$

ここで、 b : 柱の間隔、 d : 横渡し部材のピッチ

A_s : 柱の断面積 (1 本分)

A_b : 横渡し部材の断面積

A_d, ϕ : 斜め部材の断面積, 角度

E : 軸力部材のヤング率

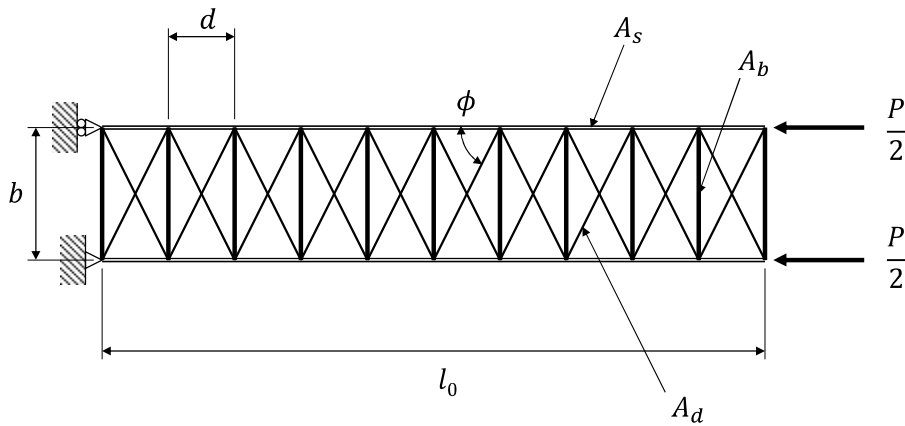


図 7.2-1 解析対象 – Laced Column

7.3 棒モデルと解析方法

Laced Column を構成するすべての部材は軸力だけを受け持ち、部材どうしのすべての結合点はピン結合であるとする。これを棒モデルと呼ぶ。構成方程式 (軸力部材の軸応力と軸歪の関係) については以下の 2 つのケースを考える。

- (1) 軸力部材の無負荷時の断面積を基準とした応力 (公称応力) と公称歪を用い、両者の間に線形のフックの法則が成り立つとする。

$$\sigma = \frac{P}{A_{e0}}, \varepsilon = \frac{\Delta l_e}{l_{e0}}, \sigma = E\varepsilon \quad (7.3-1)$$

ここで、 P : 部材の軸力、 A_{e0} : 無負荷時の部材の断面積

Δl_e : 部材の伸び、 l_{e0} : 無負荷時の部材の長さ

σ : 公称応力、 ε : 公称歪、 E : ヤング率

このとき軸力部材 (棒要素) の歪エネルギーは次の式で表される。

$$\int_0^{l_{e0}} A_{e0} \sigma d\varepsilon = \int_0^{l_{e0}} EA_{e0} \varepsilon d\varepsilon = \frac{1}{2} [EA_{e0} \varepsilon^2]_0^{l_{e0}} = \frac{EA_{e0} \Delta l_e^2}{2l_{e0}} \quad (7.3-2)$$

- (2) 軸力部材の無負荷時の断面積を基準とした応力（公称応力）とグリーンの歪を用い、両者の間に線形のフックの法則が成り立つとする．軸力部材の応力の向きは部材の軸方向であるので、公称応力とキルヒホッフの応力は等しい．

$$S = \frac{P}{A_{e0}}, e = \frac{\Delta l_e}{l_{e0}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta l_e}{l_{e0}} \right)^2, S = Ee \quad (7.3-3)$$

ここで、 P ：部材の軸力、 A_{e0} ：無負荷時の部材の断面積

Δl_e ：部材の伸び、 l_{e0} ：無負荷時の部材の長さ

S ：キルヒホッフの応力、 e ：グリーンの歪、 E ：ヤング率

このとき軸力部材（棒要素）の歪エネルギーは次の式で表される．

$$\int_0^{l_{e0}} A_{e0} S de = \int_0^{l_{e0}} EA_{e0} e de = \frac{1}{2} [EA_{e0} e^2]_0^{l_{e0}} = \frac{EA_{e0}}{2} \left[\frac{\Delta l_e}{l_{e0}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta l_e}{l_{e0}} \right)^2 \right]^2 \quad (7.3-4)$$

解析には以下の数値を用いる．

$$A_s = 10 \text{ mm}^2, A_b = 10000 \text{ mm}^2$$

$$d = 10 \text{ mm}, l_0 = 100 \text{ mm}, E = 100 \text{ MPa}$$

A_d, b ：変化させて、望みの等価剛性パラメータを得る．

$$P_E/EA = 0.025, 0.050, \text{ 等価せん断剛性パラメータを変化させる.}$$

$$P_E/GA = 0.20, \text{ 等価軸剛性パラメータを変化させる.}$$

エネルギー法を使った直接解法により、幾何学的非線形を考慮した負荷荷重と変形の関係を求める。滝 2012 のトラス構造の解析の項に示したように、変形後の軸力部材の長さを計算するときに線形化を行わなければ、幾何学的非線形問題の厳密解が得られる。横変形が急激に増大する荷重を座屈荷重とする。

7.4 比較に用いる解析モデル

(1) 伸張せん断エラスティカの座屈荷重計算式

2.5 項に示した座屈荷重計算式を用いる．これらの座屈荷重計算式では、断面力と公称歪の間に線形のフックの法則を仮定している．

(2) 三次元弾性論による片持ち円形断面梁の座屈荷重厳密解

Laced Column の軸剛性 ($P_E/EA = 0.025$) とせん断剛性 (変化させる) を模擬するために三次元弾性論による解析で用いた寸法と弾性係数は以下のとおりである．三次元弾性論による厳密解では、キルヒホッフの応力とグリーンの歪の間に線形のフックの法則を仮定している．

円形断面の半径： $a = 1$

円形断面の梁のせん断剛性断面補正係数： $k = 0.886$

片持ち梁の長さ： $L = 4.967$ ($P_E/EA = 0.025$ に対応)

7 Laced Column の座屈解析

軸方向のヤング率 : $E_L = 1000$

断面内のヤング率 (面内等方性) : $E_T = 10$

軸方向のポアソン比 : $\nu_{LT} = 0.3$

断面内のポアソン比 : $\nu_{TT} = 0.3$

軸方向のせん断弾性係数 : $G_{LT} \rightarrow$ 変化させる.

(3) 宮崎の座屈荷重計算式

表 1.1-1 に示す宮崎 2012 の座屈荷重計算式では, キルヒホッフの応力とグリーンの歪の間に線形のフックの法則を仮定している.

$$\frac{P_{En,M}}{P_E} = \frac{(1+3\varepsilon_i) \left(1 + \varepsilon_i - \frac{P_{En,M}}{P_E} \frac{P_E}{GA} \right)}{(1+\varepsilon_i)^2} \quad (7.4-1)$$
$$\frac{P_{En,M}}{EA} = -\varepsilon_i(1+\varepsilon_i)$$

ここで, ε_i は変数である.

MS-Excel のソルバーを使って上の2つの式が成り立つ ε_i を求めることにより, この式を解くことができる.

7.5 解析結果

7.5.1 変形

7.5.1.1 公称応力と公称歪の間にフックの法則が成り立つ場合

軸剛性パラメータ $P_E/EA = 0.05$ ，せん断剛性パラメータ $P_E/GA = 0.10$ の Laced Column の棒モデルによる変位解析結果を図 7.5-1 と図 7.5-2 に示す．これらの図の中には Engesser の理論に基づく伸張せん断エラスティカのエネルギー法による解析結果も示した．Laced Column の荷重 - 歪線図と変形は，Engesser の理論に基づく伸張せん断エラスティカの解析結果とほぼ一致している．

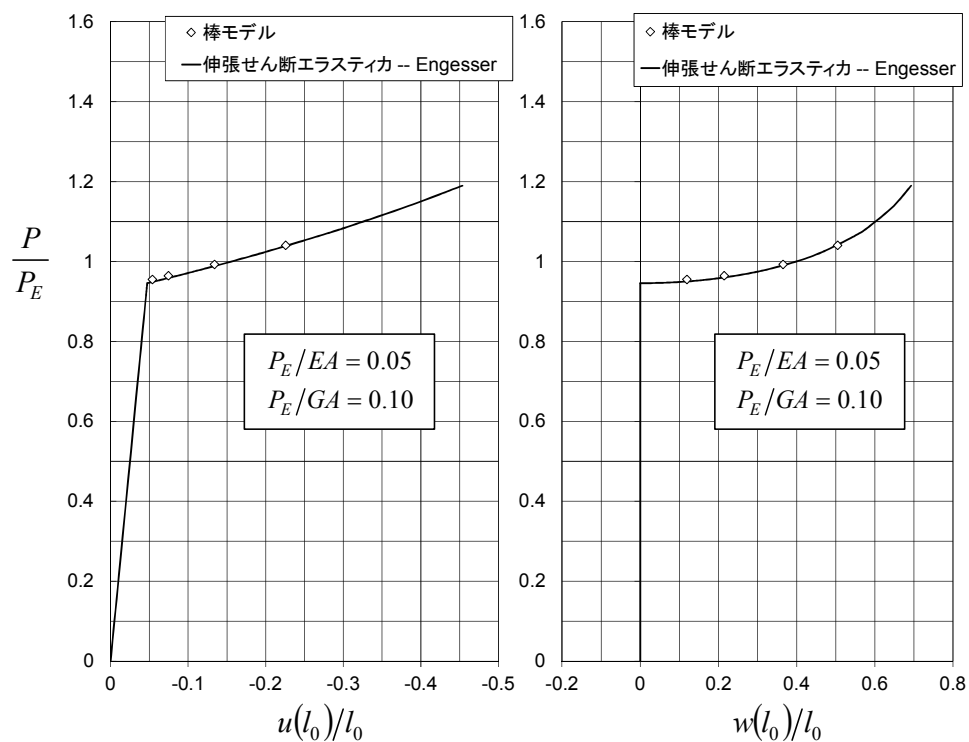


図 7.5-1 Laced Column の荷重 - 変位解析結果の例

7 Laced Column の座屈解析

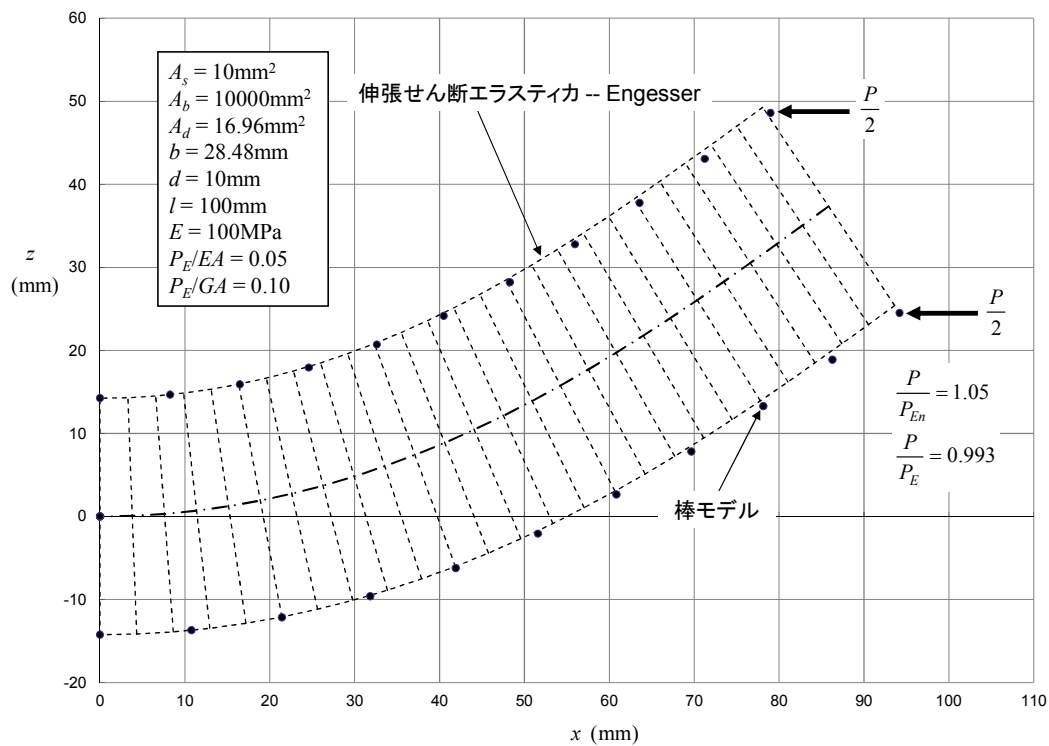
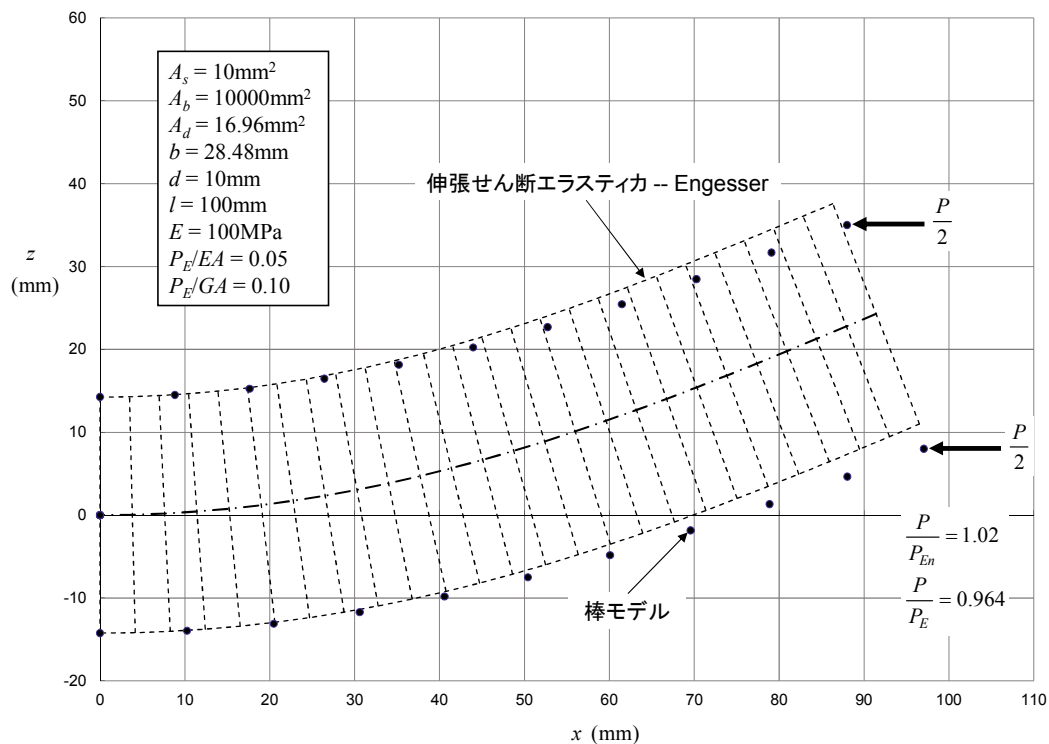


図 7.5-2 Laced Column の変形解析結果の例

7.5.1.2 キルヒホッフの応力とグリーンの歪の間にフックの法則が成り立つ場合

軸剛性パラメータとせん断剛性パラメータが $[P_E/EA = 0.025, P_E/GA = 0.20]$, および $[P_E/EA = 0.05, P_E/GA = 0.10]$ の Laced Column の棒モデルによる変位解析結果を図 7.5-3 に示す。この図の中には伸張せん断エラスティカのエネルギー法による解析結果も示した。Laced Column の荷重-歪線図と変形は、伸張せん断エラスティカの解析結果とほぼ一致している。前項の結果（公称応力と公称歪の間にフックの法則が成り立つ）場合にくらべて、座屈後の変位曲線の傾きが小さくなっている。特に、 $[P_E/EA = 0.05, P_E/GA = 0.10]$ の場合には、棒モデルの解析でも、伸張せん断エラスティカの解析でも、荷重が大きくなると安定な釣り合い状態が存在せず、変位が発散する。図中には長さの 1% の横方向の初期不整がある場合の荷重-変位曲線も示したが、この場合には座屈荷重よりも小さい荷重で変位が発散し、不安定になる。

