論文の内容の要旨

論文題目　On effects of curvatures of curves, surfaces and graphs
(曲線、曲面およびグラフの曲率の効果について)

氏　　名　三浦　達哉

本論文では、ユークリッド空間内の曲線、曲面、およびグラフに関する幾つかの問題について考察する。本論文は全 5 章の独立した章から成る。全章に渡る共通点として、曲線や曲面の曲率が陰に陽に重要な役割を果たすという点が挙げられる。また本論文では一貫して、与えられたモデルに対し解の性質（形状・特異点）を調べることを目的としている。

第 1 章

本章では極めて古典的な弾性曲線の境界値問題について考察する。具体的には、平面内の滑らかな正則曲線 $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ に対して定義される全二乗曲率（曲げエネルギー）$\mathcal{B}$ の最小化問題を考える。ここで

$$\mathcal{B}[\gamma] = \int_\gamma \kappa^2 ds$$

であり、κ は曲率、s は弧長パラメタを表す。ただし束縛条件として、曲線の長さ、両端点の位置、およびそこでの接ベクトルの角度を固定する。

上記の問題は、固い針金など細い弾性棒の両端点を持った際に現れる形状を求める問題として定式化されたものである。この問題の歴史は古く、少なくとも Euler の 1744 年の文献にまで遡る。しかしながら、エネルギーの高階性・非凸性や束縛条件の多さ等により、今日においても解の性質・形状に関する明確な理解は得られていない。特に、与えられた束縛条件に対し、大域最小解は一意か、自己交叉を持つか、変曲点を幾つ持つか、などの問いに直接解答できる結果は（閉曲線などの場合を除き）ほとんど知られていない。

本章ではこの問題に対し、束縛条件に関する仮定のみから大域最小解の性質を得ることを目的とする。ただし、束縛条件に応じて性質は様々に変化するため、完全に一般の条件に対し統一的な結論を得ることは難しい。本研究では特に線状化 (straightening) の問題に絞って考察する。ここで線状化とは、曲線の長さ L および端点の角度条件を保ったまま、端点の距離 l を離していく極限 $l \uparrow L$ のことである。しかしこの状況に限ったとしても、元の問題を直接解析することは困難である。この困難を迂回するため、まず次の修正全二乗曲率 $\mathcal{E}_\varepsilon$ の最小化問題を考察する：

$$\mathcal{E}_\varepsilon[\gamma] = \varepsilon^2 \int_\gamma \kappa^2 ds + \int_\gamma ds.$$

ここで曲線 γ には同様の境界条件を課すが、長さは固定しないものとする。

最初の主結果として、任意の境界条件に対し、$\mathcal{E}_\varepsilon$ の最小解の列 $\{\gamma_\varepsilon\}_\varepsilon$ の $\varepsilon \to 0$ における収束の様子を求めた。大まかに言えば、端点付近では borderline elastica と呼ばれる特殊解の一部に C^∞_{loc} の意味でリスケール収束し、それ以外の部分では殆どまっすぐになっていることを示した。この結果を応用し、ε が小さい場合において最小解に自己交叉がないことを示し、また角度条件に応じて変曲点の個数を決定した。更に、Born の安定性解析で用いられた変数変換を応用することで、変曲点がない場合には大域最小解の一意性が得られた。

更に、線状化極限 $l \uparrow L$ における $\mathcal{B}$ の最小解の列は、適当な意味で、極限 $\varepsilon \to 0$ における $\mathcal{E}_\varepsilon$ の最小解の列として読み替えられることを示した。これと先述の結果を組み合わせることで、$\mathcal{B}$ の線状化問題に対しても類似の結論が得られる。ただし一般の角度条件に対しては、技術的な理由から部分列 $l_n \uparrow L$ においてのみ読み替えの結果が得られている。しかしながら、$\mathcal{E}_\varepsilon$ の最小解の一意性が保証される場合（特に変曲点がない場合）には完全な収束の結果が得られた。またこの場合、$\mathcal{B}$ の問題においても同様に一意性が成り立つこともわかった。

証明においては $\mathcal{E}_\varepsilon$ の最小解の収束を示す部分が特に重要である。この証明において、本論文では弾性曲線モデルと相転移モデルとの類似を新たに発見し、それを用いてまず $\mathcal{E}_\varepsilon$ の $\varepsilon \to 0$ における漸近展開の一次項を求める。この漸近展開を用いることで弱い意味での収束が得られ、その後方程式の情報を用いて収束の正則性を高めることで主結果が示される。

第 2 章

本章では、周期関数のグラフの上部に拘束された弾性曲線に対する自由境界問題について考察する。開集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ をある 1-周期的連続関数 $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ の上部領域 $\Omega = \{y > \psi(x)\}$ とする。この閉包 $\overline{\Omega}$ に拘束された H^2 ソボレフ正則曲線 $\gamma : [0,1] \to \overline{\Omega}$ に対して定義される全エネルギー

$$E[\gamma] := \varepsilon^2 \int_\gamma \kappa^2 ds + \int_\gamma \Theta(\gamma) ds \tag{1}$$

の最小化問題を考える。ただし γ は適当な周期境界条件を満たすものとする。ここで第二項は付着の効果を表す接触ポテンシャルであり、関数 $\Theta : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ は、領域 Ω 上で定数 1、境界 $\partial\Omega$ 上で定数 $\alpha \in (0,1)$ を取るものとする。上記の問題は、物理的には平らでない基板に付着する膜や細糸の形状を求める問題に対応しており、特に材料科学の分野では古くから用いられている。曲線 γ の自由部（非付着部）においてエネルギー E は修正全二乗曲率 $\mathcal{E}_\varepsilon$ となることから、特に弾性曲線の自由境界問題となっていることに注意する。

