

論文審査の結果の要旨

氏名 江尻 祥

射影多様体の間の射 $f: X \rightarrow Y$ は、連結なファイバーを持つ分離的全射であるとき、代数的ファイバー空間であるという。標数 0 の代数的ファイバー空間の研究は古くから行われており、C. Birkar, 藤野修, 藤田隆夫, 川又雄二郎, J. Kollár, Viehweg 等によって、相対多重標準線型系の半正値性や飯高予想の部分解決などの重要な結果が得られている。しかし、これらの結果の証明にはホッジ理論が本質的な役割を果たすため、同様の結果が正標数で成り立つかどうかはわかっていない。このように正標数の双有理幾何学では、正標数特有の病的な現象が起こることがあり、しばしば標数 0 の場合の証明が適用できない。それにも関わらず、V. Cossart-O. Piltant によって任意標数の 3 次元エクセレントスキームに対して特異点解消の存在が証明され、C. Hacon-C. Xu, Birkar, Birkar-J. Waldron によって標数が 7 以上ならば 3 次元で極小モデル理論が成り立つことが示されるなど、近年正標数の双有理幾何学が急速に進展している。このような背景のもと、論文提出者江尻祥は本論文において、「標数 0 の代数的ファイバー空間に関する結果がいつ正標数でも成り立つか？」という問題に取り組んだ。

$f: X \rightarrow Y$ を正標数の非特異射影多様体の間の分離的全射とし（ファイバーの連結性は仮定しない）、 D を Y 上の \mathbb{Q} 因子とする。江尻は、 $-(K_X + f^*D)$ がネフならば $-(K_Y + D)$ は Y のある部分集合 S 上弱正であることを証明した。この系として、 f が滑らかで X がファノ (resp. 弱ファノ) 多様体ならば Y もファノ (resp. 弱ファノ) 多様体であることが従うが、これは Kollár・宮岡洋一・森重文の結果の別証明 (resp. 藤野・権業善範の結果の正標数への拡張) を与えている。また別の系として、 $-K_X$ がネフ (resp. ネフかつ巨大) ならば $-K_Y$ は擬有効 (resp. 巨大) であるという M. Chen-Q. Zhang (resp. Prokhorov-Shokurov) の結果の正標数への拡張が得られる。このようにこの江尻の結果は、多くの重要な結果を特別な場合として含む驚くべきものである。

江尻は上記の結果を利用して、正標数の飯高予想について研究した。 V, W を非特異射影多様体、 $\pi: V \rightarrow W$ を代数的ファイバー空間とし、 F を π の幾何学的生成ファイバーとする。 F が非特異であるとき（正標数ではこの仮定は常に満たされるとは限らないことに注意する）、小平次元の劣加法性 $\kappa(V) \geq \kappa(F) + \kappa(W)$ が成り立つというのが、飯高予想の主張である。飯高予想は双有理幾何学における最も重要な予想の一つと考えられているが、 $\dim F \leq 1$ の場合を除いて、正標数ではほとんど何もわかっていなかった。江尻はまず修士論文の結果を発展させて、正標数の代数的ファイバー空間の相対多重標準線型系が弱正となるための F 特異点論的十分条件を与えた。これは Viehweg の結果の正標数における類似であり、Patakfalvi の結果の一般化になっている。そして Lei Zhang との共同研究において、この弱正値性定理と上記の結果を用いることで、標数が 7 以上で V が 3 次元のとき飯高予想が正しいことを証明した。

さらに江尻は、正標数のアルバネーゼ射が代数的ファイバー空間になるための十分条件についても研究した。 Z を正標数の非特異射影多様体とし、 $a: Z \rightarrow \text{Alb}(Z)$ を Z のアルバネーゼ射とする。江尻は、 $-K_Z$ がネフであり $Z \rightarrow a(Z)$ の一般ファイバーが F 純特異点しか持たないとき、もしくは Z が大域的 F 分裂多様体であるとき、 Z のアルバネーゼ射 a は代数的ファイバー空間であることを証明した。この結果は Q. Zhang の結果の正標数版と見なせるもので、

Y. Wang の結果を任意次元に拡張したものになっている。

いずれの結果も F 特異点論の議論を相対フロベニウス射に対して適用することで得られる。 F 特異点とはフロベニウス射を用いて定義される正標数の特異点の総称であり、 F 特異点論の大域的な幾何への応用は Schwede, Patakfalvi 等の論文に端を発する。江尻は彼らの議論を発展させることで、代数的ファイバー空間の研究に有用な手法を確立した。

以上の結果は、正標数の代数的ファイバー空間の研究の発展に大きく貢献する優れた業績である。共同研究者である Lei Zhang 氏からは、共同研究における江尻の貢献が十分大きく、博士論文の一部として提出するにふさわしいものである旨の承諾が得られている。よって、論文提出者江尻祥は、博士（数理学）の学位を受けるにふさわしい十分な資格があると認める。