7 Laced Column の座屈解析

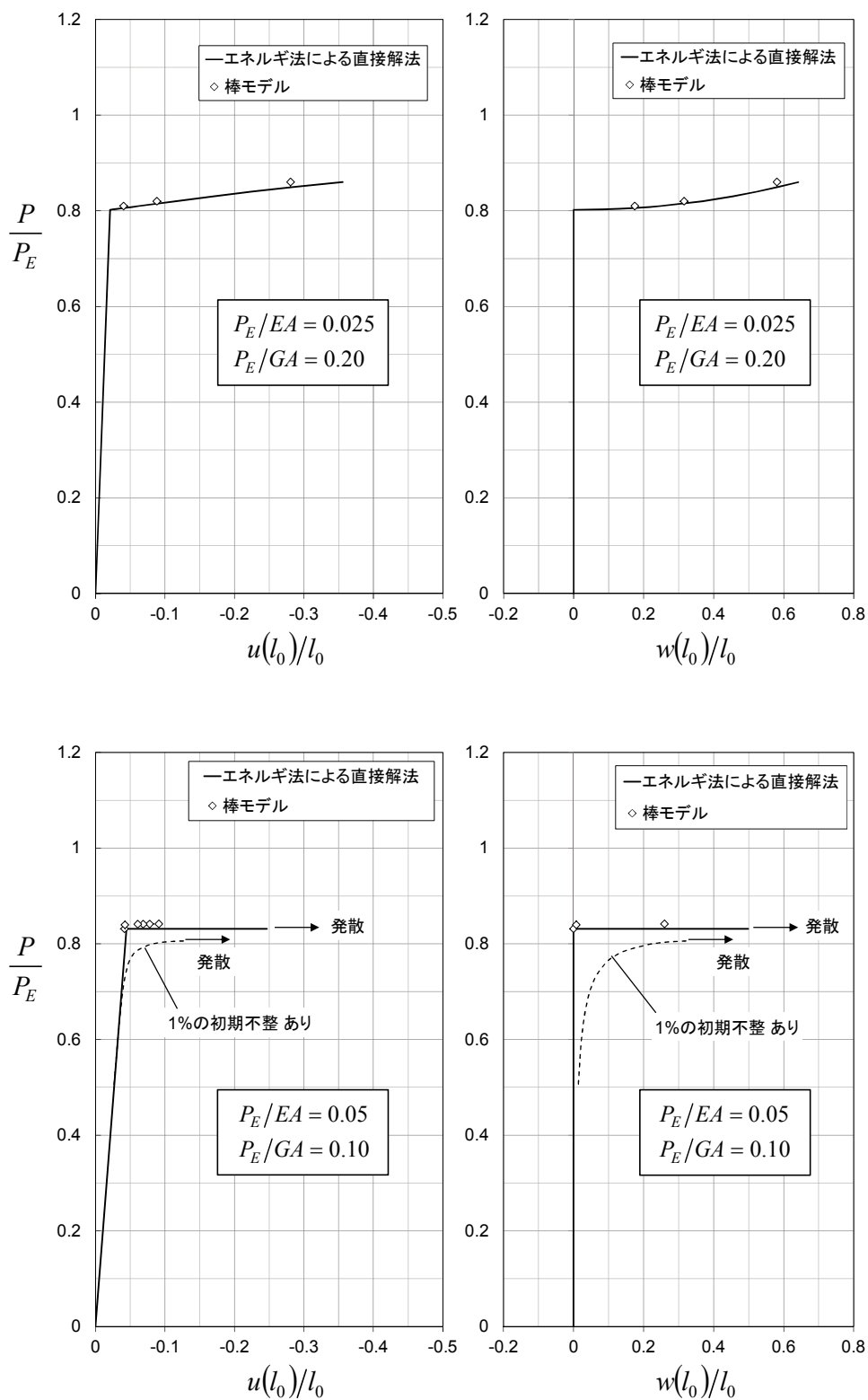


図 7.5-3 Laced Column の荷重 - 変位解析結果の例

7.5.2 座屈荷重

いろいろな剛性の Laced Column の荷重と変位関係を棒モデルによって計算し、座屈荷重を求めた。座屈荷重の求め方は伸張せん断エラスティカの場合と同じ方法を使った (図 5.2-1 参照)。計算結果を他の解析モデルの結果と合わせて表 7.5-1, 表 7.5-2, 図 7.5-4, 図 7.5-5 に示す。

表 7.5-1 と図 7.5-4 は、軸剛性を小さく ($P_E/EA = 0.025, 0.05$) して、せん断剛性パラメータ P_E/GA を変化させたときの影響を見たものである。公称応力と公称歪の間に線形のフックの法則を仮定した場合には、棒モデルが Engesser の理論および Timoshenko の理論による伸張せん断エラスティカの座屈荷重に一致している。Haringx の理論による伸張せん断エラスティカの理論とは合わない。一方、キルヒホッフの応力とグリーンの歪の間に線形のフックの法則を仮定した場合には、棒モデルが三次元弾性論による座屈荷重と宮崎の式と一致している。

表 7.5-2, 図 7.5-5 は、せん断剛性を小さく ($P_E/GA = 0.20$) して、軸剛性パラメータを変化させたときの影響を見たものである。公称応力と公称歪の間に線形のフックの法則を仮定した場合には、棒モデルが Engesser の理論による伸張せん断エラスティカの座屈荷重にほぼ一致している。Haringx の理論と Timoshenko の理論とは合わない。一方、キルヒホッフの応力とグリーンの歪の間に線形のフックの法則を仮定した場合には、棒モデルと三次元弾性論による厳密解が Engesser の理論に基づく宮崎の式とほぼ一致している。

以上の結果と 6.4.3 項の結果から、梁の圧縮座屈に関しては Engesser の理論が適切であると結論できる (表 7.5-3 参照)。

7 Laced Column の座屈解析

表 7.5-1 (1/2) Laced Column の座屈荷重解析結果の比較, せん断剛性の影響

A _s (mm ²)	A _d (mm ²)	A (mm ²)	b (mm)	L (mm)	φ		E (MPa)	I (mm ⁴)	P _E (N)	P _E /EA	P _E /GA
					(deg)	(rad)					
10	1	20	20.132	200	26.415	0.4610	100	2026.5	50.00	0.025	0.701
10	1.2	20	20.132	200	26.415	0.4610	100	2026.5	50.00	0.025	0.584
10	1.5	20	20.132	200	26.415	0.4610	100	2026.5	50.00	0.025	0.467
10	2	20	20.132	200	26.415	0.4610	100	2026.5	50.00	0.025	0.350
10	3	20	20.132	200	26.415	0.4610	100	2026.5	50.00	0.025	0.234
10	4	20	20.132	200	26.415	0.4610	100	2026.5	50.00	0.025	0.175
10	6	20	20.132	200	26.415	0.4610	100	2026.5	50.00	0.025	0.117
10	8	20	20.132	200	26.415	0.4610	100	2026.5	50.00	0.025	0.088
10	15	20	20.132	200	26.415	0.4610	100	2026.5	50.00	0.025	0.047
10	100	20	20.132	200	26.415	0.4610	100	2026.5	50.00	0.025	0.007

			棒モデル		伸張せん断エラスティカ			梁	棒モデル		三次元弾性論
			キルヒホッフの応力 -グリーンの歪	公称応力 -公称歪	Timoshenko	Engesser	Haringx	宮崎 2012	キルヒホッフの応力 -グリーンの歪	公称応力 -公称歪	キルヒホッフの応力 -グリーンの歪
P _E (N)	P _E /EA	P _E /GA	P _{cr} (N)	P _{cr} (N)	P _T /P _E	P _{E_n} /P _E	P _H /P _E	P _{cr} /P _E	P _{cr} /P _E	P _{cr} /P _E	P _{cr} /P _E
50.00	0.025	0.701	28.8	29.8	0.597	0.589	0.684	0.574	0.576	0.596	--
50.00	0.025	0.584	30.8	32	0.642	0.634	0.715	0.615	0.616	0.640	--
50.00	0.025	0.467	33.4	34.6	0.694	0.686	0.751	0.662	0.668	0.692	0.663
50.00	0.025	0.350	36.0	37.8	0.755	0.747	0.795	0.717	0.720	0.756	0.720
50.00	0.025	0.234	39.3	41.4	0.828	0.821	0.850	0.781	0.786	0.828	0.787
50.00	0.025	0.175	41.2	43.6	0.870	0.864	0.883	0.817	0.824	0.872	0.825
50.00	0.025	0.117	43.3	46	0.916	0.912	0.922	0.857	0.866	0.920	0.867
50.00	0.025	0.088	44.4	47.2	0.942	0.938	0.944	0.879	0.888	0.944	0.890
50.00	0.025	0.047	46.2	49.2	0.979	0.977	0.979	0.911	0.924	0.984	0.924
50.00	0.025	0.007	49.20	51.2	1.019	1.019	1.019	0.944	0.984	1.024	0.959

表 7.5-1 (2/2) Laced Column の座屈荷重解析結果の比較, せん断剛性の影響

A _s (mm ²)	A _d (mm ²)	A (mm ²)	b (mm)	L (mm)	φ		E (MPa)	I (mm ⁴)	P _E (N)	P _E /EA	P _E /GA
					(deg)	(rad)					
10	2	20	28.480	200	19.347	0.3377	100	4055.6	100.07	0.050	0.848
10	2.4	20	28.480	200	19.347	0.3377	100	4055.6	100.07	0.050	0.707
10	3	20	28.480	200	19.347	0.3377	100	4055.6	100.07	0.050	0.565
10	4	20	28.480	200	19.347	0.3377	100	4055.6	100.07	0.050	0.424
10	5	20	28.480	200	19.347	0.3377	100	4055.6	100.07	0.050	0.339
10	6	20	28.480	200	19.347	0.3377	100	4055.6	100.07	0.050	0.283
10	8	20	28.480	200	19.347	0.3377	100	4055.6	100.07	0.050	0.212
10	10	20	28.480	200	19.347	0.3377	100	4055.6	100.07	0.050	0.170
10	15	20	28.480	200	19.347	0.3377	100	4055.6	100.07	0.050	0.113
10	30	20	28.480	200	19.347	0.3377	100	4055.6	100.07	0.050	0.057
10	100	20	28.480	200	19.347	0.3377	100	4055.6	100.07	0.050	0.017

棒モデル			伸張せん断エラスティカ						梁	棒モデル		三次元弾性論
P _E (N)	P _E /EA	P _E /GA	キルヒホッフの応力 -グリーンの歪	公称応力 -公称歪	Timoshenko	Engesser	Haringx	キルヒホッフの応力 -グリーンの歪	宮崎 2012	キルヒホッフの応力 -グリーンの歪	公称応力 -公称歪	キルヒホッフの応力 -グリーンの歪
			P _{cr} (N)	P _{cr} (N)	P _T /P _E	P _{En} /P _E	P _H /P _E	P _{KG} /P _E	P _{cr} /P _E	P _{cr} /P _E	P _{cr} /P _E	P _{cr} /P _E
100.07	0.050	0.848	52.00	54.6	0.557	0.542	0.656	0.519	0.518	0.520	0.546	0.520
100.07	0.050	0.707	--	59.4	0.604	0.589	0.689	0.559	0.558	--	0.594	0.561
100.07	0.050	0.565	60.80	65	0.661	0.644	0.727	0.606	0.605	0.608	0.650	0.609
100.07	0.050	0.424	--	72	0.729	0.712	0.775	0.661	0.660	--	0.720	0.667
100.07	0.050	0.339	70.20	76.8	0.777	0.761	0.810	0.699	0.698	0.702	0.767	0.706
100.07	0.050	0.283	--	80.6	0.813	0.797	0.837	0.726	0.725	--	0.805	0.735
100.07	0.050	0.212	--	85.6	0.862	0.848	0.876	0.764	0.763	--	0.855	0.775
100.07	0.050	0.170	79.40	89	0.895	0.882	0.903	0.788	0.787	0.793	0.889	0.801
100.07	0.050	0.113	--	94.2	0.943	0.933	0.944	0.823	0.822	--	0.941	0.838
100.07	0.050	0.057	87.80	99.8	0.996	0.990	0.994	0.861	0.860	0.877	0.997	0.879
100.07	0.050	0.017	93.00	104.2	1.037	1.035	1.035	0.890	0.888	0.929	1.041	0.910

7 Laced Column の座屈解析

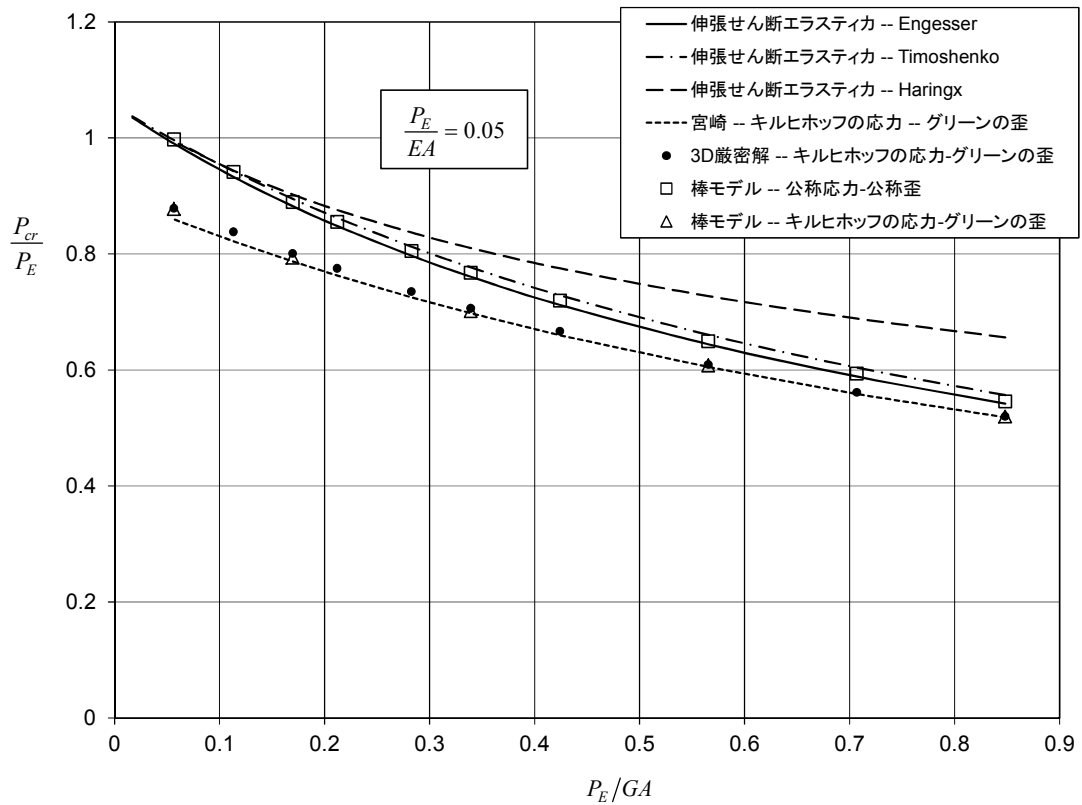
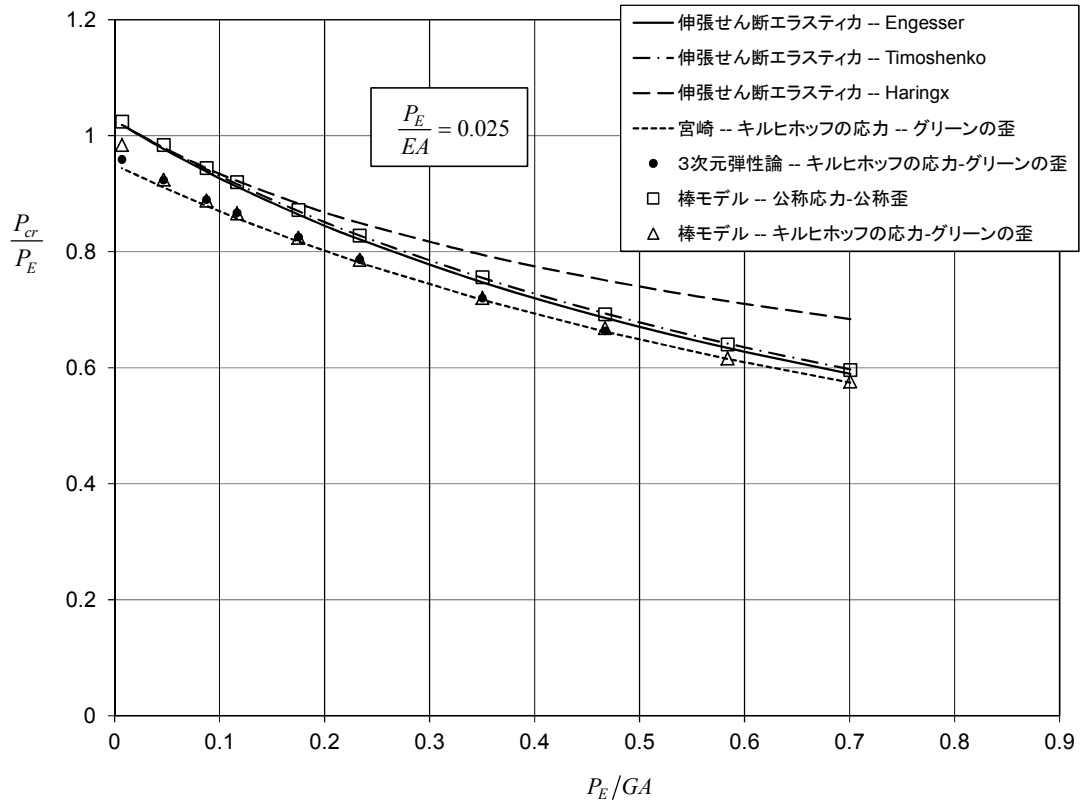