本問題の解の大域形状に関する数学的結果はほとんど存在しない。そこで本章では特に、大域最小解のグラフ表示可能性に主眼を置いて考察する。エネルギー E は高階かつある種の等方性を持つため、基板が関数のグラフであるとしても解曲線がグラフとなるか否かは非自明である。主結果として、ある範囲のパラメタ ε, α, ψ では任意の最小解のグラフ表示可能性が保証され、一方であるパラメタでは任意の最小解が突出する（グラフとならない）ことを示した。前者の条件は特に、$\varepsilon \to \infty$、$\alpha \to 1$、および $r := \|\psi''\|_\infty^{-1} \to \infty$ の場合を含んでいる。また後者においては特に

$r \ll \varepsilon \ll 1$ であることが要求されている。

証明には方程式の情報を用いず、エネルギー評価のみを用いている。特に重要な部分は突出解の存在の証明である。この証明では fakir carpet と呼ばれる特別な形状の基板（を軟化したもの）を扱う。この基板の形状を用いてグラフ曲線の取り得る状態を分類し、各場合に対してエネルギーを下から評価する。それらを下回る突出曲線を適切に構成することで証明は完了する。

第 3 章

本章では、第 2 章と同様の自由境界問題について考察する。ただし本章では、付着係数 α は定数とは限らず、$\alpha : \partial\Omega \to (0,1)$ なる一様連続関数で周期性 $\alpha(x+1,y)=\alpha(x,y)$ を満たすものであればよいとする。本章の主結果として、任意の α および C^2 級の ψ を固定した時、ある $\bar{\varepsilon}>0$ が存在して、任意の $\varepsilon \in (0,\bar{\varepsilon})$ に対し最小解がグラフ表示されることを示す。荒く言えば、これは前章で扱われなかった $\varepsilon \ll r$ の場合に対応している。

証明では、第 1 章のように特異極限論法を用いる。上記 (1) のエネルギー E を E_ε と書く。まず E_0 に対する最小解の性質を調べ、特に任意の最小解はあるリプシッツ連続関数のグラフとなることを示す。次に、E_ε の最小解の列 $\{\gamma_\varepsilon\}_\varepsilon$ が適当な意味で E_0 の最小解 γ に（部分列）収束することを示す。このためにまず、$\varepsilon \to 0$ における E_ε の一次漸近展開を Γ-収束の意味で求め、その系として E_ε の最小値の一次漸近展開を求める。それを用いることで、特に γ_ε の「付着の仕方」が E_0 の最小解に部分列収束していることが示される。自由部の形状は第 1 章の結果により制御されていることから、結論のグラフ表示を得る。

第 4 章

本章からはこれまでと全く別の高次元問題を扱う。本章では $n \geq 2$ において $\mathbb{R}^n$ 内の超曲面から定まる最小跡 (cut locus) について考察する。一般に空でない境界をもつ開集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ に対し、境界 $\partial\Omega$ からの距離関数 $d : \Omega \to (0,\infty)$ を考える。関数 d が C^1 級となる最大の開集合を $U \subset \Omega$ とする。集合 Ω の最小跡とは、U の補集合 $\overline{\Sigma} := \Omega \setminus U$ のことである。関数 d は特に Ω 上のアイコナール方程式 $|\nabla u| = 1$ のゼロ境界値問題の（粘性）解であり、その一階微分可能性を考察することは非常に自然である。また最小跡 $\overline{\Sigma}$ は他の様々な偏微分方程式の解の性質に関する特徴的な集合として現れることも知られている。

本章では最小跡 $\overline{\Sigma}$ を曲面 $\partial\Omega$ の情報で特徴付けることを目的とする。古典的な結果として、境界 $\partial\Omega$ が C^2 級の場合には、距離射影および境界の内向き曲率半径を用いた $\overline{\Sigma}$ の特徴付けが知られている。本論文の主結果は、この結果を C^1 級境界にまで拡張するものである。そのためにまず、局所内接球を用いて、内向き曲率半径の定義を一般の開集合の境界にまで拡張する。更に、曲率の不連続性による情報の欠落を回復させるために、曲率半径の下半連続包を導入する。これにより、C^1 級境界に対しても古典的な場合と同様の特徴付けが得られることがわかった。証明は古典的な場合とは全く異なり、写像度の理論など位相幾何学的な手法を組み合わせて行う。

第 5 章

本章では平均曲率流の平滑化効果に関して考察する。平均曲率流方程式は曲面の運動を記述する方程式であり、ある意味で熱方程式の曲面版と解釈できるものである。本論文では $\mathbb{R}^{n+1}$ 内の n 次元曲面に対する平均曲率流の時間局所平滑化効果について考察する。

時間局所平滑化効果とは、たとえ初期時刻 $t=0$ での曲面が滑らかでなくとも、適当な解の意味で平均曲率流を考えれば、ある時間区間 $(0,T)$ では滑らかになるということである。よく知られた結果として、任意の n 次元一様リプシッツ曲面は（多様体上の関数の意味で）平滑化されることが示されている。また近年、任意の有限長ジョルダン曲線は（等高面解の意味で）平滑化されることが示された。本章では主結果として、特に後者の結果が高次元では成り立たないことを示す。より詳しくは、$n \geq 2$ において、一点を除き滑らかかつ面積有限な位相的球面の初期曲面が存在して、任意の小さい時間区間 $(0,T)$ 内で等高面解が特異点を生成することを示した。証明では、自己相似的なくびれを持つ初期曲面を構成し、比較原理により無限に早くくびれが千切れることを示す。この初期曲面は軸対称性・平均凸性など様々な良い性質を満たすため、多くの既存の結果の最適性を保証することにもなる。