論文の内容の要旨

論文題目　Modular transformation properties
of characters of the $\mathcal{N}=2$ superconformal algebra
（$\mathcal{N}=2$ 超共形代数の指標のモジュラー変換性）

氏　　名　佐藤 僚

1　本論文で得た結果の要約

$\mathcal{N}=2$ **超共形代数**（あるいは，$\mathcal{N}=2$ Neveu-Schwarz 代数）とは，1976 年に M. Ademollo らによって導入された，局所的な無限小 $\mathcal{N}=2$ 超共形変換のなす Lie 超代数の普遍中心拡大として得られる無限次元 Lie 超代数である．$\mathcal{N}=2$ 超共形代数は 1 次元の中心 $\mathbb{C}C$ をもち，中心元 C がスカラー倍写像 $c\,\mathsf{id}_M$ で作用するような表現 M を中心電荷 c の表現と呼ぶ．本論文では，互いに素な整数の組 $(p,p')\in\mathbb{Z}_{\geq 2}\times\mathbb{Z}_{\geq 1}$ によって中心電荷が

$$c_{p,p'}:=3\left(1-\frac{2p'}{p}\right)$$

と表わされる $\mathcal{N}=2$ 超共形代数（および付随する単純頂点作用素超代数）の表現論を用いて，モジュラー群 $\mathsf{SL}(2,\mathbb{Z})$ の作用で不変な指標関数の族を構成した．本論文の主結果は，現れる表現がすべて非ユニタリ表現となる $p'\geq 2$ の場合が本質的であり，$p'=1$ の場合には既に Ravanini-Yang によって知られていた $\mathcal{N}=2$ ユニタリ極小系列の指標関数のモジュラー不変性に一致する．

以下では，背景の概説を与えた後，本論文の主結果を正確に述べる．

2　背景

$\mathcal{N}=2$ 超共形代数の中心電荷 c の真空表現と呼ばれる特別な一般化 Verma 加群 V_c は，**頂点作用素超代数**（vertex operator superalgebra, VOSA）と呼ばれる代数構造をもつことが知られており，本論文ではその VOSA としての単純商 L_c の表現論を取り扱う．この表現論は，**コセット構成**と呼ばれる手法を用いることにより，相対的によく知られたアフィン Lie 代数 $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ に付随するレベル k の単純頂点作用素代数（VOA）$L_k(\mathfrak{sl}_2)$ の表現論と関連付けることができる．この節では，それらの関係性について概説する．

2.1　風間-鈴木コセット構成

三角分解 $\mathfrak{sl}_2=\mathfrak{n}_-\oplus\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{n}_+$ に付随して得られる半無限複体

$$C_k(\mathfrak{sl}_2,\mathfrak{n}_+):=L_k(\mathfrak{sl}_2)\otimes\bigwedge^{\frac{\infty}{2}}(\mathfrak{n}_+)$$

への随伴作用から定まる自然な埋め込み $L_{k+2}(\mathfrak{h})\hookrightarrow C_k(\mathfrak{sl}_2,\mathfrak{n}_+)$ に関する可換子頂点超代数（あるいはコセット頂点超代数）$\mathsf{Com}\big(C_k(\mathfrak{sl}_2,\mathfrak{n}_+),L_{k+2}(\mathfrak{h})\big)$ について，以下の成立が知られている．

Theorem 1 (cf. Creutzig-Linshaw)**.** 任意の $k \in \mathbb{C} \setminus \{0, -2\}$ に対して，頂点作用素超代数の同型

$$L_{c_k} \cong \mathsf{Com}\big(C_k(\mathfrak{sl}_2, \mathfrak{n}_+), L_{k+2}(\mathfrak{h})\big)$$