図 7.5-4 Laced Column の棒モデルによる座屈解析結果と他のモデルとの比較，せん断剛性の影響

表 7.5-2 Laced Column の座屈荷重解析結果の比較, 軸剛性の影響

		P_{cr}/P_E						
		伸張せん断エラスティカ			宮崎 2012	3D厳密解	Laced Column 棒モデル	
P_E/EA	P_E/GA	Engesser	Timoshenko	Haringx	キルヒホッフの応力 -グリーンの歪	キルヒホッフの応力 -グリーンの歪	公称応力 -公称歪	キルヒホッフの応力 -グリーンの歪
0.001	0.20	0.834	0.834	0.855	0.832	--	--	--
0.01	0.20	0.838	0.840	0.860	0.821	0.821	--	--
0.02	0.20	0.843	0.848	0.865	0.808	0.813	0.847	0.815
0.03	0.20	0.848	0.855	0.871	0.795	0.803	--	--
0.04	0.20	0.853	0.863	0.877	0.782	0.793	--	--
0.05	0.20	0.858	0.871	0.883	0.770	0.782	0.863	0.775
0.06	0.20	0.863	0.880	0.889	0.757	0.771	--	--
0.07	0.20	0.868	0.889	0.896	0.744	0.758	--	--
0.08	0.20	0.873	0.898	0.902	0.732	0.745	0.880	0.739
0.09	0.20	0.879	0.907	0.909	0.719	0.732	--	--
0.1	0.20	0.884	0.918	0.916	0.707	0.717	0.891	0.715
0.11	0.20	0.890	0.928	0.923	0.694	0.703	--	--
0.12	0.20	0.896	0.939	0.931	0.682	0.687	--	--

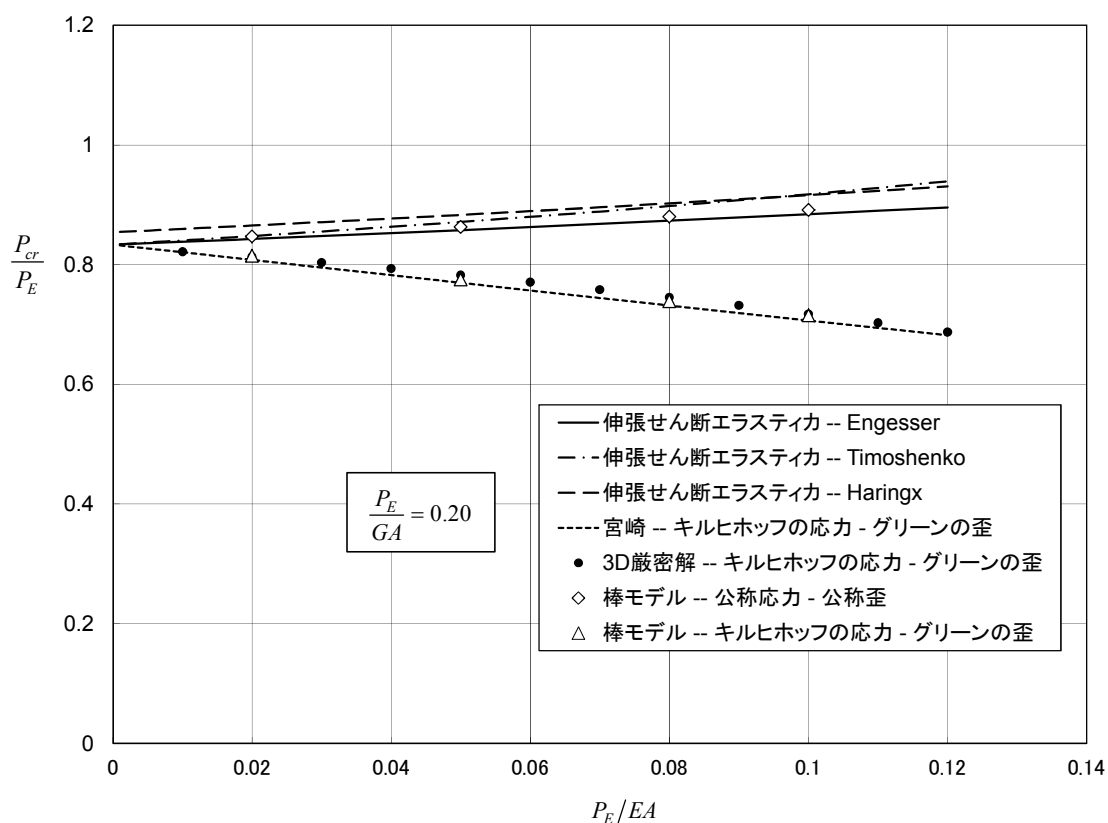


図 7.5-5 Laced Column の棒モデルによる座屈解析結果と他のモデルとの比較, 軸剛性の影響

7 Laced Column の座屈解析

表 7.5-3 軸剛性とせん断剛性を考慮した梁の座屈の理論の評価 – 研究のまとめ

理論		構成方程式	公称応力と公称歪の間にフックの法則が成り立つ	キルヒホッフの応力とグリーンの歪の間にフックの法則が成り立つ
伸張せん断エラスティカの理論	座屈荷重計算式		○	--
	有限要素法		○	--
	エネルギー法による直接解法		○	○
宮崎 2012 の座屈荷重計算式			--	○
Laced Column の棒モデルによる解			○	○
3次元弾性論による円形断面梁の座屈荷重の厳密解			--	○
結果	変形	伸張せん断エラスティカの Engesser の理論による座屈後変形と, Laced Column の棒モデルの解析による座屈後変形が一致 (図 7.5-1, 図 7.5-2) ⇒ 伸張せん断エラスティカの理論は妥当	伸張せん断エラスティカの理論による座屈後変形と, Laced Column の棒モデルの解析による座屈後変形が一致 (図 7.5-3) ⇒ 伸張せん断エラスティカの理論は妥当	
	軸剛性が大きく, せん断剛性が低い場合の座屈荷重	三次元弾性論による座屈荷重と伸張せん断エラスティカの Engesser の理論, Timoshenko の理論による座屈荷重が一致 (図 6.4-6) ⇒ せん断剛性を考慮した梁の座屈に関しては, Engesser の理論, または Timoshenko の理論が妥当である.		
	座屈荷重	Laced Column の棒モデルの解析による座屈荷重と伸張せん断エラスティカの Engesser の理論による座屈荷重が一致 (図 7.5-4) ⇒ 軸剛性とせん断剛性を考慮した梁の座屈に関しては, Engesser の理論が妥当である.	三次元弾性論による座屈荷重, Laced Column の棒モデルの解析による座屈荷重, 伸張せん断エラスティカによる座屈荷重, 宮崎の式による座屈荷重が一致 (図 7.5-5) ⇒ 軸剛性とせん断剛性を考慮した梁の座屈に関しては, Engesser の理論が妥当である.	

7.6 考察

せん断変形を考慮した梁の圧縮座屈において、断面力のとり方を Engesser の理論、Timoshenko の理論、Haringx の理論のうちのどれを採用するのが妥当であるかについて、前項で Engesser の理論が妥当であることを明らかにした。Haringx の理論を支持する研究者がまだいるが、その主張について以下で考察する。

(1) Kardomateas 1995 の主張について

Kardomateas 1995 の三次元弾性論による円形断面梁の座屈解析が Haringx の理論に近い結果を示していることが一部の研究者が Haringx の理論を支持している理由であると思われる。しかし、本論文で示したように、Kardomateas の解析は座屈前変形を考慮していない近似解であり、三次元弾性論の厳密解は Engesser の理論（宮崎 2012 の式）と一致する。

(2) Attard 2011 のサンドイッチ梁の座屈解析について

Attard 2011 はサンドイッチの表板とコアに別々に Engesser または Haringx の理論を適用して座屈計算式を求めている（Haringx の理論の断面力を図 7.6-1 に示す）。サンドイッチ梁では、表板はほとんどせん断変形せず、コアだけが大きくせん断変形する。コアの軸力は小さいので、Engesser の理論でも Haringx の理論でも結局、軸力は表板の軸線の向きに働くことになる。したがって、表板とコアを別々に扱えばサンドイッチ梁の座屈では Engesser の理論と Haringx 理論で差が出ないのは当然のことである。表板の軸線の向きはサンドイッチ梁断面の軸線の向きに等しいので、Engesser の理論に合っていることになる。したがって、Attard の解析は Haringx の理論が妥当であることを示したことはない。

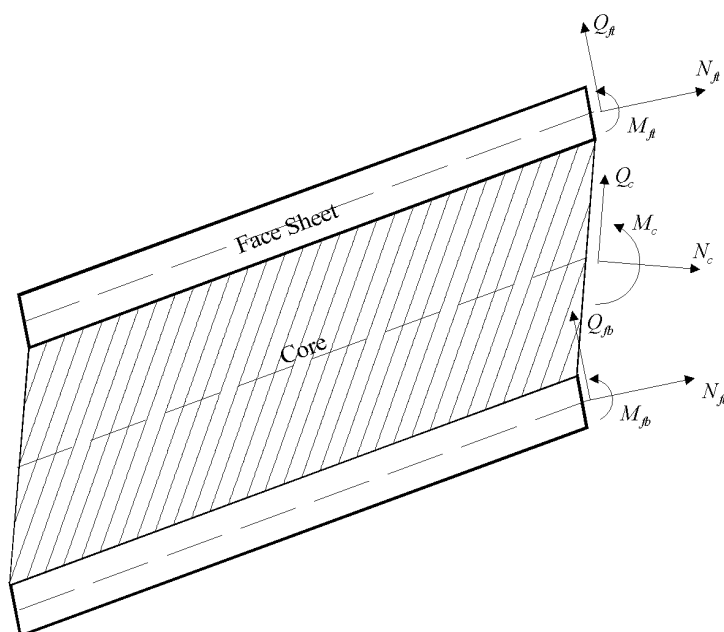


図 7.6-1 Attard 2011 のサンドイッチの解析モデル – Haringx の理論を適用

(3) Bažant の主張について

Engesser の理論と Haringx の理論は構成方程式のとり方によるものであり、等価であるというのが Bažant 2003 の主張である。Bažant はサンドイッチ梁と組立梁については Engesser の理論が妥当であることを認めているものの (Bažant and Beghini 2004, 2005), 両理論が等価であるという見解は変えていない。しかし, わざわざ非線形の構成方程式を持ち出してきて両者が等価であるというのはあまり意味がないのではないか。

両理論の物理的な意味は次のように解釈するのがよいと考える。序論 (1.1.3 項) で示したせん断剛性が軸剛性に比べて非常に小さいときの座屈荷重の式

$$\text{Engesser : } P_{En} = \frac{P_E}{1 + \frac{P_E}{GA}} = \frac{1}{\frac{1}{P_E} + \frac{1}{GA}} \cong GA \quad (1.1-4)$$

$$\text{Haringx : } P_H = \frac{P_E \left(\sqrt{1 + \frac{4P_E}{GA}} - 1 \right)}{\frac{2P_E}{GA}} = \frac{\sqrt{1 + \frac{4P_E}{GA}} - 1}{\frac{2}{GA}} = \frac{\sqrt{(GA)^2 + 4GAP_E} - 1}{2} \cong \sqrt{GAP_E} \quad (1.1-5)$$

の違いを解釈すると, 柱の曲げ剛性が非常に大きい場合には図 7.6-2 に示すようになる。

Engesser の理論では, せん断変形によって両側の柱が倒れるので全体の高さが低くなるため, 曲げ変形がなくてもせん断変形だけで座屈する。普通の梁, サンドイッチ梁や組立梁は図 7.6-2 の上の図に対応し, Engesser の理論が適用できる。

一方, Haringx の理論では, せん断変形によって柱全体が横にずれても柱の高さが変わらないために外力が仕事をしないので座屈がおきない。ゴムでできた柱は非圧縮性材料なので, せん断変形によって高さが変わらないため, 図 7.6-2 の下の図であり, Haringx の理論が適用できるのである。

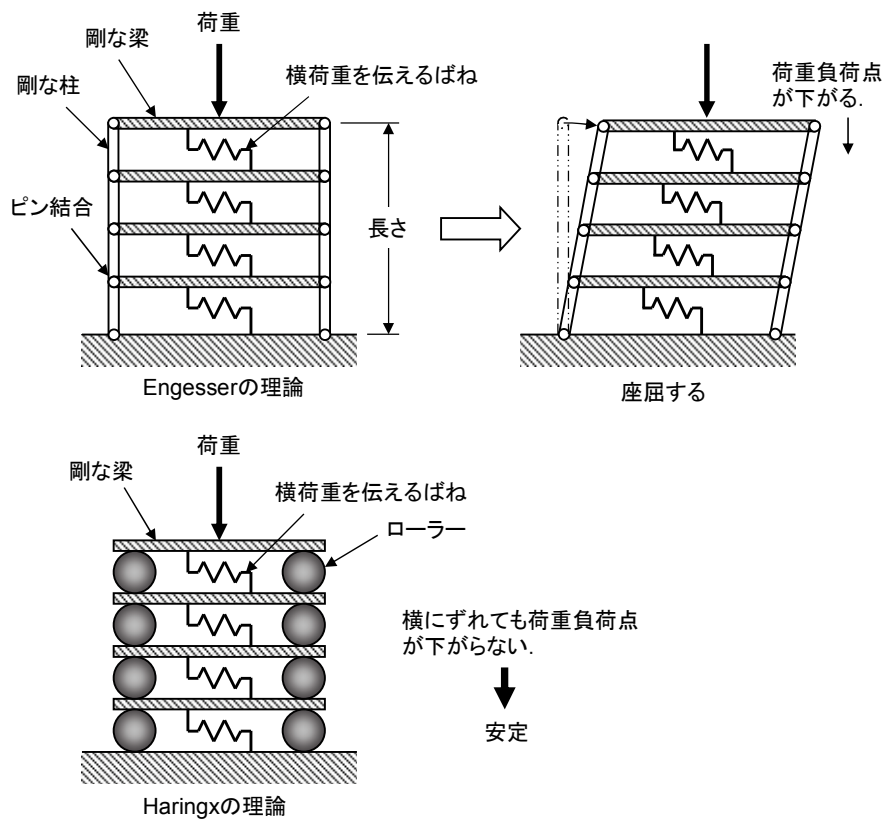


図 7.6-2 Engesser の理論と Haringx の理論の違いの解釈

空白ページ

8 結論

(1) 伸張せん断エラスティカの理論

- Engesser の理論, Timoshenko の理論, Haringx の理論に基づく伸張せん断エラスティカの変分原理を導いた.
- 伸張せん断エラスティカの変分原理から, 軸剛性とせん断剛性を考慮した梁の圧縮座屈荷重計算式を導いた.

➤ Engesser の理論に基づく座屈荷重計算式 :

$$\left\{ \frac{P_E^{(n)}}{EA} \right\}^2 \left(\frac{P_{En}}{P_E^{(n)}} \right)^3 - 2 \left[\frac{P_E^{(n)}}{EA} \right] \left[\left(\frac{P_{En}}{P_E^{(n)}} \right)^2 \right] + \left[1 + \frac{P_E^{(n)}}{EA} + \frac{P_E^{(n)}}{GA} \right] \left[\left(\frac{P_{En}}{P_E^{(n)}} \right) \right] - 1 = 0 : \text{Iwakuma and Kuranishi 1984 の式}$$

➤ Timoshenko の理論に基づく座屈荷重計算式 :

$$\frac{P_T}{P_E^{(n)}} = - \frac{1 \mp \sqrt{1 - \frac{4 \frac{P_E^{(n)}}{EA}}{1 + \frac{P_E^{(n)}}{GA}}}}{2 \frac{P_E^{(n)}}{EA}} : \text{Ziegler 1982 の式}$$

➤ Haringx の理論に基づく座屈荷重計算式 :

$$\frac{P_T}{P_E^{(n)}} = - \frac{1 \mp \sqrt{1 - \frac{4 \frac{P_E^{(n)}}{EA}}{1 + \frac{P_E^{(n)}}{GA}}}}{2 \frac{P_E^{(n)}}{EA}} : \text{Timoshenko and Gere 1961, Goto et al. 1990, Atanackovic 1997, Humer 2013 の式}$$

- 伸張せん断エラスティカの変形の数値計算法として, 有限要素法とエネルギー法による解析方法を開発した.
- 変形計算を行い, 以下の現象を明らかにした.
 - 軸剛性が低い場合に飛び移り現象が存在することを見出した.
 - Haringx の理論によると, 引張荷重による座屈が存在し, 座屈後に安定な変形状態が存在する.

(2) 三次元弾性論による梁の座屈解析

三次元弾性論を使って, 片持ちの円形断面梁の圧縮座屈荷重の厳密解を導いた. Kardomateas 1995 の解は近似解であることを示した.

(3) Engesser/Haringx 論争

軸圧縮を受ける Laced Column の幾何学的非線形解析, 三次元弾性論による円形断面梁の座屈荷重厳密解, 伸張せん断エラスティカの圧縮座屈荷重計算式を比較することにより, 梁の圧縮座

8 結論

屈には Engesser の理論を適用するのが妥当であることを示し、その物理的意味を説明した.

