論文の内容の要旨

論文題目 : Studies on algebraic fiber spaces in positive characteristic
: (正標数の代数的ファイバー空間に関する研究)

氏　　名 : 江尻　祥

代数的ファイバー空間とは退化を許した代数多様体の族であって，一般ファイバーだけでなく全空間および底空間も代数多様体の構造を持つものである．より正確には，射影多様体間の分離的全射 $f : X \to Y$ で連結なファイバーを持つものとして定義される．代数多様体の分類のためには，X, Y および幾何学的生成ファイバー $X_{\overline{\eta}}$ の関係について考察することが重要な役割を果たす．本論文では (反) 標準因子の性質に着目し，それらの関係を研究する．

標数 0 においては，代数的ファイバー空間に関する重要な定理が多く知られている．例えば Birkar や Yifei Chen，藤野，權業，Kollár，宮岡および森によって，X 上の反標準因子が持つ正値性はしばしば Y 上の反標準因子へと受け継がれることが示された．また標準因子に関しては，半正値性定理，弱正値性定理および飯高予想の部分解決などが，Birkar や藤野，藤田，川又，Kollár および Viehweg を含む多くの数学者の貢献により確立された．

しかしながら，上述した結果の多くは Hodge 理論からの帰結や，特異点解消の存在，弱半安定還元定理などに依存しているため，正標数の場合にそのまま適用することはできない．本論文では，この問題点を F 特異点の手法によって解決し，標数 0 における代数的ファイバー空間に関するいくつかの結果の類似を，正標数の場合に証明する．

以下では，代数的ファイバー空間とは代数閉体上定義された滑らかな射影多様体間の分離的全射で連結なファイバーを持つものとする．なお以下に紹介する各定理は，本文中ではより一般の状況で証明されている．

1. 弱正値性定理について

$f : X \to Y$ を代数的ファイバー空間とする．相対的標準層 $\omega_{X/Y} = \omega_X \otimes f^*\omega_Y^{-1}$ の冪 $\omega_{X/Y}^m$ の順像層 $f_*\omega_{X/Y}^m$ が持つ正値性は，代数幾何学において重要な役割を果たす．標数 0 においては $f_*\omega_{X/Y}^m$ の正値性について多くの結果が知られている．藤田 [5] は Y が曲線の場合に $f_*\omega_{X/Y}$ がネフなベクトル束となることを示した．川又はこれを $m \geq 2$ の場合 [8]，および $\dim Y \geq 2$ の場合 [7] に一般化し，それらの帰結として飯高予想を Y が曲線の場合，および Y が一般型でかつ $\kappa(X) \geq 0$ の場合に，それぞれ解決した．飯高予想については後述する．また Viehweg [14] は各 $m > 0$ に対して $f_*\omega_{X/Y}^m$ が弱正であることを示し，その系として Y が一般型の場合に飯高予想を解決した．ここで連接層の弱正値性

(Definition 3.1.1) とはベクトル束のネフ性を自然に弱めた概念であり，曲線上のベクトル束の場合にはネフ性と同値となる．

本論文では弱正値性定理，即ち Viehweg [14] の結果の，正標数における類似について研究する．以下では $f : X \to Y$ を標数 $p > 0$ の代数的ファイバー空間とする．Patakfalvi [11] は Y が曲線，$\omega_{X/Y}$ が f 豊富で，$X_{\overline{\eta}}$ が正規かつ F 純特異点 (Definition 1.3.1) のみを持つならば，各 $m \gg 0$ に対し $f_*\omega_{X/Y}^m$ がネフなベクトル束となることを示した．我々は Patakfalvi の結果を以下のように一般化する．

定理 1.1 (Theorem 4.1.1)**.** 上記の状況で，

(i) 幾何学的生成ファイバー $X_{\overline{\eta}}$ の標準環 $R(X_{\overline{\eta}}, \omega_{X_{\overline{\eta}}})$ が有限生成であり，かつ

(ii) ある整数 $m_0 > 0$ が存在し，各 $m \geq m_0$ に対し

$$S^0(X_{\overline{\eta}}, \omega_{X_{\overline{\eta}}}^m) = H^0(X_{\overline{\eta}}, \omega_{X_{\overline{\eta}}}^m)$$

を満たすならば，

各 $m \geq m_0$ に対し $f_*\omega_{X/Y}^m$ は弱正となる．

ここで Gorenstein 射影多様体 V に対し，$S^0(V, \omega_V^m)$ は Frobenius 射の跡写像によって定まる $H^0(V, \omega_V^m)$ の部分空間であり，それが大きいとき V は標数 0 の場合に近い性質を持つと考えられている (Definition 2.1.2)．条件 (i) と (ii) は例えば，$\omega_{X_{\overline{\eta}}}$ が豊富かつ $X_{\overline{\eta}}$ が F 純特異点のみを持つ場合 (Example 2.1.11) や，$X_{\overline{\eta}}$ が滑らかな一般型曲面でかつ $p > 5$ の場合 (Corollary 2.2.8) に満たされる．特に前者の場合において定理 1.1 は Patakfalvi [11] の結果を含んでいる．また後述するように，後者の場合において定理 1.1 は全空間が 3 次元の場合の飯高予想 (定理 2.1) に応用される．