が成立する．ただし，$c_k := 3\left(1 - \frac{2}{k+2}\right)$ とする．

互いに素な整数の組 $(p, p') \in \mathbb{Z}_{\geq 2} \times \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対して

$$k_{p,p'} := -2 + \frac{p}{p'}$$

と表わされるレベルを Kac-Wakimoto の認容レベルと呼ぶ．このとき，$c_{p,p'} = c_{k_{p,p'}}$ であることより，

風間-鈴木コセット構成

アフィン VOA $L_{k_{p,p'}}(\mathfrak{sl}_2)$ を用いて $\mathcal{N} = 2$ VOSA $L_{c_{p,p'}}$ を構成できる

ことが分かる．

2.2 Feigin-Semikhatov-Tipunin によるコセット構成

一方，Feigin-Semikhatov-Tipunin は [FST98] において，

風間-鈴木コセット構成の逆

$\mathcal{N} = 2$ VOSA $L_{c_{p,p'}}$ を用いてアフィン VOA $L_{k_{p,p'}}(\mathfrak{sl}_2)$ を構成できる

ような新たなコセット構成を発見した．私は [FST98] の議論を精密化することで，Theorem 1 に対応する同型 [Sat16, Corollary 7.3] を証明し，$L_{c_{p,p'}}$ および $L_{k_{p,p'}}(\mathfrak{sl}_2)$ 上の然るべき加群のなす圏たちの間に $\mathbb{C}$-線形アーベル圏としての圏同値 [Sat16, Theorem 7.7] を構成した．この圏同値の系として，**既約 $L_{k_{p,p'}}(\mathfrak{sl}_2)$-加群の指標を用いて既約 $L_{c_{p,p'}}$-加群の指標を表示する公式** [Sat16, Theorem 7.8] を得ることができる．

2.3 有限性条件とモジュラー不変性

一般に，VOSA を用いた定式化は，対応する 2 次元の “（カイラル）超共形場理論” における計算を記述する上で有効である．与えられた VOSA が C_2-**余有限** (C_2-*cofinite*) 性と呼ばれるある種の有限性条件を満たすとき，その既約加群は同型を除いて有限個となる．さらに**有理**（*rational*）性と呼ばれる完全可約性条件 $(+\alpha)$ を仮定すると，既約加群 M に対して定められる以下の 4 種類の指標

- $\mathsf{ch}^{0,0}(M)$: 正規化された指標（Neveu-Schwarz sector）
- $\mathsf{ch}^{0,1}(M)$: 正規化された超指標（Neveu-Schwarz sector）
- $\mathsf{ch}^{1,0}(M)$: 正規化された捻れ指標（Ramond sector）
- $\mathsf{ch}^{1,1}(M)$: 正規化された捻れ超指標（Ramond sector）

は上半平面上の正則関数を定め，それらのなす有限次元空間は対応する超共形場理論における楕円曲線のモジュライ空間上の 1 点共形ブロック束の平坦切断のなす空間と同一視される．この同一視を介して，モジュラー群 $\mathsf{SL}_2(\mathbb{Z})$ が指標関数のなす空間へモノドロミーとして作用する．特に与えられた VOSA が VOA である場合には，既約指標を基底とする $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathsf{SL}_2(\mathbb{Z})$ の行列表示（**モジュラー S 行列**）を用いて，任意に与えられた 3 つの既約表現の間を結ぶ絡作用素のなす線形空間の次元（**フュージョン則**）を記述する *Verlinde* **公式**の成立が Y.-Z. Huang によって示されている．

前述の $L_k(\mathfrak{sl}_2)$ および L_c の場合については，次の結果が知られている．

Theorem 2 (Adamović-Milas)**.** 以下はすべて同値：

1. $L_k(\mathfrak{sl}_2)$ は C_2-余有限性を満たす.
2. $L_k(\mathfrak{sl}_2)$ は有理性を満たす.
3. ある $p \in \mathbb{Z}_{\geq 3}$ に対して，$k = k_{p,1}(= -2 + p)$ である.