参考文献

- [1] Atanackovic, T. M.: Stability Theory of Elastic Rods, World Scientific, Singapore, 1997.
- [2] Attard, M. M.: Finite Strain - Beam Theory, International Journal of Solids and Structures, 40 (2003) pp.4563-4584.
- [3] Attard, M. M.: Global Buckling Experiments on Sandwich Columns with Soft Shear Cores, Electronic Journal of Structural Engineering 11 (2011), pp.21-31.
- [4] Attard M. M. and Hunt, G. W.: Column Buckling with Shear Deformations – A Hypereleastic Formulation, International Journal of Solids and Structures, 45 (2008), pp.4322-4339.
- [5] Attard M. M. and Hunt, G. W.: Sandwich Column Buckling – A Hypereleastic Formulation, International Journal of Solids and Structures, 45 (2008), pp.5540-5555.
- [6] Bažant, Z. P.: Shear Buckling of Sandwich, Fiber Composite and Lattice Columns, Bearings, and Helical Springs: Paradox Resolved, Journal of Applied Mechanics, 70 (2003), pp.70-83.
- [7] Bažant Z. P. and Beghini, A.: Sandwich Buckling Formulas and Applicability of Standard Computational Algorithm for Finite Strain, Composites, Part B, 35 (2004), pp.573-581.
- [8] Bažant, Z. P. and Beghini, A.: Which Formulation Allows Using a Constant Shear Modulus for Small-Strain Buckling of Soft-Core Sandwich Structures?, Journal of Applied Mechanics, 72 (2005), pp.785-787.
- [9] Bažant Z. P. and Beghini, A.: Stability and Finite Strain of Homogenized Structures Soft in Shear: Sandwich or Fiber Composites, and Layered Bodies, International Journal of Solids and Structures, 43 (2006), pp.1571-1593.
- [10] Bažant, Z. P. and Cedolin, L.: Stability of Structures, Dover Publication, Inc., New York, 2003.
- [11] Blaauwendraad, J.: Shear in Structural Stability: On the Engesser-Haringx Discord, Journal of Applied Mechanics, 77 (2010), pp. 031005-1-8.
- [12] Bleich, R.: Buckling Strength of Metal Structures, McGraw-Hill, New York, 1952.
- [13] Chattopadhyay, A. and Gu, H.: Exact Elasticity Solution for Buckling of Composite Laminates, Composite Structures, 34 (1996), pp.291-299.
- [14] Cowper, G. R.: The Shear Coefficient in Timoshenko's Beam Theory, Journal of Applied Mechanics, (1966), pp.335-340.
- [15] Goto, Y., Yoshimitsu, T. and Obata, M. : Elliptic Integral Solutions of Plane Elastica with Axial and Shear Deformations, International Journal of Solids and Structures, 26 (1990), pp.375-390.
- [16] Huddleston, J. V.: Effect of Shear Deformation on the Elastica with Axial Strain, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 4 (1972), pp.433-444.
- [17] Humer, A.: Exact Solutions for the Buckling and Postbuckling of Shear-Deformable Beams, Acta Mech 224 (2013), pp.1493-1525.
- [18] Iwakura, T. and Kuranishi, S.: How Much Contribution does the Shear Deformation have in a Beam Theory?, Proceedings of JSCE 344/I-1 (1984), pp.141-151.
- [19] Kardomateas, G. A.: Three Dimensional Elasticity Solution for the Buckling of Transversely Isotropic Rods: The Euler Load Revisited, Journal Applied Mechanics, 62 (1995), pp.346-355.

参考文献

- [20] Kardomateas, G. A.: An Elasticity Solution for the Global Buckling of Sandwich Beams/Wide Panels With Orthotropic Phases, *Journal of Applied Mechanics*, 77 (2010), pp.021015-1-7.
- [21] Kardomateas, G. A. and Simitzes, G. J.: Comparative Studies on the Buckling of Isotropic, Orthotropic, and Sandwich Columns, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 11 (2004), pp.309-327.
- [22] Kelly, J. M. and Takhirov, S. M.: Tension Buckling in Multilayer Elastomeric Isolation Bearings, *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 2 (2007), pp.1591-1605.
- [23] Magnusson, A., Ristinmaa, M. and Ljung, C.: Behaviour of the Extensible Elastica Solution, *International J. Solids and Structures*, 38 (2001), pp.8441-8457.
- [24] Taki, T.: Numerical Analysis of Extensible Shearable Elastica by Direct Energy Minimization, to be published in *Transactions of JSASS*.
- [25] Taki, T. and Kondo, K.: Exact Three-Dimensional Elasticity Solution for Buckling of Beam of a Circular Cross-Section, *Transactions of JSASS*, 60 (2017), pp. 45–55.
- [26] Taki, T. and Kondo, K.: Variational Principles of Extensible Shearable Elastica – Engesser’s Approach, to be published in *Transactions of JSASS*.
- [27] Timoshenko, S. P. and Gere, J. M.: *Theory of Elastic Stability*, Second Edition, Dover Publications, Inc., 1961.
- [28] Washizu, K.: *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*, Pergamon Press, 1968.
- [29] Ziegler, H.: Arguments For and Against Engesser’s Buckling Formula, *Ingenieur-Archiv.*, 52 (1982), pp.105-113.
- [30] 蔵本浩一郎, 近藤恭平: 伸張エラスティカの有限要素解析, 第 48 回構造強度に関する講演会講演集, 2006, pp.135-137.
- [31] 蔵本浩一郎, 近藤恭平: 伸張エラスティカの座屈荷重, 第 49 回構造強度に関する講演会講演集, 2007, pp.104-105.
- [32] 近藤恭平: エラスティカの変分原理, *日本航空宇宙学会論文集*, 52 (2004), pp.167-174.
- [33] 近藤恭平: 梁の大回転大変形理論, 第 47 回構造強度に関する講演会講演集, 2005, pp.151-155.
- [34] 近藤恭平: 伸張エラスティカの変分原理, *日本航空宇宙学会論文集*, 54 (2006), pp.210-220.
- [35] 近藤恭平: 伸張剪断エラスティカの変分原理, 第 48 回構造強度に関する講演会講演集, 2006, pp.129-131.
- [36] 近藤恭平: 伸張剪断エラスティカの変分原理 (第 2 報 Engesser の方法), 第 50 回構造強度に関する講演会講演集, 2008, pp.58-60.
- [37] 近藤恭平: 伸張剪断エラスティカの座屈, 第 50 回構造強度に関する講演会講演集, 2008, pp.61-63.
- [38] 近藤恭平: 伸張剪断エラスティカの変分原理 (第 3 報 Timoshenko の方法), 第 51 回構造強度に関する講演会講演集, 2009, pp.115-117.
- [39] 近藤恭平: 伸張剪断エラスティカの座屈 (Timoshenko の方法), 第 51 回構造強度に関する講演会講演集, 2009, pp.118-120.
- [40] 近藤恭平: 二次元弾性論による梁の座屈解析, 第 52 回構造強度に関する講演会講演集, 2010, pp.185-187.

- [41] 近藤恭平: 剪断変形を考慮した梁の大回転大変形理論, 第 52 回構造強度に関する講演会講演集, 2010, pp.188-190.
- [42] 近藤恭平: 二次元弾性論による梁の座屈解析 (第 2 報 伸張剪断エラスティカ理論との比較), 第 53 回構造強度に関する講演会講演集, 2011, pp.124-126.
- [43] 近藤恭平: 剪断変形を考慮した梁の大回転大変形理論 (第 2 報 Engesser の方法), 第 53 回構造強度に関する講演会講演集, 2011, pp.127-129.
- [44] 滝敏美: 表計算ソフトの最適化機能を用いた構造問題へのエネルギー法の直接解法の適用, 第 50 回構造強度に関する講演会講演集, 2008, pp.64-66.
- [45] 滝敏美: 伸張せん断エラスティカのエネルギー法による直接解法, 第 51 回構造強度に関する講演会講演集, 2009, pp.112-114.
- [46] 滝敏美: 伸張せん断エラスティカのエネルギー法による直接解法 (第 2 報 Engesser の方法), 第 52 回構造強度に関する講演会講演集, 2010, pp.194-196.
- [47] 滝敏美: 伸張せん断エラスティカのエネルギー法による直接解法 (第 3 報 Timoshenko の方法), 第 53 回構造強度に関する講演会講演集, 2011, pp.118-120.
- [48] 滝敏美: 航空機構造解析の基礎と実際, プレアデス出版, 2012.
- [49] 滝敏美: Laced Column の座屈に関する検討, 第 55 回構造強度に関する講演会講演集, 2013, pp.103-105.
- [50] 滝敏美: せん断変形を考慮した梁の圧縮座屈の理論に関する考察, 第 56 回構造強度に関する講演会講演集, 2014, pp.60-62.
- [51] 滝敏美, 近藤恭平: 伸張剪断エラスティカの有限要素法 (第 1 報 Haringx の方法), 第 51 回構造強度に関する講演会講演集, 2009, pp.109-111.
- [52] 滝敏美, 近藤恭平: 伸張剪断エラスティカの有限要素解析 (第 2 報 Engesser の方法), 第 52 回構造強度に関する講演会講演集, 2010, pp.191-193.
- [53] 滝敏美, 近藤恭平: 伸張剪断エラスティカの有限要素解析 (第 3 報 Timoshenko の方法), 第 53 回構造強度に関する講演会講演集, 2011, pp.121-123.
- [54] 滝敏美, 近藤恭平: 三次元弾性論による円形断面梁の座屈解析 (第 1 報 厳密解), 第 54 回構造強度に関する講演会講演集, 2012, pp.104-106.
- [55] 滝敏美, 近藤恭平: 三次元弾性論による円形断面梁の座屈解析 (第 2 報 近似解), 第 54 回構造強度に関する講演会講演集, 2012, pp.107-109.
- [56] ツィエンキーヴィッツ, O. C. (吉識雅夫, 山田嘉昭監訳): 基礎工学におけるマトリックス有限要素法, 培風館, 1975.
- [57] 宮崎康行: 様々な梁の数学モデルに対する座屈荷重の比較, 第 54 回構造強度に関する講演会講演集, 2012, pp.110-112.

空白ページ

謝辞

本研究は、恩師の東京大学名誉教授・近藤恭平先生と2008年から2012年に行った共同研究の成果とその後の筆者の研究をまとめたものである。研究の成果は日本航空宇宙学会の「構造強度に関する講演会」で毎年発表してきたが、まとまった論文の形になっていなかった。研究が完結したところでまとまった論文の形にしようと思っていたが、研究が完結する前に近藤先生が2012年9月に逝去された。まとまった論文の形で成果を残すのが筆者の使命であると考え、この論文を作成した。著者名は筆者の名前だけであるが、「伸張せん断エラスティカの研究」はもともと近藤先生が構想された研究で、内容の半分以上を近藤先生に負っていることを記しておく。

共同研究をすることになった経緯を以下に書いておきたい。筆者は近藤先生（当時は東京大学工学部航空学科助教授）のもとで修士論文（「複合材の水分拡散係数」）を書き、1980年に東京大学工学系大学院航空学修士課程を修了した。その後筆者は川崎重工業（株）で航空機の開発にたずさわわり、研究からは遠ざかっていた。2008年に「表計算ソフトの最適化機能を用いた構造問題へのエネルギー法の直接解法の適用」という研究を発表するために「構造強度に関する講演会」に出席した。同じ講演会で先生は「伸張剪断エラスティカの変分原理（第2報 Engesser の方法）」を発表された。筆者の発表の中で偶然にも解析例としてエラスティカを採り上げており、それが伸張エラスティカを解いていることを先生が見抜かれた。それならば筆者の方法で伸張せん断エラスティカを解くことができるのではないかということになり、筆者から共同研究をさせてもらえないかをお願いした。先生のほうもすでに大学を退職されていて数値解析をしてくれる学生がいないということで、筆者が主に数値解析を担当するというで共同研究をすることになった。卒業後28年を経てまた教師と学生の関係性を再開する形となったのである。その後、2009年から2012年まで毎年「構造強度に関する講演会」で伸張せん断エラスティカに関する研究成果を発表することができた。しかし、2012年8月の講演会には先生は体調が悪く出席できず、筆者が代りに発表を行った。（2012年の3月頃には先生ご自身が講演会への出席は困難であることを悟っておられて、筆者に代理発表を依頼された。）前述のように、残念なことに2012年9月に先生はお亡くなりになった。その後2012年から2013年には組立梁の座屈解析を行うことにより、それまでの研究結果をつなぐことができるようになった。研究の最終的な結論をお伝えできなかったことが残念である。

弾性力学の権威である近藤先生にもう一度教えていただき、共同研究者として発表をさせていただいたことは光栄の一語につきる。二度目の師弟関係は一度目よりも長く深いものとなった。遅れはしたが、このように共同研究の成果を論文の形にまとめることができ、少しは先生に恩返しできたのではないかと思う。その一方で、共同研究を筆者の学位論文とさせていただくことになり、先生から受けた学恩の大きさに感謝している。

東京大学工学系研究科航空宇宙工学専攻の青木隆平教授には、近藤先生の教えを受けたというつながりで紹介教員になっていただいた。お忙しい中で審査の労をとっていただいたことに深く感謝する。

滝 敏美

2017年4月3日

空白ページ

付録1 伸張せん断エラスティカの変位解析有限要素法 FORTRAN77 プログラム

3項の計算式に基づいて作成した伸張せん断エラスティカ(一定断面の片持ち梁に端末荷重が負荷される問題)の有限要素法プログラムのソースコードをA1.2, A1.3, A1.4に示す.

A1.1 プログラムの使用法

プログラムの使用方法を以下に示す.

① 入力データファイル

入力データファイルを作成しておく.

入力データファイルの書式と内容は以下のとおり.

書式: フリーフォーマットのテキストファイル

要素数 (整数)

EA (実数) EI (実数) GA (実数) ←梁の軸剛性, 曲げ剛性, せん断剛性

L (実数) ←片持ち梁の長さ

PX (実数) PZ (実数) MY (実数) ←端末荷重

入力データ例:

```
400
39.4784 100000.0 19.7392
250.0
45.0 0.0 0.0
```

② 実行ファイルの使用法は以下のとおり.

(ア) DOS 窓で実行する. ディレクトリ「C:¥」に実行ファイル「main.exe」と入力ファイル「input.dat」があるとする. 出力ファイル名を「output.dat」とする.

```
C:¥>main↵
Enter Data File Name
input.dat↵
Enter Destination File Name 1
output.dat↵
```

(イ) 出力ファイルの内容は以下のとおり.

伸張せん断エラスティカ (Haringx の方法)

data file: input1.dat

全長: 0.25000E+03 要素数: 400

EA EI GA

0.39478418E+02 0.10000000E+06 0.15791367E+02

PX = 0.32000000E+02 PZ = 0.00000000E+00 MY = 0.00000000E+00

1

連立方程式を解いた

4 0.81060E+00

付録1 伸張せん断エラスティカの変位解析有限要素法 FORTRAN77 プログラム

```

2
連立方程式を解いた
4-0.31915E-04
3
    連立方程式を解いた
    :
    :
    :
    収束するまで
    :
278
連立方程式を解いた
結果

```

I	X(I)	eps(I)	gamma(I)	-theta-gamma	U(I)	W(I)
1	0.00000E+00	0.81057E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
2	0.62500E+00	0.81057E+00	0.39292E-02	0.19390E-02	0.50661E+00	0.13079E-03
3	0.12500E+01	0.81056E+00	0.78584E-02	0.38780E-02	0.10132E+01	0.52316E-03
4	0.18750E+01	0.81056E+00	0.11787E-01	0.58168E-02	0.15198E+01	0.11771E-02
5	0.25000E+01	0.81055E+00	0.15716E-01	0.77555E-02	0.20265E+01	0.20925E-02
6	0.31250E+01	0.81053E+00	0.19644E-01	0.96940E-02	0.25331E+01	0.32692E-02
7	0.37500E+01	0.81051E+00	0.23571E-01	0.11632E-01	0.30398E+01	0.47073E-02
8	0.43750E+01	0.81050E+00	0.27498E-01	0.13570E-01	0.35464E+01	0.64065E-02
9	0.50000E+01	0.81047E+00	0.31424E-01	0.15508E-01	0.40531E+01	0.83666E-02
			:			
			:			
395	0.24625E+03	0.73344E+00	0.86272E+00	0.43978E+00	0.21612E+03	0.95352E+01
396	0.24688E+03	0.73343E+00	0.86278E+00	0.43981E+00	0.21671E+03	0.95618E+01
397	0.24750E+03	0.73342E+00	0.86282E+00	0.43983E+00	0.21729E+03	0.95885E+01
398	0.24813E+03	0.73342E+00	0.86286E+00	0.43985E+00	0.21787E+03	0.96151E+01
399	0.24875E+03	0.73341E+00	0.86288E+00	0.43986E+00	0.21846E+03	0.96418E+01
400	0.24938E+03	0.73341E+00	0.86290E+00	0.43987E+00	0.21904E+03	0.96684E+01
401	0.25000E+03	0.73341E+00	0.86290E+00	0.43987E+00	0.21963E+03	0.96951E+01

```

    ↑      ↑      ↑      ↑      ↑      ↑      ↑
節点番号 変形前 x 座標    軸歪ε    せん断歪 γ    -(θ0 - γ)    変位 u    変位 w