2. 飯高予想について

小平次元は最も重要な双有理不変量の 1 つであり，代数多様体の双有理分類において鍵となる役割を果たす．n, m を自然数とし，$f : X \to Y$ を $\dim X = n$ かつ $\dim Y = m$ を満たす代数的ファイバー空間であって滑らかな幾何学的生成ファイバー $X_{\overline{\eta}}$ を持つものとする．飯高の $C_{n,m}$ 予想 (または飯高予想) とは X, Y および $X_{\overline{\eta}}$ の小平次元 κ について劣加法性

$$\kappa(X) \geq \kappa(X_{\overline{\eta}}) + \kappa(Y)$$

が成り立つという未解決予想である．第 6 章において述べるように，標数 0 の場合には飯高予想に関する多くの結果が知られている．特に川又 [9] はこの予想を極小モデル理論の問題へと完全に帰着した．

正標数における飯高予想の研究も近年進展を見せている．以下では基礎体 k を標数 $p > 0$ を持つ代数閉体とする．Chen–Zhang [3] は $n - m = 1$ の場合に $C_{n,m}$ 予想を解決した．Patakfalvi [12] は Y が一般型でかつ $S^0(X_{\overline{\eta}}, \omega_{X_{\overline{\eta}}}) \neq 0$ の場合に予想を解決した．また Birkar–Chen–Zhang [1] は $C_{n,m}$ 予想を $n = 3$, $p > 5$ かつ $k = \overline{\mathbb{F}_p}$ の場合に解決した．本論文では Birkar–Chen–Zhang による結果の一般化である次の定理を証明する．

定理 2.1 (Theorem 6.1.2)**.** $\dim X = 3, p > 5$ ならば不等式 $\kappa(X) \geq \kappa(X_{\overline{\eta}}) + \kappa(Y)$ が成り立つ．

この定理の証明は，$\kappa(X_{\overline{\eta}})$ の値により場合分けされる．$\kappa(X_{\overline{\eta}}) = 0, 1$ の場合は極小モデル理論を用いて示され，$\kappa(X_{\overline{\eta}}) = 2$ の場合は以下の定理から直ちに従う．

定理 2.2 (Theorem 6.1.3)**.** Y が曲線または一般型の多様体とする．定理 1.1 の条件 (i), (ii) が満たされるとき，不等式 $\kappa(X) \geq \kappa(X_{\overline{\eta}}) + \kappa(Y)$ が成り立つ．

3. 反標準因子の正値性について

ここでは代数的ファイバー空間より一般に，代数閉体上定義された滑らかな射影多様体間の分離的全射 $f : X \to Y$ を扱う．前述したように，X の反標準因子 $-K_X$ の正値性はしばしば $-K_Y$ の正値性を誘導する．f が滑らかな場合には，任意標数において，$-K_X$ が豊富ならば $-K_Y$ も豊富であることが，Kollár–宮岡–森 [10] により証明された．同様の手法により，$-K_X$ がネフならば $-K_Y$ もネフであることが示される．標数 0 においては，“ネフかつ巨大” という正値性について上記と同様の主張が成り立つことが，藤野–權業 [4] により示された．f が滑らかとは限らない場合でも，標数 0 においては，$-K_X$ がネフ (resp. ネフかつ巨大) ならば，$-K_Y$ は擬有効 (resp. 巨大) であることが，Chen–Zhang [2] (resp. Prokhorov–Shokurov [13]) により示されている．

本論文では幾何学的生成ファイバーが F 純または強 F 正則特異点 (Definition 1.3.1) のみを持つという仮定の下で，上述の結果 (の一般化) が正標数においても成り立つことを証明する．

定理 3.1 (Theorem 5.1.1)**.** $f : X \to Y$ を標数 $p > 0$ の代数閉体上定義された滑らかな射影多様体の間の分離的な全射とする．以下を満たす (スキーム論的) 点 $y \in Y$ の全体からなる集合を S と書く：

(i) $\dim X_y = \dim X - \dim Y$.

(ii) y 上の幾何学的ファイバー $X_{\overline{y}}$ は F 純特異点しか持たない．

D を Y 上の $\mathbb{Q}$ 因子とする．このとき，もし $-(K_X + f^*D)$ がネフならば，$-(K_Y + D)$ は S 上で弱正となる．

Y の部分集合 S に対し，S 上の弱正値性 (Definitions 3.1.1 and 3.1.5) とは，$\mathbb{Q}$ 因子のネフ性を一般化した概念で，$S = Y$ の場合はネフ性に同値となり，$S = \{\eta\}$(η は Y の生成点) の場合は擬有効性に同値となる (Remark 3.1.2)．定理 3.1 はその系として藤野–權業，Chen–Zhang および Prokhorov–Shokurov の結果を正標数へ拡張する (Theorems 5.1.3 and 5.1.5)．また定理 3.1 は定理 2.1 の証明に必要である．さらに定理 3.1 は，正標数還元を介して任意標数の場合にも応用される (cf. Theorems 5.1.6 and 5.1.7)．

4. いつ Albanese 射は代数的ファイバー空間となるか?