Theorem 3 (Adamović+Gorelik-Kac)**.** 以下はすべて同値：

1. L_c は C_2-余有限性を満たす.
2. L_c は有理性を満たす.
3. ある $p \in \mathbb{Z}_{\geq 3}$ に対して，$c = c_{p,1}$ である.

それぞれの場合に対応する有限個の既約加群は

- 既約 $L_k(\mathfrak{sl}_2)$-加群 = レベル $k_{p,1}$ の可積分最高ウェイト $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$-加群
- 既約 $L_{c_{p,1}}$-加群 = 中心電荷 $c_{p,1}$ の $\mathcal{N} = 2$ ユニタリ極小系列

となる．それらに対応する指標関数の族が張る有限次元空間が $\mathsf{SL}(2,\mathbb{Z})$ の作用で不変であることは，それぞれ Kac-Peterson および Ravanini-Yang によって知られていた.

2.4 非 C_2-余有限性とモジュラー不変性

C_2-余有限性および有理性はいずれもモジュラー不変性をもつ加群が存在するための必要条件ではなく，C_2-余有限性と有理性のいずれも満たさない $L_{k_{p,p'}}(\mathfrak{sl}_2)$ $(p' \geq 2)$ に対して，以下の結果が知られている.

Theorem 4 (Adamović-Milas)**.** Bernstein-Gelfand-Gelfand 圏 $\mathcal{O}$ に含まれる既約 $L_{k_{p,p'}}(\mathfrak{sl}_2)$-加群は，Kac-Wakimoto の主認容（principal admissible）最高ウェイト $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$-加群に一致する.

Theorem 5 (Kac-Wakimoto)**.** レベル $k_{p,p'}$ をもつ主認容最高ウェイト $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$-加群は有限個であり，その正規化された指標が定める（Cartan 部分代数のある部分集合上の）有理型関数の張る有限次元空間は $\mathsf{SL}(2,\mathbb{Z})$ の作用で不変である.

ただし，この場合にモジュラー S 行列から前節の Verlinde 公式と同様の手続きを施すと，負の "フュージョン則" が出現することが Koh-Sorba らによって指摘されていた．この現象は用いた関数族が考えるべき空間の基底をなしていないことを示唆しており，Creutzig-Ridout はより広いクラスの既約 $L_{k_{p,p'}}(\mathfrak{sl}_2)$-加群の族を考えることによって *Verlinde* 公式の類似の成立を予想 [CR13] している．しかし，その際に追加された *BGG* 圏 $\mathcal{O}$ に含まれない既約 $L_{k_{p,p'}}(\mathfrak{sl}_2)$-加群の指標は収束域を持たずに発散しており，それらのモジュラー変換には定式化が与えられていない.

一方，既約 $L_{k_{p,p'}}(\mathfrak{sl}_2)$-加群の場合とは異なり，任意の既約 $L_{c_{p,p'}}$-加群の指標は Cartan 部分代数 $\mathbb{C}L_0 \oplus \mathbb{C}J_0 \oplus \mathbb{C}C \cong \mathbb{C}^3$ のある領域上で絶対収束して，$\mathbb{H} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ 上の有理型関数に解析接続される.

3 論文の主結果

本論文では，[CR13] で提案された加群の対応物として，ある有限集合 $\mathscr{S}_{p,p'}$ および $K_{p,p'}$ を用いて得られる非可算集合

$$\mathscr{S}_{p,p'} \sqcup K_{p,p'} \times \mathbb{R}$$

によって添え字づけられるある特別な既約 $L_{c_{p,p'}}$-加群の族を導入した．これらの内，$\lambda \in \mathscr{S}_{p,p'}$ に対応する指標関数 $\mathbf{A}_{\lambda}^{\varepsilon,\varepsilon'} := \mathsf{ch}^{\varepsilon,\varepsilon'}(\mathcal{L}_{\lambda})$ を**非典型** (*atypical*) と呼び，$(\mu, x) \in K_{p,p'} \times \mathbb{R}$ に対応する指標関数 $\mathbf{T}_{\mu,x}^{\varepsilon,\varepsilon'} := \mathsf{ch}^{\varepsilon,\varepsilon'}(\mathcal{L}_{\mu,x})$ を**典型** (*typical*) と呼ぶ．