```


A1.2 Engesser の理論による変位解析プログラムのソースリスト

```

C      *--1-----+-----2-----+-----3-----+-----4-----+-----5-----+-----6-----+-----7-*
C          伸張せん断エラスティカ (Engesser の理論) (一端固定他端自由)
C
C          Programmed by Toshimi Taki
C
C
C          IMPLICIT REAL*8 (A-H)
C          IMPLICIT REAL*8 (L-M)
C          IMPLICIT REAL*8 (O-Z)
C
C          dimension EA(410), EI(410), GA(410), X(410)
C          dimension SK(1210, 6), P(1210), DELTA(1210), DP(1210, 6), P2(1210)
C          dimension DU(1210)
C          dimension SK2(1210, 6), XX(5), XG(5), XTH_G(5), XEPS(5)
C          dimension XF1(5), XF2(5), XF3(5), XF4(5), XF5(5), XF6(5)
C          dimension XP11(5), XP12(5), XP13(5), XP14(5), XP15(5), XP16(5)
C          dimension XP22(5), XP23(5), XP24(5), XP25(5), XP26(5)
C          dimension XP33(5), XP34(5), XP35(5), XP36(5)
C          dimension XP44(5), XP45(5), XP46(5)
C          dimension XP55(5), XP56(5)
C          dimension XP66(5)
C          dimension W0(1210), U0(1210), W(1210), U(1210)
C
C          character*20 da, db
C
C      π の設定
C          pi=3.14159265358979
C
C      ガウス積分点 (n=5) の設定
C          XK1 = 0.906179845938664
C          XK2 = 0.538469310105683
C          XX(1) = (1.0-XK1)*0.5
C          XX(2) = (1.0-XK2)*0.5
C          XX(3) = 0.5
C          XX(4) = (1.0+XK2)*0.5
C          XX(5) = (1.0+XK1)*0.5
C
C      データファイル
C          write(*,*) 'Enter Data File Name'
C          read(*,*) da
C          open(10, File=da)
C
C      データ格納ファイル作成

```

```

write(*,*) 'Enter Destination File Name 1'
read(*,*) db
open(1,File=db)

write(1,*) '伸張せん断エラスティカ (Engesser の方法) '
write(1,*) 'data file: ', da

```

C 要素数の読み込み

```

read(10,*) N_ELEM
N_GRID = N_ELEM + 1

```

C 要素プロパティの読み込み

```

read(10,*) EA(1), EI(1), GA(1)

```

```

do 2000 I =2, N_ELEM
EA(I) = EA(1)
EI(I) = EI(1)
GA(I) = GA(1)

```

2000 continue

C 全長の読み込み

```

read(10,*) L

```

C 要素の長さ

```

LEL = L/FLOAT(N_ELEM)

```

C 端末荷重の読み込み

```

read(10,*) PX, PZ, MY

```

C 入力データの出力

```

write(1,600) L, N_ELEM
600 format('全長:',e12.5,' 要素数:',i6)

```

```

write(1,605)
605 format('EA EI GA')

```

```

write(1,610) EA(1), EI(1), GA(1)
610 format (e18.8, e18.8, e18.8)

```

```

write(1,615) PX, PZ, MY
615 format('PX =',e18.8,' PZ=',e18.8,' MY=',e18.8)

```

C 節点座標の作成

```

do 2001 I = 1, N_GRID
X(I) = LEL * FLOAT(I-1)

```

```
2001 continue
```

```
C 全体剛性マトリックス SK() の作成 .... バンド幅 6
```

```

N_DOF = 3*N_GRID
do 2002 I = 1, N_DOF
  do 2003 J = 1, 6
    SK(I, J) = 0.0

```

```
2003 continue
```

```
2002 continue
```

```

do 2004 I = 1, N_ELEM
  SK(3*I-2, 1) = EA(I)*LEL/3.0+SK(3*I-2, 1)
  SK(3*I-2, 4) = EA(I)*LEL/6.0+SK(3*I-2, 4)
  SK(3*I-1, 1) = GA(I)*LEL/3.0+SK(3*I-1, 1)
  SK(3*I-1, 4) = GA(I)*LEL/6.0+SK(3*I-1, 4)
  SK(3*I, 1) = EI(I)/LEL +SK(3*I, 1)
  SK(3*I, 4) = -EI(I)/LEL +SK(3*I, 4)
  SK(3*I+1, 1) = EA(I)*LEL/3.0+SK(3*I+1, 1)
  SK(3*I+2, 1) = GA(I)*LEL/3.0+SK(3*I+2, 1)
  SK(3*I+3, 1) = EI(I)/LEL +SK(3*I+3, 1)

```

```
2004 continue
```

```

C      do 2600 I=1, N_DOF
C          write(1,661) SK(I, 1), SK(I, 2), SK(I, 3),
C      +          SK(I, 4), SK(I, 5), SK(I, 6)
C 663 format(4e12.5)
C 2600 continue

```

```
C δ ベクトルの初期値の設定
```

```

do 2005 I = 1, N_DOF
  DELTA(I) = 0.0
  DU(I) = 0.0

```

```
2005 continue
```

```

do 2007 I = 1, N_GRID
  DELTA(3*I) = -0.01*L*sin(0.5*pi/L*X(I))

```

```
2007 continue
```

```
C 繰り返し計算の始まり
```

```
C
```

```
C 繰り返し計算のカウンターのセット
```

```
N_COUNT = 0
```

5000 continue

N_COUNT = N_COUNT + 1

if(N_COUNT.GT.20000) stop

write(1,660) N_COUNT

660 format(i6)

write(*,691) N_COUNT

691 format(i6)

do 2050 I = 1, N_DOF

DELTA(I) = DELTA(I) + DU(I)

2050 continue

C -----

C Pベクトルの計算

do 2008 I = 1, N_DOF

P(I) = 0.0

2008 continue

do 2009 I = 1, N_ELEM

do 2010 J =1, 5

XEPS(J) = (1.0-XX(J))*DELTA(3*I-2)+XX(J)*DELTA(3*I+1)

XG(J) = (1.0-XX(J))*DELTA(3*I-1)+XX(J)*DELTA(3*I+2)

XTH_G(J) = -(1.0-XX(J))*DELTA(3*I)-XX(J)*DELTA(3*I+3)

A = SQRT((1.0+XEPS(J))**2-XG(J)**2)

XF1(J) = (1.0-XX(J))*

+ -PX*(1.0+XEPS(J))/A*cos(XTH_G(J))

+ -PZ*(1.0+XEPS(J))/A*sin(XTH_G(J))

+)

XF2(J) = (1.0-XX(J))*

+ -PX*(-XG(J)/A*cos(XTH_G(J))-sin(XTH_G(J)))

+ -PZ*(-XG(J)/A*sin(XTH_G(J))+cos(XTH_G(J)))

+)

XF3(J) = (1.0-XX(J))*

+ -PX*(XG(J)*cos(XTH_G(J))+A*sin(XTH_G(J)))

+ -PZ*(XG(J)*sin(XTH_G(J))-A*cos(XTH_G(J)))

+)

XF4(J) = XX(J)*

+ -PX*(1.0+XEPS(J))/A*cos(XTH_G(J))

+ -PZ*(1.0+XEPS(J))/A*sin(XTH_G(J))

+)

XF5(J) = XX(J)*

```

+          -PX*( -XG(J)/A*cos(XTH_G(J))-sin(XTH_G(J)) )
+          -PZ*( -XG(J)/A*sin(XTH_G(J))+cos(XTH_G(J)) )
+          )
      XF6(J) = XX(J)*(
+          -PX*(XG(J)*cos(XTH_G(J))+A*sin(XTH_G(J)))
+          -PZ*(XG(J)*sin(XTH_G(J))-A*cos(XTH_G(J)))
+          )

```

2010 continue

```

      P(3*I-2) = (0.236926885056189*(XF1(1)+XF1(5))
+              +0.478628670499366*(XF1(2)+XF1(4))
+              +0.568888888888889*XF1(3))*LEL*0.5
+              + P(3*I-2)
      P(3*I-1) = (0.236926885056189*(XF2(1)+XF2(5))
+              +0.478628670499366*(XF2(2)+XF2(4))
+              +0.568888888888889*XF2(3))*LEL*0.5
+              + P(3*I-1)
      P(3*I)   = (0.236926885056189*(XF3(1)+XF3(5))
+              +0.478628670499366*(XF3(2)+XF3(4))
+              +0.568888888888889*XF3(3))*LEL*0.5
+              + P(3*I)
      P(3*I+1) = (0.236926885056189*(XF4(1)+XF4(5))
+              +0.478628670499366*(XF4(2)+XF4(4))
+              +0.568888888888889*XF4(3))*LEL*0.5
+              + P(3*I+1)
      P(3*I+2) = (0.236926885056189*(XF5(1)+XF5(5))
+              +0.478628670499366*(XF5(2)+XF5(4))
+              +0.568888888888889*XF5(3))*LEL*0.5
+              + P(3*I+2)
      P(3*I+3) = (0.236926885056189*(XF6(1)+XF6(5))
+              +0.478628670499366*(XF6(2)+XF6(4))
+              +0.568888888888889*XF6(3))*LEL*0.5
+              + P(3*I+3)

```

2009 continue

C [d_P/d_delta] マトリックスの計算

```

      do 2011 I = 1, N_DOF
        do 2012 J = 1, 6
          DP(I,J) = 0.0
2012 continue
2011 continue

      do 2013 I = 1, N_ELEM

```

```

do 2014 J = 1, 5
  XEPS(J) = (1.0-XX(J))*DELTA(3*I-2)+XX(J)*DELTA(3*I+1)
  XG(J) = (1.0-XX(J))*DELTA(3*I-1)+XX(J)*DELTA(3*I+2)
  XTH_G(J) = -(1.0-XX(J))*DELTA(3*I)-XX(J)*DELTA(3*I+3)
  A = SQRT((1.0+XEPS(J))**2-XG(J)**2)

  XJ11 = -(XG(J)**2)/(A**3)*(-PX*cos(XTH_G(J))
+           -PZ*sin(XTH_G(J)))
  XJ12 = (1.0+XEPS(J))*XG(J)/(A**3)*(
+           -PX*cos(XTH_G(J))-PZ*sin(XTH_G(J)) )
  XJ13 = (1.0+XEPS(J))/A*(
+           -PX*sin(XTH_G(J))+PZ*cos(XTH_G(J)) )
  XJ22 = -((1.0+XEPS(J))**2)/(A**3)*(
+           -PX*cos(XTH_G(J))-PZ*sin(XTH_G(J)) )
  XJ23 = -PX*( -XG(J)/A*sin(XTH_G(J))+cos(XTH_G(J)) )
+           -PZ*( XG(J)/A*cos(XTH_G(J))+sin(XTH_G(J)) )
  XJ33 = -PX*( XG(J)*sin(XTH_G(J))
+           -A*cos(XTH_G(J)) )
+           -PZ*( -XG(J)*cos(XTH_G(J))
+           -A*sin(XTH_G(J)) )

  XP11(J) = (1.0-XX(J))**2*XJ11
  XP12(J) = (1.0-XX(J))**2*XJ12
  XP13(J) = (1.0-XX(J))**2*XJ13
  XP14(J) = (1.0-XX(J))*XX(J)*XJ11
  XP15(J) = (1.0-XX(J))*XX(J)*XJ12
  XP16(J) = (1.0-XX(J))*XX(J)*XJ13

  XP22(J) = (1.0-XX(J))**2*XJ22
  XP23(J) = (1.0-XX(J))**2*XJ23
  XP24(J) = (1.0-XX(J))*XX(J)*XJ12
  XP25(J) = (1.0-XX(J))*XX(J)*XJ22
  XP26(J) = (1.0-XX(J))*XX(J)*XJ23

  XP33(J) = (1.0-XX(J))**2*XJ33
  XP34(J) = (1.0-XX(J))*XX(J)*XJ13
  XP35(J) = (1.0-XX(J))*XX(J)*XJ23
  XP36(J) = (1.0-XX(J))*XX(J)*XJ33

  XP44(J) = XX(J)**2*XJ11
  XP45(J) = XX(J)**2*XJ12
  XP46(J) = XX(J)**2*XJ13

  XP55(J) = XX(J)**2*XJ22
  XP56(J) = XX(J)**2*XJ23

```

$$XP66(J) = XX(J)**2*XJ33$$

2014 continue

$$\begin{aligned} DP(3*I-2, 1) &= (0.236926885056189*(XP11(1)+XP11(5)) \\ &+ 0.478628670499366*(XP11(2)+XP11(4)) \\ &+ 0.568888888888889*XP11(3)) \\ &+ *LEL*0.5 + DP(3*I-2, 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} DP(3*I-2, 2) &= (0.236926885056189*(XP12(1)+XP12(5)) \\ &+ 0.478628670499366*(XP12(2)+XP12(4)) \\ &+ 0.568888888888889*XP12(3)) \\ &+ *LEL*0.5 + DP(3*I-2, 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} DP(3*I-2, 3) &= (0.236926885056189*(XP13(1)+XP13(5)) \\ &+ 0.478628670499366*(XP13(2)+XP13(4)) \\ &+ 0.568888888888889*XP13(3)) \\ &+ *LEL*0.5 + DP(3*I-2, 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} DP(3*I-2, 4) &= (0.236926885056189*(XP14(1)+XP14(5)) \\ &+ 0.478628670499366*(XP14(2)+XP14(4)) \\ &+ 0.568888888888889*XP14(3)) \\ &+ *LEL*0.5 + DP(3*I-2, 4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} DP(3*I-2, 5) &= (0.236926885056189*(XP15(1)+XP15(5)) \\ &+ 0.478628670499366*(XP15(2)+XP15(4)) \\ &+ 0.568888888888889*XP15(3)) \\ &+ *LEL*0.5 + DP(3*I-2, 5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} DP(3*I-2, 6) &= (0.236926885056189*(XP16(1)+XP16(5)) \\ &+ 0.478628670499366*(XP16(2)+XP16(4)) \\ &+ 0.568888888888889*XP16(3)) \\ &+ *LEL*0.5 + DP(3*I-2, 6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} DP(3*I-1, 1) &= (0.236926885056189*(XP22(1)+XP22(5)) \\ &+ 0.478628670499366*(XP22(2)+XP22(4)) \\ &+ 0.568888888888889*XP22(3)) \\ &+ *LEL*0.5 + DP(3*I-1, 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} DP(3*I-1, 2) &= (0.236926885056189*(XP23(1)+XP23(5)) \\ &+ 0.478628670499366*(XP23(2)+XP23(4)) \\ &+ 0.568888888888889*XP23(3)) \\ &+ *LEL*0.5 + DP(3*I-1, 2) \end{aligned}$$

付録1 伸張せん断エラスティカの変位解析有限要素法 FORTRAN77 プログラム

$$\begin{aligned}
 DP(3*I-1, 3) &= (0.236926885056189*(XP24(1)+XP24(5)) \\
 + &+0.478628670499366*(XP24(2)+XP24(4)) \\
 + &+0.568888888888889*XP24(3)) \\
 + &*LEL*0.5 + DP(3*I-1, 3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 DP(3*I-1, 4) &= (0.236926885056189*(XP25(1)+XP25(5)) \\
 + &+0.478628670499366*(XP25(2)+XP25(4)) \\
 + &+0.568888888888889*XP25(3)) \\
 + &*LEL*0.5 + DP(3*I-1, 4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 DP(3*I-1, 5) &= (0.236926885056189*(XP26(1)+XP26(5)) \\
 + &+0.478628670499366*(XP26(2)+XP26(4)) \\
 + &+0.568888888888889*XP26(3)) \\
 + &*LEL*0.5 + DP(3*I-1, 5)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 DP(3*I, 1) &= (0.236926885056189*(XP33(1)+XP33(5)) \\
 + &+0.478628670499366*(XP33(2)+XP33(4)) \\
 + &+0.568888888888889*XP33(3)) \\
 + &*LEL*0.5 + DP(3*I, 1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 DP(3*I, 2) &= (0.236926885056189*(XP34(1)+XP34(5)) \\
 + &+0.478628670499366*(XP34(2)+XP34(4)) \\
 + &+0.568888888888889*XP34(3)) \\
 + &*LEL*0.5 + DP(3*I, 2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 DP(3*I, 3) &= (0.236926885056189*(XP35(1)+XP35(5)) \\
 + &+0.478628670499366*(XP35(2)+XP35(4)) \\
 + &+0.568888888888889*XP35(3)) \\
 + &*LEL*0.5 + DP(3*I, 3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 DP(3*I, 4) &= (0.236926885056189*(XP36(1)+XP36(5)) \\
 + &+0.478628670499366*(XP36(2)+XP36(4)) \\
 + &+0.568888888888889*XP36(3)) \\
 + &*LEL*0.5 + DP(3*I, 4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 DP(3*I+1, 1) &= (0.236926885056189*(XP44(1)+XP44(5)) \\
 + &+0.478628670499366*(XP44(2)+XP44(4)) \\
 + &+0.568888888888889*XP44(3)) \\
 + &*LEL*0.5 + DP(3*I+1, 1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 DP(3*I+1, 2) &= (0.236926885056189*(XP45(1)+XP45(5)) \\
 + &+0.478628670499366*(XP45(2)+XP45(4)) \\
 + &+0.568888888888889*XP45(3)) \\
 + &*LEL*0.5 + DP(3*I+1, 2)
 \end{aligned}$$

