論文の内容の要旨

論文題目　Studies on Fano manifolds and vector bundles (Fano 多様体とベクトル束の研究)

氏名　金光 秋博

森による Hartshorne 予想の解決によって, 豊富な接束を持つ滑らかな代数多様体は射影空間に限ることが示されている [8]. 本論文では, Fano 多様体の分類問題のうち, この森の結果の一般化に相当する二つの問題について調べている. 以下, 複素数体上定義された射影的代数多様体を考える.

1　ネフな接束をもつ Fano 多様体

森の定理は, 接束の正値性が多様体を決定するほど強い条件であることを意味している. 同様に接束が半正値性をもつ場合にも, 多様体の分類が可能であることが示唆されるが, そのような一般化のひとつとして Campana と Peternell による次の予想がある [1]:

予想 1.1 (Campana-Peternell 予想)**.** 接束がネフな Fano 多様体 X は有理等質多様体である.

低次元の場合の予想 1.1 は, 5 次元以下のときに正しいことが知られている [1, 3, 5–7, 17]. 本論文の第一部は, 5 次元までの結果を Picard 数が 1 より大きい場合に一般化すること, 及びその過程で得られた多様体のクラスに関する考察からなる.

1.1　$\rho_X > \dim X - 5$ の場合の予想 1.1

本論文の Chapter 2 では, 5 次元までの結果を使い, その一般化として次を示している:

定理 1.2. $\rho_X > \dim X - 5$ の場合に予想 1.1 は正しい.

$\rho_X > \dim X - 4$ の場合は, 渡辺によっても示されている [18]. 本論文の証明と渡辺の証明はともに端射線収縮をもとに X を調べることで行われており, 双方に共通する新しい点は, ρ_X が十分に大きい場合に, [10, 12] で得られている完全旗多様体の特徴づけ及びその性質を応用している点にある. 一方で, 本論文では, その方法を用いて, より一般的な主張である $2\rho_X + 1 \geq n$ を満たす場合の分解定理を与えている点で, 渡辺の証明とは異なっている.

1.2　有理等質多様体の特徴づけについて

本論文の Chapter 3 では, 予想 1.1 への Picard 数に関する帰納的なアプローチに基づき, 次の条件を満たす Fano 多様体について考察がなされる.

条件 $(*)$. 勝手な端射線収縮の列 $X \xrightarrow{f_1} X_1 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_{m-1}} X_{m-1} \xrightarrow{f_m} X_m$ に対して, 各 f_i は滑らかであり, すべてのファイバーは有理等質多様体である.

このような条件を考える理由の一つに技術的な理由がある. 条件 $(*)$ を満たす Fano 多様体の分類は, 予想 1.1 を Picard 数が 1 の場合に帰着するのである. また, 単に, 有理等質多様体の端射線理論における特徴付けを考えるという動機もある. 有理等質多様体は条件 $(*)$ を満たしており, 逆に, この性質が等質性を導くのではないかという期待から条件 $(*)$ を満たす Fano 多様体を調べるのである. 実際に定理 1.2 の証明では $\rho_X > \dim X - 5$ なる仮定と条件 $(*)$ しか使っておらず, その証明から次を得る:

定理 1.3. X を条件 $(*)$ を満たす Fano 多様体とする. $\rho_X > \dim X - 5$ のとき, X は有理等質多様体である.

以上から, 条件 $(*)$ が等質性を導くかという問題や, 予想 1.1 との関連が考えられる:

問題 1.4. 条件 $(*)$ を満たす Fano 多様体 X は (1) 有理等質多様体か? (2) その接束はネフか?

問題 1.4 (2) は, 接束のネフ性と端射的有理曲線の関係についての Campana と Peternell の問題 [2, Problem 6.4] に由来する.