Albanese 射は非正な小平次元を持つ代数多様体の研究において重要な道具となる．標数 0 においては，滑らかな射影多様体の小平次元が 0 に等しいとき，その Albanese 射は代数的ファイバー空間となることが，川又 [7] により示された．Zhang [16] は同様の主張を反標準因子がネフな場合に示した．正標数では，滑らかな射影多様体の S 小平次元が 0 に等しいとき，その Albanese 射は全射であることが Hacon–Patakfalvi [6] により示された．ここで S 小平次元とは小平次元の類似概念であり，Frobenius 射の跡写像を用いて定義される．近年 Wang [15] は，3 次元正規射影多様体が半豊富な反標準因子を持つとき，Albanese 射 a の一般ファイバーが F 純特異点しか持たないならば，a は全射であることを示した．本論文では以下を示す．

定理 4.1. X を標数 $p > 0$ の代数閉体上定義された滑らかな射影多様体とする．X の Albanese 射を $a : X \to A$ と表し，$X_{\overline{\eta}}$ を a の像の上での幾何学的生成ファイバーとする．以下のいずれかが成り立つとき，a は代数的ファイバー空間となる：

I. (Theorem7.1.1) $-K_X$ がネフであり，かつ $X_{\overline{\eta}}$ が F 純特異点のみを持つ．

II. (Theorem7.1.3) X が大域的 F 分裂である．即ち Frobenius 射 $\mathcal{O}_X \to F_{X*}\mathcal{O}_X$ が $\mathcal{O}_X$ 加群の射として分裂する．

I の場合は Wang [15] の結果を任意次元に一般化し，かつ Zhang [16] の結果を正標数へ拡張している．また II の場合の系として，通常 Abel 多様体，即ち p 階数が次元に等しい Abel 多様体を，大域的 F 分裂性と等号 $b_1(X) = 2\dim X$ によって特徴づけることができる (Theorem 7.1.4)．

参考文献

[1] C. Birkar, Y. Chen and L. Zhang, *Iitaka's $C_{n,m}$ conjecture for 3-folds over finite fields*, to appear in Nagoya Math. J. (2016).

[2] M. Chen and Q. Zhang, *On a question of Demailly-Peternell-Schneider*, J. Eur. Math. Soc. **15** (2013), 1853–1858.

[3] Y. Chen and L. Zhang, *The subadditivity of the Kodaira dimension for fibrations of relative dimension one in positive characteristics*, Math. Res. Lett., **22** (2015), no. 3, 675–696.

[4] O. Fujino and Y. Gongyo, *On images of weak Fano manifolds*, Math. Z. **270** (2012), no 1, 531–544.

[5] T. Fujita, *On Kähler fiber spaces over curves*, J. Math. Soc. Japan. **30** (1978), no. 4, 779–794.

[6] C. D. Hacon and Zs. Patakfalvi, *Generic vanishing in characteristic $p > 0$ and the characterization of ordinary abelian varieties*, Am. J. Math. **138** (2016), no. 4, 963–998.

[7] Y. Kawamata, *Characterization of abelian varieties*, Compositio Math. **43** (1981), no. 2, 253–276.

[8] Y. Kawamata, *Kodaira dimension of algebraic fiber spaces over curves*, Invent. Math. **66** (1982), no. 1, 57–71.

[9] Y. Kawamata, *Minimal models and the Kodaira dimension of algebraic fiber spaces*, J. Reine Angew. Math. **363** (1985), 1–46.

[10] J. Kollár, Y. Miyaoka and S. Mori, *Rational connectedness and boundedness of Fano manifolds*, J. Differential Geom. **36** (1992), no 3, 765–779.

[11] Zs. Patakfalvi, *Semi-positivity in positive characteristics*, Ann. Sci. Ecole Norm. S. **47** (2014), no. 5, 991–1025.

[12] Zs. Patakfalvi, *On subadditivity of Kodaira dimension in positive characteristic over a general type base*, to appear in J. Algebraic Geom.

[13] Yu. G. Prokhorov and V. V. Shokurov, *Towards the second main theorem on complements*, J. Algebraic Geom. **18** (2009), 151–199.

[14] E. Viehweg, *Weak positivity and the additivity of the Kodaira dimension for certain fibre spaces*, Algebraic varieties and analytic varieties (Tokyo, 1981), 329–353, Adv. Stud. Pure Math. **1** North-Holland, Amsterdam, (1983).

[15] Y. Wang, *On the characterization of abelian varieties for log pairs in zero and positive characteristic*, arXiv:1610.05630 (2016).

[16] Q. Zhang, *On projective varieties with nef anticanonical divisors*, Math. Ann. **322** (2005), 697–703.