A1.2 Engesser の理論による変位解析プログラムのソースリスト

```

DP (3*I+1, 3) = (0. 236926885056189* (XP46 (1)+XP46 (5))
+
+0. 478628670499366* (XP46 (2)+XP46 (4))
+
+0. 568888888888889*XP46 (3))
+
*LEL*0. 5 + DP (3*I+1, 3)

```

```

DP (3*I+2, 1) = (0. 236926885056189* (XP55 (1)+XP55 (5))
+
+0. 478628670499366* (XP55 (2)+XP55 (4))
+
+0. 568888888888889*XP55 (3))
+
*LEL*0. 5 + DP (3*I+2, 1)

```

```

DP (3*I+2, 2) = (0. 236926885056189* (XP56 (1)+XP56 (5))
+
+0. 478628670499366* (XP56 (2)+XP56 (4))
+
+0. 568888888888889*XP56 (3))
+
*LEL*0. 5 + DP (3*I+2, 2)

```

```

DP (3*I+3, 1) = (0. 236926885056189* (XP66 (1)+XP66 (5))
+
+0. 478628670499366* (XP66 (2)+XP66 (4))
+
+0. 568888888888889*XP66 (3))
+
*LEL*0. 5 + DP (3*I+3, 1)

```

2013 continue

C [K][delta0] + [P] - [X] ベクトル [P2] の計算

```

do 2015 I = 1, N_DOF
P2(I) = 0.0

```

2015 continue

```

do 2016 I = 1, N_DOF
do 2017 J = 1, 11
JJ = I+J-6
JJJ = J-5
if(JJ.GT.0) then
if(JJJ.LE.0) then
P2(I) = SK(JJ, 7-J) * DELTA(JJ) + P2(I)
else
P2(I) = SK(I, JJJ) * DELTA(JJ) + P2(I)
endif
endif
endif

```

2017 continue

2016 continue

```

do 2019 I = 1, N_DOF
P2(I) = P2(I) + P(I)

```

2019 continue

```

P2(N_DOF) = P2(N_DOF) - MY

C  -[K]-[dP/ddelta] マトリックス = [SK2]
  do 2020 I = 1, N_DOF
    do 2021 J = 1, 6
      SK2(I, J) = 0.0
2021 continue
2020 continue

    do 2022 I = 1, N_DOF
      do 2023 J = 1, 6
        SK2(I, J) = -SK(I, J)-DP(I, J)
2023 continue
2022 continue

C 境界条件の設定
C  du(2) = du(3) = 0
C
  P2(2)=0.0
  SK2(2, 1) = 1.0
  SK2(2, 2) = 0.0
  SK2(2, 3) = 0.0
  SK2(2, 4) = 0.0
  SK2(2, 5) = 0.0
  SK2(2, 6) = 0.0

  SK2(1, 2) = 0.0

  P2(3)=0.0
  SK2(3, 1) = 1.0
  SK2(3, 2) = 0.0
  SK2(3, 3) = 0.0
  SK2(3, 4) = 0.0
  SK2(3, 5) = 0.0
  SK2(3, 6) = 0.0

  SK2(1, 3) = 0.0

C 連立方程式を解く
C
  call gauss(SK2, P2, N_DOF, DU)

  write(1, 601)
601 format('連立方程式を解いた')
```

C 収束チェック

```

C
      do 2024 I = 4, N_DOF
          if(abs(DU(I)).GT. 1.0E-12) then

              write(1,699) I, DU(I)
699 format(i6,e12.5)

              go to 5000
          else
              endif
2024 continue

```

C 収束後の処理

C 変位の計算

```

      do 3008 I = 1, N_GRID
          U0(I) = 0.0
          W0(I) = 0.0
          U(I) = 0.0
          W(I) = 0.0
3008 continue

      do 3009 I = 1, N_ELEM
          do 3010 J = 1, 5
              XEPS(J) = (1.0-XX(J))*DELTA(3*I-2)+XX(J)*DELTA(3*I+1)
              XG(J) = (1.0-XX(J))*DELTA(3*I-1)+XX(J)*DELTA(3*I+2)
              XTH_G(J) = -(1.0-XX(J))*DELTA(3*I)-XX(J)*DELTA(3*I+3)

              XF1(J) = sqrt((1.0+XEPS(J)**2-XG(J)**2)*cos(XTH_G(J))
+
              -XG(J)*sin(XTH_G(J))
              XF2(J) = sqrt((1.0+XEPS(J)**2-XG(J)**2)*sin(XTH_G(J))
+
              +XG(J)*cos(XTH_G(J))
3010 continue
          U0(I+1) = (0.236926885056189*(XF1(1)+XF1(5))
+
          +0.478628670499366*(XF1(2)+XF1(4))
+
          +0.568888888888889*(XF1(3))*LEL*0.5
+
          + U0(I+1)
          W0(I+1) = (0.236926885056189*(XF2(1)+XF2(5))
+
          +0.478628670499366*(XF2(2)+XF2(4))
+
          +0.568888888888889*(XF2(3))*LEL*0.5
+
          + W0(I+1)
3009 continue

```

```

do 3012 I=2, N_GRID
  do 3013 J=1, I
    U(I) = U(I) + U0(J)
    W(I) = W(I) + W0(J)
  3013 continue
3012 continue

do 3014 I=2, N_GRID
  U(I) = U(I) -X(I)
3014 continue

C 結果の出力
  write(1, 631)
631 format('結果')

  write(1, 632)
632 format('  I  X(I)          eps(I)          gamma(I)
+-theta-gamma  U(I)          W(I)')
  do 2030 I = 1, N_GRID
    write(1, 630) I, X(I), DELTA(3*I-2), DELTA(3*I-1),
+                DELTA(3*I), U(I), W(I)
  630 format(i6, 6(2X, e12. 5))
2030 continue

  close(1)
  close(10)

  stop
  end

subroutine gauss(SK, R1, NSZF, X)
C
C s(i, j) * x(i) = p(j) を解く
C
  IMPLICIT REAL*8 (A-H)
  IMPLICIT REAL*8 (O-Z)

  dimension SK(1210, 6), R1(1210), X(1210)

  NBAND=6
  do 300 N=1, NSZF
    I=N
    do 290 L=2, NBAND

```

```
I=I+1
  if (SK (N, L)) 240, 290, 240
240 C=SK (N, L)/SK (N, 1)
  J=0
  do 270 K=L, NBAND
  J=J+1
  if (SK (N, K)) 260, 270, 260
260 SK (I, J)=SK (I, J)-C*SK (N, K)
270 continue
280 SK (N, L)=C

  R1 (I)=R1 (I)-C*R1 (N)
290 continue
300 R1 (N)=R1 (N)/SK (N, 1)

  N=NSZF
350 N=N-1
  if (N) 500, 500, 360
360 L=N
  do 400 K=2, NBAND
  L=L+1
  if (SK (N, K)) 370, 400, 370
370 R1 (N)=R1 (N)-SK (N, K)*R1 (L)
400 continue
  go to 350

500 continue

  do 800 I=1, NSZF
  X (I)=R1 (I)
800 continue

  return
end
```

A1.3 Timoshenko の理論による変位解析プログラムのソースリスト

```

C      *--1-----+-----2-----+-----3-----+-----4-----+-----5-----+-----6-----+-----7-*
C          伸張せん断エラスティカ (Timoshenko の理論) (一端固定他端自由)
C
C          Programmed by Toshimi Taki
C
C
C          IMPLICIT REAL*8 (A-H)
C          IMPLICIT REAL*8 (L-M)
C          IMPLICIT REAL*8 (O-Z)
C
C          dimension EA(410), EI(410), GA(410), X(410)
C          dimension SK(1210, 6), P(1210), DELTA(1210), DP(1210, 6), P2(1210)
C          dimension DU(1210)
C          dimension SK2(1210, 6), XX(5), XG(5), XTH_G(5), XEPS(5)
C          dimension XF1(5), XF2(5), XF3(5), XF4(5), XF5(5), XF6(5)
C          dimension XP11(5), XP12(5), XP13(5), XP14(5), XP15(5), XP16(5)
C          dimension XP22(5), XP23(5), XP24(5), XP25(5), XP26(5)
C          dimension XP33(5), XP34(5), XP35(5), XP36(5)
C          dimension XP44(5), XP45(5), XP46(5)
C          dimension XP55(5), XP56(5)
C          dimension XP66(5)
C          dimension W0(1210), U0(1210), W(1210), U(1210)
C
C          character*20 da, db
C
C       $\pi$  の設定
C          pi=3.14159265358979
C
C      ガウス積分点 (n=5) の設定
C          XK1 = 0.906179845938664
C          XK2 = 0.538469310105683
C          XX(1) = (1.0-XK1)*0.5
C          XX(2) = (1.0-XK2)*0.5
C          XX(3) = 0.5
C          XX(4) = (1.0+XK2)*0.5
C          XX(5) = (1.0+XK1)*0.5
C
C      データファイル
C          write(*,*) 'Enter Data File Name'
C          read(*,*) da
C          open(10, File=da)
C
C      データ格納ファイル作成

```

```

write(*,*) 'Enter Destination File Name 1'
read(*,*) db
open(1,File=db)

write(1,*)'伸張せん断エラスティカ (Timoshenko の方法) '
write(1,*)'data file: ',da

```

C 要素数の読み込み

```

read(10,*) N_ELEM
N_GRID = N_ELEM + 1

```

C 要素プロパティの読み込み

```

read(10,*) EA(1), EI(1), GA(1)

```

```

do 2000 I =2, N_ELEM
  EA(I) = EA(1)
  EI(I) = EI(1)
  GA(I) = GA(1)

```

```

2000 continue

```

C 全長の読み込み

```

read(10,*) L

```

C 要素の長さ

```

LEL = L/FLOAT(N_ELEM)

```

C 端末荷重の読み込み

```

read(10,*) PX, PZ, MY

```

C 入力データの出力

```

write(1,600) L, N_ELEM
600 format('全長:',e12.5,' 要素数:',i6)

```

```

write(1,605)
605 format('EA EI GA')

```

```

write(1,610) EA(1), EI(1), GA(1)
610 format (e18.8, e18.8, e18.8)

```

```

write(1,615) PX, PZ, MY
615 format('PX =',e18.8,' PZ=',e18.8,' MY=',e18.8)

```

C 節点座標の作成

```

do 2001 I = 1, N_GRID
  X(I) = LEL * FLOAT(I-1)

```

2001 continue

C 全体剛性マトリックス SK() の作成 バンド幅 6

```

N_DOF = 3*N_GRID
do 2002 I = 1, N_DOF
  do 2003 J = 1, 6
    SK(I, J) = 0.0
  
```

2003 continue

2002 continue

```

do 2004 I = 1, N_ELEM
  SK(3*I-2, 1) = EA(I)*LEL/3.0+SK(3*I-2, 1)
  SK(3*I-2, 4) = EA(I)*LEL/6.0+SK(3*I-2, 4)
  SK(3*I-1, 1) = GA(I)*LEL/3.0+SK(3*I-1, 1)
  SK(3*I-1, 4) = GA(I)*LEL/6.0+SK(3*I-1, 4)
  SK(3*I, 1) = EI(I)/LEL +SK(3*I, 1)
  SK(3*I, 4) = -EI(I)/LEL +SK(3*I, 4)
  SK(3*I+1, 1) = EA(I)*LEL/3.0+SK(3*I+1, 1)
  SK(3*I+2, 1) = GA(I)*LEL/3.0+SK(3*I+2, 1)
  SK(3*I+3, 1) = EI(I)/LEL +SK(3*I+3, 1)

```

2004 continue

C δ ベクトルの初期値の設定

```

do 2005 I = 1, N_DOF
  DELTA(I) = 0.0
  DU(I) = 0.0

```

2005 continue

```

do 2007 I = 1, N_GRID
  DELTA(3*I) = -0.01*L*sin(0.5*pi/L*X(I))

```

2007 continue

C 繰り返し計算の始まり

C

C 繰り返し計算のカウンターのセット

```

N_COUNT = 0

```

5000 continue

```

N_COUNT = N_COUNT + 1

```

```

if(N_COUNT.GT.20000) stop

```

```

write(1,660) N_COUNT

```



```

660 format(i6)

      write(*,691) N_COUNT
691 format(i6)

      do 2050 I = 1, N_DOF
          DELTA(I) = DELTA(I) + DU(I)
2050 continue

C -----
C P ベクトルの計算
      do 2008 I = 1, N_DOF
          P(I) = 0.0
2008 continue

      do 2009 I = 1, N_ELEM
          do 2010 J =1, 5
              XEPS(J) = (1.0-XX(J))*DELTA(3*I-2)+XX(J)*DELTA(3*I+1)
              XG(J) = (1.0-XX(J))*DELTA(3*I-1)+XX(J)*DELTA(3*I+2)
              XTH_G(J) = -(1.0-XX(J))*DELTA(3*I)-XX(J)*DELTA(3*I+3)
              XF1(J) = (1.0-XX(J))*
+              -PX*( cos(XG(J))*cos(XTH_G(J))-sin(XG(J))*sin(XTH_G(J)) )
+              -PZ*( cos(XG(J))*sin(XTH_G(J))+sin(XG(J))*cos(XTH_G(J)) )
+              )
              XF2(J) = (1.0-XX(J))*
+              -PX*( -(1.0+XEPS(J))*sin(XG(J))*cos(XTH_G(J))
+                  -(1.0+XEPS(J))*cos(XG(J))*sin(XTH_G(J)) )
+              -PZ*( -(1.0+XEPS(J))*sin(XG(J))*sin(XTH_G(J))
+                  +(1.0+XEPS(J))*cos(XG(J))*cos(XTH_G(J)) )
+              )
              XF3(J) = (1.0-XX(J))*
+              -PX*( (1.0+XEPS(J))*sin(XG(J))*cos(XTH_G(J))
+                  +(1.0+XEPS(J))*cos(XG(J))*sin(XTH_G(J)) )
+              -PZ*( (1.0+XEPS(J))*sin(XG(J))*sin(XTH_G(J))
+                  -(1.0+XEPS(J))*cos(XG(J))*cos(XTH_G(J)) )
+              )
              XF4(J) = XX(J)*
+              -PX*( cos(XG(J))*cos(XTH_G(J))-sin(XG(J))*sin(XTH_G(J)) )
+              -PZ*( cos(XG(J))*sin(XTH_G(J))+sin(XG(J))*cos(XTH_G(J)) )
+              )
              XF5(J) = XX(J)*
+              -PX*( -(1.0+XEPS(J))*sin(XG(J))*cos(XTH_G(J))
+                  -(1.0+XEPS(J))*cos(XG(J))*sin(XTH_G(J)) )
+              -PZ*( -(1.0+XEPS(J))*sin(XG(J))*sin(XTH_G(J))
+                  +(1.0+XEPS(J))*cos(XG(J))*cos(XTH_G(J)) )

```

```
+
+
      )
      XF6(J) = XX(J)*(
+
      -PX*( (1.0+XEPS(J))*sin(XG(J))*cos(XTH_G(J))
+
      + (1.0+XEPS(J))*cos(XG(J))*sin(XTH_G(J)) )
+
      -PZ*( (1.0+XEPS(J))*sin(XG(J))*sin(XTH_G(J))
+
      - (1.0+XEPS(J))*cos(XG(J))*cos(XTH_G(J)) )
+
      )
```

2010 continue

```
P(3*I-2) = (0.236926885056189*(XF1(1)+XF1(5))
+
      +0.478628670499366*(XF1(2)+XF1(4))
+
      +0.568888888888889*(XF1(3))*LEL*0.5
+
      + P(3*I-2)
P(3*I-1) = (0.236926885056189*(XF2(1)+XF2(5))
+
      +0.478628670499366*(XF2(2)+XF2(4))
+
      +0.568888888888889*(XF2(3))*LEL*0.5
+
      + P(3*I-1)
P(3*I) = (0.236926885056189*(XF3(1)+XF3(5))
+
      +0.478628670499366*(XF3(2)+XF3(4))
+
      +0.568888888888889*(XF3(3))*LEL*0.5
+
      + P(3*I)
P(3*I+1) = (0.236926885056189*(XF4(1)+XF4(5))
+
      +0.478628670499366*(XF4(2)+XF4(4))
+
      +0.568888888888889*(XF4(3))*LEL*0.5
+
      + P(3*I+1)
P(3*I+2) = (0.236926885056189*(XF5(1)+XF5(5))
+
      +0.478628670499366*(XF5(2)+XF5(4))
+
      +0.568888888888889*(XF5(3))*LEL*0.5
+
      + P(3*I+2)
P(3*I+3) = (0.236926885056189*(XF6(1)+XF6(5))
+
      +0.478628670499366*(XF6(2)+XF6(4))
+
      +0.568888888888889*(XF6(3))*LEL*0.5
+
      + P(3*I+13)
```