本論文の Chapter 3 では, 問題 1.4 を $\rho_X > \dim X - 6$ の範囲で調べることを主眼としており, まず問題 1.4 が一般には正しくないことを明らかにしている. 実際, 次のような Fano 多様体 X_0 が Ottaviani によって構成されている [13]: X_0 は Picard 数が 2 の 7 次元 Fano 多様体であり, $\mathbb{Q}^5$ 上の $\mathbb{P}^2$ 束の構造を二つ持つ. とくに X_0 は条件 $(*)$ を満たす. X_0 が有理等質多様体ではないことは, 有理等質多様体の分類から従う. 特に問題 1.4 (1) は一般には正しくない. 本論文 Chapter 3 では, より強く, その接束がネフでないこと, 従って問題 1.4 (2) も一般には正しくないことを示している. さらに Chapter 3 の主定理では, $\rho_X > \dim X - 6$ の範囲で等質でない例は, 本質的には上述の X_0 のみであることを示している:

定理 1.5. X を条件 $(*)$ をみたす Fano 多様体とする. $\rho_X > \dim X - 6$ とする. すると X は有理等質多様体であるか, $X \simeq \left(\mathbb{P}^1\right)^{n-7} \times X_0$ が成り立つ.

系として, $\rho_X > \dim X - 6$ の場合の予想 1.1 は, 6 次元 Picard 数が 1 の場合に帰着される.

2 Fano 多様体と豊富ベクトル束

本論文の第 2 部では, 向井 [9] によって導入された次の条件を満たす対 $(X, \mathscr{E})$ の分類問題を, 階数の大きい場合に取り扱っている:

- X は滑らかな Fano 多様体, $\mathscr{E}$ は豊富なベクトル束であって, $c_1(X) = c_1(\mathscr{E})$ を満たす.

条件を満たす対を向井対と呼ぶことにする. 対 $(\mathbb{P}^n, T_{\mathbb{P}^n})$ は向井対の一つであり, したがって, 向井

対の分類問題は, Hartshorne 予想の一般化とみなせる. そのほかにも, 向井対の分類は, 射影束の構造を持つ Fano 多様体の分類問題, 及び一般偏極多様体の理論とも関連している点で重要である.

$\operatorname{rank}\mathscr{E} = r$ なる向井対 $(X, \mathscr{E})$ は, 指数 r の Fano 多様体の一般化とみなせる. 実際, 指数 r の Fano 多様体 X が与えられたとき, 対 $(X, \mathcal{O}(-K_X/r)^{\oplus r})$ は条件を満たしている. 指数が $\dim X - 2$ 以上の Fano 多様体 X の分類は, 小林, 落合, 藤田, 向井によって与えられていた. 向井は同様に $\operatorname{rank}\mathscr{E}$ の大きい対 $(X, \mathscr{E})$ の分類問題を提示し, より具体的には $\operatorname{rank}\mathscr{E} \geq \dim X$ なる場合の分類表を予想していた [9]. この向井の予想は藤田, Peternell, Ye-Zhang らによって独立に正しいことが確認されている [4, 14, 15, 20]. また Peternell-Szurek-Wiśniewski は $\operatorname{rank}\mathscr{E} = \dim X - 1$ なる場合の分類を与えている [16], [19, $\dim X = 3$ の場合].

本論文の第二部では, 次いで階数の大きい場合である $\operatorname{rank}\mathscr{E} = \dim X - 2$ なる場合を取り扱う. $\dim X = 3$ かつ $\operatorname{rank}\mathscr{E} = 1$ の場合は $\mathscr{E} = \mathcal{O}(-K_X)$ であり, したがって, 対の分類は 3 次元 Fano 多様体の分類と同値である. これは, Fano, Iskovskih, Shokurov, 藤田, 森, 向井によって為されていた. Novelli-Occhetta は $\dim X = 4$ かつ $\operatorname{rank}\mathscr{E} = 2$ なる対を分類している [11]. 本論文の Chapter 4 では, $\operatorname{rank}\mathscr{E} = \dim X - 2$ かつ $\dim X \geq 5$ なる場合の分類を与えている:

定理 2.1. 向井対 $(X, \mathscr{E})$ が $\operatorname{rank}\mathscr{E} = \dim X - 2$ かつ $\dim X \geq 5$ を満たすとする. このとき,

(1) X は $\mathbb{P}^n$, $\mathbb{Q}^n$, del Pezzo 多様体, 向井多様体, $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^3$ のいずれかに同型であり,
(2) $\mathscr{E}$ が直線束の直和に分裂しない対 $(X, \mathscr{E})$ の同型類はちょうど 8 つある.