以下では，$\mathbb{H} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ 上の有理型関数のなす空間への $\mathsf{SL}_2(\mathbb{Z})$ の生成元 S および T の作用を

$$f\big|_S = f\big|_S(\tau, u, t) := f\left(-\frac{1}{\tau}, \frac{u}{\tau}, t - \frac{u^2}{6\tau}\right),\ f\big|_T = f\big|_T(\tau, u, t) := f(\tau + 1, u, t)$$

と略記する．このとき，本論文の主結果は次の形のモジュラー変換則である．

Theorem 6 (本論文の Theorem 3.6 および 4.12)**.**

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_{\lambda}^{\varepsilon,\varepsilon'}\big|_S &= \sum_{\lambda' \in \mathscr{S}_{p,p'}} S_{\lambda,\lambda'}^{aa,(\varepsilon,\varepsilon')} \mathbf{A}_{\lambda'}^{\varepsilon',\varepsilon} + \sum_{\mu'' \in K_{p,p'}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x''\, S_{\lambda,(\mu'',x'')}^{at,(\varepsilon,\varepsilon')} \mathbf{T}_{\mu'',x''}^{\varepsilon',\varepsilon}, \\
\mathbf{A}_{\lambda}^{\varepsilon,\varepsilon'}\big|_T &= e^{2\pi i c_{\lambda}^{\varepsilon,\varepsilon'}} \mathbf{A}_{\lambda}^{\varepsilon,\varepsilon\varepsilon' + (1-\varepsilon)(1-\varepsilon')}, \\
\mathbf{T}_{\mu,x}^{\varepsilon,\varepsilon'}\big|_S &= \sum_{\mu' \in K_{p,p'}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x'\, S_{(\mu,x),(\mu',x')}^{tt,(\varepsilon,\varepsilon')} \mathbf{T}_{\mu',x'}^{\varepsilon',\varepsilon}, \\
\mathbf{T}_{\mu,x}^{\varepsilon,\varepsilon'}\big|_T &= e^{2\pi i c_{\mu,x}^{\varepsilon,\varepsilon'}} \mathbf{T}_{\mu,x}^{\varepsilon,\varepsilon'}
\end{aligned}$$

(ただし，展開に現れる各係数の具体的な表示については本論文を参照のこと．)

また，モジュラー S 行列の一般化と考えられる展開係数 $S_{\lambda,\lambda'}^{aa,(\varepsilon,\varepsilon')}$ および $S_{(\mu,x),(\mu',x')}^{tt,(\varepsilon,\varepsilon')}$ について，適当な意味で対称かつユニタリであることを示した（本論文の Proposition 4.16 および 3.7)．

さらにこの結果の系として，上記で得られたモジュラー S 行列を用いて Creutzig-Ridout の予想に対応するフュージョン則に関する予想を定式化（本論文の Conjecture 5.1）した．これに基づいて存在が予想される射影直線上の（非有理的な）3 点共形ブロックについては，私の知る限り現在までに先行研究がなく，全く新しい共形ブロックの例を与えることが期待される．

参考文献

[CR13] T. Creutzig and D. Ridout. “Modular data and Verlinde formulae for fractional level WZW models II”. *Nucl. Phys. B*, 875(2):423–458, 2013.

[FST98] B. L. Feigin, A. M. Semikhatov, and I. Yu. Tipunin. “Equivalence between chain categories of representations of affine $sl(2)$ and $N = 2$ superconformal algebras”. *J. Math. Phys.*, 39(7):3865–3905, 1998.

[Sat16] R. Sato. “Equivalences between weight modules via $\mathcal{N} = 2$ coset constructions”. *arXiv preprint arXiv:1605.02343*, 2016.