2009 continue

C [d_P/d_delta] マトリックスの計算

```
do 2011 I = 1, N_DOF
  do 2012 J = 1, 6
    DP(I,J) = 0.0
  2012 continue
2011 continue
```

```
do 2013 I = 1, N_ELEM
```

```

do 2014 J = 1, 5
  XEPS(J) = (1.0-XX(J))*DELTA(3*I-2)+XX(J)*DELTA(3*I+1)
  XG(J) = (1.0-XX(J))*DELTA(3*I-1)+XX(J)*DELTA(3*I+2)
  XTH_G(J) = -(1.0-XX(J))*DELTA(3*I)-XX(J)*DELTA(3*I+3)

  XJ11 = 0.0
  XJ12 = -PX*( -sin(XG(J))*cos(XTH_G(J))
+           -cos(XG(J))*sin(XTH_G(J)) )
+         -PZ*( -sin(XG(J))*sin(XTH_G(J))
+           +cos(XG(J))*cos(XTH_G(J)) )
  XJ13 = -PX*( sin(XG(J))*cos(XTH_G(J))
+           +cos(XG(J))*sin(XTH_G(J)) )
+         -PZ*( sin(XG(J))*sin(XTH_G(J))
+           -cos(XG(J))*cos(XTH_G(J)) )
  XJ22 = -PX*( -(1.0+XEPS(J))*cos(XG(J))*cos(XTH_G(J))
+           +(1.0+XEPS(J))*sin(XG(J))*sin(XTH_G(J)) )
+         -PZ*( -(1.0+XEPS(J))*cos(XG(J))*sin(XTH_G(J))
+           -(1.0+XEPS(J))*sin(XG(J))*cos(XTH_G(J)) )
  XJ23 = -PX*( (1.0+XEPS(J))*cos(XG(J))*cos(XTH_G(J))
+           -(1.0+XEPS(J))*sin(XG(J))*sin(XTH_G(J)) )
+         -PZ*( (1.0+XEPS(J))*cos(XG(J))*sin(XTH_G(J))
+           +(1.0+XEPS(J))*sin(XG(J))*cos(XTH_G(J)) )
  XJ33 = -PX*( (1.0+XEPS(J))*sin(XG(J))*sin(XTH_G(J))
+           -(1.0+XEPS(J))*cos(XG(J))*cos(XTH_G(J)) )
+         -PZ*( -(1.0+XEPS(J))*sin(XG(J))*cos(XTH_G(J))
+           -(1.0+XEPS(J))*cos(XG(J))*sin(XTH_G(J)) )

  XP11(J) = (1.0-XX(J))**2*XJ11
  XP12(J) = (1.0-XX(J))**2*XJ12
  XP13(J) = (1.0-XX(J))**2*XJ13
  XP14(J) = (1.0-XX(J))*XX(J)*XJ11
  XP15(J) = (1.0-XX(J))*XX(J)*XJ12
  XP16(J) = (1.0-XX(J))*XX(J)*XJ13

  XP22(J) = (1.0-XX(J))**2*XJ22
  XP23(J) = (1.0-XX(J))**2*XJ23
  XP24(J) = (1.0-XX(J))*XX(J)*XJ12
  XP25(J) = (1.0-XX(J))*XX(J)*XJ22
  XP26(J) = (1.0-XX(J))*XX(J)*XJ23

  XP33(J) = (1.0-XX(J))**2*XJ33
  XP34(J) = (1.0-XX(J))*XX(J)*XJ13
  XP35(J) = (1.0-XX(J))*XX(J)*XJ23
  XP36(J) = (1.0-XX(J))*XX(J)*XJ33

```

$$\begin{aligned} XP44(J) &= XX(J)**2*XJ11 \\ XP45(J) &= XX(J)**2*XJ12 \\ XP46(J) &= XX(J)**2*XJ13 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} XP55(J) &= XX(J)**2*XJ22 \\ XP56(J) &= XX(J)**2*XJ23 \end{aligned}$$

$$XP66(J) = XX(J)**2*XJ33$$

2014 continue

$$\begin{aligned} DP(3*I-2, 1) &= (0.236926885056189*(XP11(1)+XP11(5)) \\ &+ 0.478628670499366*(XP11(2)+XP11(4)) \\ &+ 0.568888888888889*XP11(3)) \\ &+ *LEL*0.5 + DP(3*I-2, 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} DP(3*I-2, 2) &= (0.236926885056189*(XP12(1)+XP12(5)) \\ &+ 0.478628670499366*(XP12(2)+XP12(4)) \\ &+ 0.568888888888889*XP12(3)) \\ &+ *LEL*0.5 + DP(3*I-2, 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} DP(3*I-2, 3) &= (0.236926885056189*(XP13(1)+XP13(5)) \\ &+ 0.478628670499366*(XP13(2)+XP13(4)) \\ &+ 0.568888888888889*XP13(3)) \\ &+ *LEL*0.5 + DP(3*I-2, 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} DP(3*I-2, 4) &= (0.236926885056189*(XP14(1)+XP14(5)) \\ &+ 0.478628670499366*(XP14(2)+XP14(4)) \\ &+ 0.568888888888889*XP14(3)) \\ &+ *LEL*0.5 + DP(3*I-2, 4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} DP(3*I-2, 5) &= (0.236926885056189*(XP15(1)+XP15(5)) \\ &+ 0.478628670499366*(XP15(2)+XP15(4)) \\ &+ 0.568888888888889*XP15(3)) \\ &+ *LEL*0.5 + DP(3*I-2, 5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} DP(3*I-2, 6) &= (0.236926885056189*(XP16(1)+XP16(5)) \\ &+ 0.478628670499366*(XP16(2)+XP16(4)) \\ &+ 0.568888888888889*XP16(3)) \\ &+ *LEL*0.5 + DP(3*I-2, 6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} DP(3*I-1, 1) &= (0.236926885056189*(XP22(1)+XP22(5)) \\ &+ 0.478628670499366*(XP22(2)+XP22(4)) \\ &+ 0.568888888888889*XP22(3)) \\ &+ *LEL*0.5 + DP(3*I-1, 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 DP(3*I-1, 2) &= (0.236926885056189*(XP23(1)+XP23(5)) \\
 + &+0.478628670499366*(XP23(2)+XP23(4)) \\
 + &+0.568888888888889*XP23(3)) \\
 + &*LEL*0.5 + DP(3*I-1, 2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 DP(3*I-1, 3) &= (0.236926885056189*(XP24(1)+XP24(5)) \\
 + &+0.478628670499366*(XP24(2)+XP24(4)) \\
 + &+0.568888888888889*XP24(3)) \\
 + &*LEL*0.5 + DP(3*I-1, 3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 DP(3*I-1, 4) &= (0.236926885056189*(XP25(1)+XP25(5)) \\
 + &+0.478628670499366*(XP25(2)+XP25(4)) \\
 + &+0.568888888888889*XP25(3)) \\
 + &*LEL*0.5 + DP(3*I-1, 4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 DP(3*I-1, 5) &= (0.236926885056189*(XP26(1)+XP26(5)) \\
 + &+0.478628670499366*(XP26(2)+XP26(4)) \\
 + &+0.568888888888889*XP26(3)) \\
 + &*LEL*0.5 + DP(3*I-1, 5)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 DP(3*I, 1) &= (0.236926885056189*(XP33(1)+XP33(5)) \\
 + &+0.478628670499366*(XP33(2)+XP33(4)) \\
 + &+0.568888888888889*XP33(3)) \\
 + &*LEL*0.5 + DP(3*I, 1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 DP(3*I, 2) &= (0.236926885056189*(XP34(1)+XP34(5)) \\
 + &+0.478628670499366*(XP34(2)+XP34(4)) \\
 + &+0.568888888888889*XP34(3)) \\
 + &*LEL*0.5 + DP(3*I, 2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 DP(3*I, 3) &= (0.236926885056189*(XP35(1)+XP35(5)) \\
 + &+0.478628670499366*(XP35(2)+XP35(4)) \\
 + &+0.568888888888889*XP35(3)) \\
 + &*LEL*0.5 + DP(3*I, 3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 DP(3*I, 4) &= (0.236926885056189*(XP36(1)+XP36(5)) \\
 + &+0.478628670499366*(XP36(2)+XP36(4)) \\
 + &+0.568888888888889*XP36(3)) \\
 + &*LEL*0.5 + DP(3*I, 4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 DP(3*I+1, 1) &= (0.236926885056189*(XP44(1)+XP44(5)) \\
 + &+0.478628670499366*(XP44(2)+XP44(4)) \\
 + &+0.568888888888889*XP44(3)) \\
 + &*LEL*0.5 + DP(3*I+1, 1)
 \end{aligned}$$

```

DP (3*I+1, 2) = (0. 236926885056189*(XP45 (1)+XP45 (5))
+
+0. 478628670499366*(XP45 (2)+XP45 (4))
+
+0. 568888888888889*XP45 (3))
+
*LEL*0. 5 + DP (3*I+1, 2)

```

```

DP (3*I+1, 3) = (0. 236926885056189*(XP46 (1)+XP46 (5))
+
+0. 478628670499366*(XP46 (2)+XP46 (4))
+
+0. 568888888888889*XP46 (3))
+
*LEL*0. 5 + DP (3*I+1, 3)

```

```

DP (3*I+2, 1) = (0. 236926885056189*(XP55 (1)+XP55 (5))
+
+0. 478628670499366*(XP55 (2)+XP55 (4))
+
+0. 568888888888889*XP55 (3))
+
*LEL*0. 5 + DP (3*I+2, 1)

```

```

DP (3*I+2, 2) = (0. 236926885056189*(XP56 (1)+XP56 (5))
+
+0. 478628670499366*(XP56 (2)+XP56 (4))
+
+0. 568888888888889*XP56 (3))
+
*LEL*0. 5 + DP (3*I+2, 2)

```

```

DP (3*I+3, 1) = (0. 236926885056189*(XP66 (1)+XP66 (5))
+
+0. 478628670499366*(XP66 (2)+XP66 (4))
+
+0. 568888888888889*XP66 (3))
+
*LEL*0. 5 + DP (3*I+3, 1)

```

2013 continue

C [K][delta0] + [P] - [X] ベクトル [P2] の計算

```

do 2015 I = 1, N_DOF
P2(I) = 0.0

```

2015 continue

```

do 2016 I = 1, N_DOF

```

```

do 2017 J = 1, 11

```

```

JJ = I+J-6

```

```

JJJ = J-5

```

```

if(JJ.GT.0) then

```

```

if(JJJ.LE.0) then

```

```

P2(I) = SK(JJ, 7-J) * DELTA(JJ) + P2(I)

```

```

else

```

```

P2(I) = SK(I, JJJ) * DELTA(JJ) + P2(I)

```

```

C write(1, 666) I, J, JJ, JJJ, I, JJJ, SK(I, JJJ), DELTA(JJ)

```

```

endif

```

```

endif

```

```

2017 continue
2016 continue

      do 2019 I = 1, N_DOF
          P2(I) = P2(I) + P(I)
2019 continue

      P2(N_DOF) = P2(N_DOF) - MY

C  -[K]-[dP/ddelta] マトリックス = [SK2]
      do 2020 I = 1, N_DOF
          do 2021 J = 1, 6
              SK2(I, J) = 0.0
2021 continue
2020 continue

          do 2022 I = 1, N_DOF
              do 2023 J = 1, 6
                  SK2(I, J) = -SK(I, J) - DP(I, J)
2023 continue
2022 continue

C  境界条件の設定
C  du(2) = du(3) = 0
C
      P2(2)=0.0
      SK2(2, 1) = 1.0
      SK2(2, 2) = 0.0
      SK2(2, 3) = 0.0
      SK2(2, 4) = 0.0
      SK2(2, 5) = 0.0
      SK2(2, 6) = 0.0

      SK2(1, 2) = 0.0

      P2(3)=0.0
      SK2(3, 1) = 1.0
      SK2(3, 2) = 0.0
      SK2(3, 3) = 0.0
      SK2(3, 4) = 0.0
      SK2(3, 5) = 0.0
      SK2(3, 6) = 0.0

      SK2(1, 3) = 0.0

```

付録1 伸張せん断エラスティカの変位解析有限要素法 FORTRAN77 プログラム

```

C      do 2200 I=1, N_DOF
C          write(1,661) SK2(I,1),SK2(I,2),SK2(I,3),SK2(I,4),
C      +                SK2(I,5),SK2(I,6)
C 661 format(6e12.5)
C 2200 continue

C 連立方程式を解く
C
      call gauss(SK2,P2,N_DOF,DU)

      write(1,601)
601 format('連立方程式を解いた')

C 収束チェック
C
      do 2024 I = 4, N_DOF
          if(abs(DU(I)).GT. 1.0E-12) then

              write(1,699) I, DU(I)
699 format(i6,e12.5)

              go to 5000
          else
              endif
2024 continue

C 収束後の処理

C 変位の計算
      do 3008 I = 1, N_GRID
          UO(I) = 0.0
          WO(I) = 0.0
          U(I) = 0.0
          W(I) =0.0
3008 continue

      do 3009 I = 1, N_ELEM
          do 3010 J =1, 5
              XEPS(J) = (1.0-XX(J))*DELTA(3*I-2)+XX(J)*DELTA(3*I+1)
              XG(J) = (1.0-XX(J))*DELTA(3*I-1)+XX(J)*DELTA(3*I+2)
              XTH_G(J) = -(1.0-XX(J))*DELTA(3*I)-XX(J)*DELTA(3*I+3)

              XF1(J) = (1.0+XEPS(J))*cos(XG(J)+XTH_G(J))
              XF2(J) = (1.0+XEPS(J))*sin(XG(J)+XTH_G(J))
          3010 continue
      3009 continue

```



```

      U0(I+1) = (0.236926885056189*(XF1(1)+XF1(5))
+             +0.478628670499366*(XF1(2)+XF1(4))
+             +0.568888888888889*XF1(3))*LEL*0.5
+             + U0(I+1)
      W0(I+1) = (0.236926885056189*(XF2(1)+XF2(5))
+             +0.478628670499366*(XF2(2)+XF2(4))
+             +0.568888888888889*XF2(3))*LEL*0.5
+             + W0(I+1)

```

```
3009 continue
```

```

      do 3012 I=2, N_GRID
        do 3013 J=1, I
          U(I) = U(I) + U0(J)
          W(I) = W(I) + W0(J)

```

```
3013 continue
```

```
3012 continue
```

```

      do 3014 I=2, N_GRID
        U(I) = U(I) -X(I)

```

```
3014 continue
```

C 結果の出力

```
      write(1, 631)
```

```
631 format(' 結果')
```

```
      write(1, 632)
```

```
632 format('      I   X(I)          eps(I)          gamma(I)
+-theta-gamma   U(I)          W(I)')
```

```
      do 2030 I = 1, N_GRID
```

```
        write(1, 630) I, X(I), DELTA(3*I-2), DELTA(3*I-1),
+                   DELTA(3*I), U(I), W(I)
```

```
630 format(i6, 6(2X, e12.5))
```

```
2030 continue
```

```
      close(1)
```

```
      close(10)
```

```
      stop
```

```
      end
```

注：連立方程式を解くサブルーチンは、A1.2 項を参照のこと。

A1.4 Haringx の理論による変位解析プログラムのソースリスト

```

C      *--1-----+-----2-----+-----3-----+-----4-----+-----5-----+-----6-----+-----7-*
C          伸張せん断エラスティカ (Haringx の理論) (一端固定他端自由)
C
C          Programmed by Toshimi Taki
C
C
C          IMPLICIT REAL*8 (A-H)
C          IMPLICIT REAL*8 (L-M)
C          IMPLICIT REAL*8 (O-Z)
C
C          dimension EA(410), EI(410), GA(410), X(410)
C          dimension SK(1210, 6), P(1210), DELTA(1210), DP(1210, 6), P2(1210)
C          dimension DU(1210)
C          dimension SK2(1210, 6), XX(5), XG(5), XTH_G(5), XEPS(5)
C          dimension XF1(5), XF2(5), XF3(5), XF4(5), XF5(5), XF6(5)
C          dimension XP13(5), XP16(5), XP23(5), XP26(5), XP33(5), XP34(5), XP35(5)
C          dimension XP36(5), XP46(5), XP56(5), XP66(5)
C          dimension W0(1210), U0(1210), W(1210), U(1210)
C
C          character*20 da, db
C
C       $\pi$  の設定
C          pi=3.14159265358979
C
C      ガウス積分点 (n=5) の設定
C          XK1 = 0.906179845938664
C          XK2 = 0.538469310105683
C          XX(1) = (1.0-XK1)*0.5
C          XX(2) = (1.0-XK2)*0.5
C          XX(3) = 0.5
C          XX(4) = (1.0+XK2)*0.5
C          XX(5) = (1.0+XK1)*0.5
C
C      データファイル
C          write(*,*) 'Enter Data File Name'
C          read(*,*) da
C          open(10, File=da)
C
C      データ格納ファイル作成
C          write(*,*) 'Enter Destination File Name 1'
C          read(*,*) db
C          open(1, File=db)