8 つある非分裂型の対の詳細については, 本論文に譲るが, 各対は有理等質多様体やその上の普遍ベクトル束を用いて記述できる点において, 向井多様体の分類, その記述と似ている.

参考文献

[1] Frédéric Campana and Thomas Peternell, *Projective manifolds whose tangent bundles are numerically effective*, Math. Ann. **289** (1991), no. 1, 169–187.

[2] ———, *On the second exterior power of tangent bundles of threefolds*, Compositio Math. **83** (1992), no. 3, 329–346.

[3] ———, *4-folds with numerically effective tangent bundles and second Betti numbers greater than one*, Manuscripta Math. **79** (1993), no. 3-4, 225–238.

[4] Takao Fujita, *On adjoint bundles of ample vector bundles*, Complex algebraic varieties (Bayreuth, 1990), Lecture Notes in Math., vol. 1507, Springer, Berlin, 1992, pp. 105–112.

[5] Jun-Muk Hwang, *Rigidity of rational homogeneous spaces*, International Congress of Mathematicians. Vol. II, Eur. Math. Soc., Zürich, 2006, pp. 613–626.

[6] Akihiro Kanemitsu, *Fano 5-folds with nef tangent bundles*, arXiv:1503.04579v1, to appear in Math. Research Letters.

[7] Ngaiming Mok, *On Fano manifolds with nef tangent bundles admitting 1-dimensional

varieties of minimal rational tangents, Trans. Amer. Math. Soc. **354** (2002), no. 7, 2639–2658 (electronic).

[8] Shigefumi Mori, *Projective manifolds with ample tangent bundles*, Ann. of Math. (2) **110** (1979), no. 3, 593–606.

[9] Shigeru Mukai, *Problems on characterization of the complex projective space*, Birational Geometry of Algebraic Varieties, Open Problems, Katata, the 23rd Int'l Symp., Taniguchi Foundation, 1988, pp. 57–60.

[10] Roberto Muñoz, Gianluca Occhetta, Luis E. Solá Conde, and Kiwamu Watanabe, *Rational curves, Dynkin diagrams and Fano manifolds with nef tangent bundle*, Math. Ann. **361** (2015), no. 3-4, 583–609.

[11] Carla Novelli and Gianluca Occhetta, *Ruled Fano fivefolds of index two*, Indiana Univ. Math. J. **56** (2007), no. 1, 207–241.

[12] Gianluca Occhetta, Luis E. Solá Conde, Kiwamu Watanabe, and Jarosław A. Wiśniewski, *Fano manifolds whose elementary contractions are smooth $\mathbb{P}^1$-fibrations: a geometric characterization of flag varieties*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5) **17** (2017), no. 2, 573–607.

[13] Giorgio Ottaviani, *On Cayley bundles on the five-dimensional quadric*, Boll. Un. Mat. Ital. A (7) **4** (1990), no. 1, 87–100.

[14] Thomas Peternell, *A characterization of $\mathbf{P}_n$ by vector bundles*, Math. Z. **205** (1990), no. 3, 487–490.

[15] ———, *Ample vector bundles on Fano manifolds*, Internat. J. Math. **2** (1991), no. 3, 311–322.

[16] Thomas Peternell, Michał Szurek, and Jarosław A. Wiśniewski, *Fano manifolds and vector bundles*, Math. Ann. **294** (1992), no. 1, 151–165.

[17] Kiwamu Watanabe, *Fano 5-folds with nef tangent bundles and Picard numbers greater than one*, Math. Z. **276** (2014), no. 1-2, 39–49.

[18] ———, *Fano manifolds with nef tangent bundle and large Picard number*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **91** (2015), no. 6, 89–94.

[19] Jarosław A. Wiśniewski, *Ruled Fano* 4*-folds of index* 2, Proc. Amer. Math. Soc. **105** (1989), no. 1, 55–61.

[20] Yun-Gang Ye and Qi Zhang, *On ample vector bundles whose adjunction bundles are not numerically effective*, Duke Math. J. **60** (1990), no. 3, 671–687.