論文審査の結果の要旨

氏　名　三浦　達哉

本博士論文は、曲率が重要な役割を果たすいくつかの重要な変分解析上の問題に対して、数学解析の理論を大きく進展させる内容である。具体的には、第 1 章で弾性曲線の境界値問題を扱い、第 2 章、第 3 章ではその自由境界問題を扱っている。さらに第 4 章では、一般次元空間の超曲面からの距離関数の特異点集合（最小跡という）の特徴づけを、超曲面が滑らかでない場合に拡張している。第 5 章では、平均曲率流方程式の平滑化について扱っている。

第 1 章では、平面内の滑らかな正則曲線で曲線の長さと両端を固定し、そこでの接ベクトルを与えたうえで、曲げエネルギーと呼ばれる全 2 乗曲率を最小にする問題を考える。このような曲線はオイラーの言う弾性曲線で、古くから研究されているが、両端固定の問題の研究はほとんどないのが現状であった。本論文では、束縛条件に関する仮定のみから、大域最小解の性質を得ることを目的としている。与えられた曲線の長さが両端点間の距離に十分近い場合に絞っての考察であるが、それでも大変興味深い結果が得られている。その結果は、最小化解は曲線の長さが両端点間の距離に近づけば近づくほど、当然であるが線状になってくるが、端点付近は漸近的にいわゆるボーダラインエラスティカという形状に拡大すると収束するというものである。この状況の下での最小解は自己交差しないことや、変曲点の個数も決定している。さらに、ガウス座標を用いることにより、変曲点のない場合に解の一意性を示している。

画期的と思われることは、相転移問題のファンデルワールスのエネルギーの研究とのアナロジーを見つけたことである。確かに同じ構造はあるが、境界付近に境界層のようなものが集中するという意味で、本テーマは既存の相転移問題では現れない特徴を見出している。本論文の結果は曲線の長さが両端点の距離に十分近いといった特別な場合ではあるが、弾性エネルギーの最小解の形状を初めて一般的な設定で明らかにした、重要な貢献である。

第 2 章、第 3 章では、例えば基盤の上にグラフェンのような膜を張ったとき、その形状がどのようなものになるかを、1 次元の場合に限定しているが、数学解析の立場で厳密に

考察したものである。第 2 章では曲げエネルギーのほかに基盤に付着する場合の付着エネルギーを加えた全エネルギーを最小にする問題を考える。基盤が周期関数のグラフの場合、どのような条件の下で最小解がグラフになるかどうか、その十分条件を導出している。

第 3 章では、曲げエネルギーと付着エネルギーのうち曲げエネルギー定数が小さくなった場合、最小解の極限はどのような形状になるか、あるいはどのようなエネルギーの最小解と認識できるかという問題を扱っている。本論文では、曲げエネルギー定数ゼロでの全エネルギーの二次漸近展開をガンマ収束の言葉を用いて示し、また最小解がグラフ表示できるかという問題に対応した。

この弾性曲線に対するさまざまな変分解析的考察は非常に先駆的で、今後多くの研究の指針を与えるものとして高く評価されるであろう。

第 4 章は距離関数に対する考察である。一般次元ユークリッド空間の空でない境界を持つ開集合 Ω に対し、その境界 S からの距離関数 d を考える。d が連続微分可能な点全体からなる Ω 内の開集合を U とする。集合 Ω の最小跡（カットローカス）とは U の補集合のことをいうが、この最小跡を S の情報で特徴づけることを目指している。S が連続 2 階微分可能な場合は、距離射影および境界の内向き曲率半径を用いた最小跡の特徴づけが知られているが、本論文ではこれを S が単に連続微分可能、特に曲率が必ずしも定義できない状況に拡張した。そのため局所内接球を用いて、内向き曲率半径の定義を一般の開集合の境界にまで拡張する。また曲率の不連続性による情報の欠落を回復させるために、曲率下半連続包を考える。これにより、単に連続微分可能の S に対しても、古典的な場合と同様の特徴づけが得られた。これは最小跡の特徴づけの理論を大きく進展させるものである。

第 5 章は、材料科学で基本的な平均曲率流方程式に関する結果である。平均曲率流方程式は放物型方程式であるので、初期曲面が滑らかでなくても、すぐに滑らかになると想像される。本論文では、軸対称な連結閉曲面で、平均凸で 1 点のみ除いて滑らかであるもので、どんな短い時間区内 $(0, t_0)$ でも、その図形を初期値とした等高面解は滑らかにはなり得ないものがあることを示すことにより、この予想が成立しないことを示した。

このように、本博士論文はどれも最先端の数学を進展させるものであり、論文提出者 三浦達哉は、博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める。