```

```
write(1,*)'伸張せん断エラスティカ (Haringx の方法) '
```

```
write(1,*)'data file: ',da
```

C 要素数の読み込み

```
read(10,*) N_ELEM
N_GRID = N_ELEM + 1
```

C 要素プロパティの読み込み

```
read(10,*) EA(1), EI(1), GA(1)
```

```
do 2000 I =2, N_ELEM
EA(I) = EA(1)
EI(I) = EI(1)
GA(I) = GA(1)
```

```
2000 continue
```

C 全長の読み込み

```
read(10,*) L
```

C 要素の長さ

```
LEL = L/FLOAT(N_ELEM)
```

C 端末荷重の読み込み

```
read(10,*) PX, PZ, MY
```

C 入力データの出力

```
write(1,600) L, N_ELEM
```

```
600 format('全長:',e12.5,' 要素数:',i6)
```

```
write(1,605)
```

```
605 format('EA EI GA')
```

```
write(1,610) EA(1), EI(1), GA(1)
```

```
610 format (e18.8, e18.8, e18.8)
```

```
write(1,615) PX, PZ, MY
```

```
615 format('PX =',e18.8,' PZ=',e18.8,' MY=',e18.8)
```

C 節点座標の作成

```
do 2001 I = 1, N_GRID
X(I) = LEL * FLOAT(I-1)
```

```
2001 continue
```

C 全体剛性マトリックス SK() の作成 バンド幅 6

付録1 伸張せん断エラスティカの変位解析有限要素法 FORTRAN77 プログラム

```

N_DOF = 3*N_GRID
do 2002 I = 1, N_DOF
  do 2003 J = 1, 6
    SK(I, J) = 0.0
2003 continue
2002 continue

do 2004 I = 1, N_ELEM
  SK(3*I-2, 1) = EA(I)*LEL/3.0+SK(3*I-2, 1)
  SK(3*I-2, 4) = EA(I)*LEL/6.0+SK(3*I-2, 4)
  SK(3*I-1, 1) = GA(I)*LEL/3.0+SK(3*I-1, 1)
  SK(3*I-1, 4) = GA(I)*LEL/6.0+SK(3*I-1, 4)
  SK(3*I, 1) = EI(I)/LEL +SK(3*I, 1)
  SK(3*I, 4) = -EI(I)/LEL +SK(3*I, 4)
  SK(3*I+1, 1) = EA(I)*LEL/3.0+SK(3*I+1, 1)
  SK(3*I+2, 1) = GA(I)*LEL/3.0+SK(3*I+2, 1)
  SK(3*I+3, 1) = EI(I)/LEL +SK(3*I+3, 1)
2004 continue

C   δ ベクトルの初期値の設定
do 2005 I = 1, N_DOF
  DELTA(I) = 0.0
  DU(I) = 0.0
2005 continue

do 2007 I = 1, N_GRID
  DELTA(3*I) = -0.01*L*sin(0.5*pi/L*X(I))
2007 continue

C   繰り返し計算の始まり
C

C   繰り返し計算のカウンターのセット
N_COUNT = 0

5000 continue

N_COUNT = N_COUNT + 1

if(N_COUNT.GT.20000) stop

write(1,660) N_COUNT
660 format(i6)

write(*,691) N_COUNT

```

```
691 format(i6)
```

```
do 2050 I = 1, N_DOF
  DELTA(I) = DELTA(I) + DU(I)
```

```
2050 continue
```

```
C -----
```

```
C P ベクトルの計算
```

```
do 2008 I = 1, N_DOF
  P(I) = 0.0
```

```
2008 continue
```

```
do 2009 I = 1, N_ELEM
```

```
do 2010 J =1, 5
```

```
  XEPS(J) = (1.0-XX(J))*DELTA(3*I-2)+XX(J)*DELTA(3*I+1)
```

```
  XG(J) = (1.0-XX(J))*DELTA(3*I-1)+XX(J)*DELTA(3*I+2)
```

```
  XTH_G(J) = -(1.0-XX(J))*DELTA(3*I)-XX(J)*DELTA(3*I+3)
```

```
  XF1(J) = (1.0-XX(J))*(-PX*cos(XTH_G(J))-PZ*sin(XTH_G(J)))
```

```
  XF2(J) = (1.0-XX(J))*(PX*sin(XTH_G(J))-PZ*cos(XTH_G(J)))
```

```
  XF3(J) = (1.0-XX(J))*(
```

```
+      -PX*(XG(J)*cos(XTH_G(J))+(1.0+XEPS(J))*sin(XTH_G(J)))
```

```
+      -PZ*(XG(J)*sin(XTH_G(J))-(1.0+XEPS(J))*cos(XTH_G(J)))
```

```
+      )
```

```
  XF4(J) = XX(J)*(-PX*cos(XTH_G(J))-PZ*sin(XTH_G(J)))
```

```
  XF5(J) = XX(J)*(PX*sin(XTH_G(J))-PZ*cos(XTH_G(J)))
```

```
  XF6(J) = XX(J)*(
```

```
+      -PX*(XG(J)*cos(XTH_G(J))+(1.0+XEPS(J))*sin(XTH_G(J)))
```

```
+      -PZ*(XG(J)*sin(XTH_G(J))-(1.0+XEPS(J))*cos(XTH_G(J)))
```

```
+      )
```

```
2010 continue
```

```
  P(3*I-2) = (0.236926885056189*(XF1(1)+XF1(5))
```

```
+      +0.478628670499366*(XF1(2)+XF1(4))
```

```
+      +0.568888888888889*XF1(3))*LEL*0.5
```

```
+      + P(3*I-2)
```

```
  P(3*I-1) = (0.236926885056189*(XF2(1)+XF2(5))
```

```
+      +0.478628670499366*(XF2(2)+XF2(4))
```

```
+      +0.568888888888889*XF2(3))*LEL*0.5
```

```
+      + P(3*I-1)
```

```
  P(3*I) = (0.236926885056189*(XF3(1)+XF3(5))
```

```
+      +0.478628670499366*(XF3(2)+XF3(4))
```

```
+      +0.568888888888889*XF3(3))*LEL*0.5
```

```
+      + P(3*I)
```

```
  P(3*I+1) = (0.236926885056189*(XF4(1)+XF4(5))
```

```

+           +0.478628670499366*(XF4(2)+XF4(4))
+           +0.568888888888889*XF4(3))*LEL*0.5
+           + P(3*I+1)
P(3*I+2) = (0.236926885056189*(XF5(1)+XF5(5))
+           +0.478628670499366*(XF5(2)+XF5(4))
+           +0.568888888888889*XF5(3))*LEL*0.5
+           + P(3*I+2)
P(3*I+3) = (0.236926885056189*(XF6(1)+XF6(5))
+           +0.478628670499366*(XF6(2)+XF6(4))
+           +0.568888888888889*XF6(3))*LEL*0.5
+           + P(3*I+13)

```

2009 continue

C [d_P/d_delta] マトリックスの計算

```

do 2011 I = 1, N_DOF
do 2012 J = 1, 6
DP(I, J) = 0.0
2012 continue
2011 continue

do 2013 I = 1, N_ELEM
do 2014 J = 1, 5
XEPS(J) = (1.0-XX(J))*DELTA(3*I-2)+XX(J)*DELTA(3*I+1)
XG(J) = (1.0-XX(J))*DELTA(3*I-1)+XX(J)*DELTA(3*I+2)
XTH_G(J) = -(1.0-XX(J))*DELTA(3*I)-XX(J)*DELTA(3*I+3)
XP13(J) = (1.0-XX(J))**2*(-PX*sin(XTH_G(J))
+           +PZ*cos(XTH_G(J)))
XP16(J) = (1.0-XX(J))*XX(J)*(-PX*sin(XTH_G(J))
+           +PZ*cos(XTH_G(J)))
XP23(J) = (1.0-XX(J))**2*(-PX*cos(XTH_G(J))
+           -PZ*sin(XTH_G(J)))
XP26(J) = (1.0-XX(J))*XX(J)*(-PX*cos(XTH_G(J))
+           -PZ*sin(XTH_G(J)))
XP33(J) = (1.0-XX(J))**2*(
+           -PX*(XG(J)*sin(XTH_G(J))-(1.0+XEPS(J))*cos(XTH_G(J)))
+           -PZ*(-XG(J)*cos(XTH_G(J))-(1.0+XEPS(J))*sin(XTH_G(J)))
+           )
XP36(J) = (1.0-XX(J))*XX(J)*(
+           -PX*(XG(J)*sin(XTH_G(J))-(1.0+XEPS(J))*cos(XTH_G(J)))
+           -PZ*(-XG(J)*cos(XTH_G(J))-(1.0+XEPS(J))*sin(XTH_G(J)))
+           )
XP46(J) = XX(J)**2*(-PX*sin(XTH_G(J))
+           +PZ*cos(XTH_G(J)))

```

```

XP56(J) = XX(J)**2*(-PX*cos(XTH_G(J))
+         -PZ*sin(XTH_G(J)))
XP66(J) = XX(J)**2*(
+         -PX*(XG(J)*sin(XTH_G(J))-(1.0+XEPS(J))*cos(XTH_G(J)))
+         -PZ*(-XG(J)*cos(XTH_G(J))-(1.0+XEPS(J))*sin(XTH_G(J)))
+         )

```

2014 continue

```

DP(3*I-2, 3) = (0.236926885056189*(XP13(1)+XP13(5))
+              +0.478628670499366*(XP13(2)+XP13(4))
+              +0.568888888888889*XP13(3))
+              *LEL*0.5 + DP(3*I-2, 3)
DP(3*I-2, 6) = (0.236926885056189*(XP16(1)+XP16(5))
+              +0.478628670499366*(XP16(2)+XP16(4))
+              +0.568888888888889*XP16(3))
+              *LEL*0.5 + DP(3*I-2, 6)
DP(3*I-1, 2) = (0.236926885056189*(XP23(1)+XP23(5))
+              +0.478628670499366*(XP23(2)+XP23(4))
+              +0.568888888888889*XP23(3))
+              *LEL*0.5 + DP(3*I-1, 3)
DP(3*I-1, 5) = (0.236926885056189*(XP26(1)+XP26(5))
+              +0.478628670499366*(XP26(2)+XP26(4))
+              +0.568888888888889*XP26(3))
+              *LEL*0.5 + DP(3*I-2, 5)
DP(3*I, 1)   = (0.236926885056189*(XP33(1)+XP33(5))
+              +0.478628670499366*(XP33(2)+XP33(4))
+              +0.568888888888889*XP33(3))
+              *LEL*0.5 + DP(3*I, 1)
DP(3*I, 2)   = (0.236926885056189*(XP34(1)+XP34(5))
+              +0.478628670499366*(XP34(2)+XP34(4))
+              +0.568888888888889*XP34(3))
+              *LEL*0.5 + DP(3*I, 2)
DP(3*I, 3)   = (0.236926885056189*(XP35(1)+XP35(5))
+              +0.478628670499366*(XP35(2)+XP35(4))
+              +0.568888888888889*XP35(3))
+              *LEL*0.5 + DP(3*I, 3)
DP(3*I, 4)   = (0.236926885056189*(XP36(1)+XP36(5))
+              +0.478628670499366*(XP36(2)+XP36(4))
+              +0.568888888888889*XP36(3))
+              *LEL*0.5 + DP(3*I, 4)
DP(3*I+1, 3) = (0.236926885056189*(XP46(1)+XP46(5))
+              +0.478628670499366*(XP46(2)+XP46(4))
+              +0.568888888888889*XP46(3))
+              *LEL*0.5 + DP(3*I+1, 3)
DP(3*I+2, 2) = (0.236926885056189*(XP56(1)+XP56(5))

```

付録1 伸張せん断エラスティカの変位解析有限要素法 FORTRAN77 プログラム

```

+          +0.478628670499366*(XP56(2)+XP56(4))
+          +0.568888888888889*XP56(3))
+          *LEL*0.5 + DP(3*I+2, 2)
DP(3*I+3, 1) = (0.236926885056189*(XP66(1)+XP66(5))
+          +0.478628670499366*(XP66(2)+XP66(4))
+          +0.568888888888889*XP66(3))
+          *LEL*0.5 + DP(3*I+3, 1)

2013 continue

C [K][delta0] + [P] - [X] ベクトル [P2] の計算
do 2015 I = 1, N_DOF
  P2(I) = 0.0
2015 continue

do 2016 I = 1, N_DOF
  do 2017 J = 1, 11
    JJ = I+J-6
    JJJ = J-5
    if(JJ.GT.0) then
      if(JJJ.LE.0) then
        P2(I) = SK(JJ, 7-J) * DELTA(JJ) + P2(I)
C      write(1,666) I, J, JJ, JJJ, JJ, 7-J, SK(JJ,7-J), DELTA(JJ)
C 666 format(' I=',i6,' J=',i6,' JJ=',i6,' JJJ=',i6,
C +          ',2i6,2e12.5)
      else
        P2(I) = SK(I, JJJ) * DELTA(JJ) + P2(I)
C      write(1,666) I, J, JJ, JJJ, I, JJJ, SK(I, JJJ), DELTA(JJ)
      endif
    endif
  endif
2017 continue
2016 continue

do 2019 I = 1, N_DOF
  P2(I) = P2(I) + P(I)
2019 continue

P2(N_DOF) = P2(N_DOF) - MY

C -[K]-[dP/ddelta] マトリックス = [SK2]
do 2020 I = 1, N_DOF
  do 2021 J = 1, 6
    SK2(I, J) = 0.0
2021 continue
2020 continue

```



```

do 2022 I = 1, N_DOF
  do 2023 J = 1, 6
    SK2(I, J) = -SK(I, J)-DP(I, J)
2023 continue
2022 continue

C 境界条件の設定
C du(2) = du(3) = 0
C
  P2(2)=0.0
  SK2(2, 1) = 1.0
  SK2(2, 2) = 0.0
  SK2(2, 3) = 0.0
  SK2(2, 4) = 0.0
  SK2(2, 5) = 0.0
  SK2(2, 6) = 0.0

  SK2(1, 2) = 0.0

  P2(3)=0.0
  SK2(3, 1) = 1.0
  SK2(3, 2) = 0.0
  SK2(3, 3) = 0.0
  SK2(3, 4) = 0.0
  SK2(3, 5) = 0.0
  SK2(3, 6) = 0.0

  SK2(1, 3) = 0.0

C 連立方程式を解く
C
  call gauss(SK2, P2, N_DOF, DU)

  write(1, 601)
601 format('連立方程式を解いた')

C 収束チェック
C
  do 2024 I = 4, N_DOF
    if(abs(DU(I)).GT. 1.0E-12) then

      write(1, 699) I, DU(I)
699 format(i6, e12.5)

```

```

        go to 5000
    else
    endif
2024 continue

```

C 収束後の処理

C 変位の計算

```

do 3008 I = 1, N_GRID
    U0(I) = 0.0
    W0(I) = 0.0
    U(I) = 0.0
    W(I) = 0.0
3008 continue

do 3009 I = 1, N_ELEM
do 3010 J = 1, 5
    XEPS(J) = (1.0-XX(J))*DELTA(3*I-2)+XX(J)*DELTA(3*I+1)
    XG(J) = (1.0-XX(J))*DELTA(3*I-1)+XX(J)*DELTA(3*I+2)
    XTH_G(J) = -(1.0-XX(J))*DELTA(3*I)-XX(J)*DELTA(3*I+3)

    XF1(J) = (1.0+XEPS(J))*cos(XTH_G(J))-XG(J)*sin(XTH_G(J))
    XF2(J) = (1.0+XEPS(J))*sin(XTH_G(J))+XG(J)*cos(XTH_G(J))
3010 continue
    U0(I+1) = (0.236926885056189*(XF1(1)+XF1(5))
+           +0.478628670499366*(XF1(2)+XF1(4))
+           +0.568888888888889*XF1(3))*LEL*0.5
+           + U0(I+1)
    W0(I+1) = (0.236926885056189*(XF2(1)+XF2(5))
+           +0.478628670499366*(XF2(2)+XF2(4))
+           +0.568888888888889*XF2(3))*LEL*0.5
+           + W0(I+1)

3009 continue

do 3012 I=2, N_GRID
do 3013 J=1, I
    U(I) = U(I) + U0(J)
    W(I) = W(I) + W0(J)
3013 continue
3012 continue

do 3014 I=2, N_GRID
    U(I) = U(I) -X(I)
3014 continue

```

C 結果の出力

```
      write(1, 631)
631 format(' 結果')

      write(1, 632)
632 format('      I   X(I)           eps(I)           gamma(I)
+-theta-gamma   U(I)           W(I)')
      do 2030 I = 1, N_GRID
          write(1, 630) I, X(I), DELTA(3*I-2), DELTA(3*I-1),
+
          DELTA(3*I), U(I), W(I)
630 format(i6, 6(2X, e12.5))
2030 continue

      close(1)
      close(10)

      stop
      end
```

注：連立方程式を解くサブルーチンは、A1.2 項を参照のこと。