

審査の結果の要旨

氏名 佐藤 直木

マクロ系とは、それを構成するミクロな要素たちがもつ運動の自由度が縮減 (reduction) されることで階層化した多様体だと考えることができる。ハミルトン構造を保つ縮減については Marsden 以来多くの研究があり、最近では Yoshida たちによって位相空間の葉層構造を階層構造に関係付ける研究が進められている。しかし、一般的なマクロ系はハミルトン構造が壊れる縮減を受けており、位相空間の構造は極めて複雑である。本研究は、一般的なエネルギー保存系を4つのクラスに分類し、それぞれのクラスで不変測度を同定することで、統計力学の基礎付けを行ったものである。『Generalized Conservative Dynamics in Topologically Constrained Phase Space: Macro-Hierarchy, Entropy Production, and Self-Organization (トポロジー束縛を受けた位相空間における拡張保存型力学：マクロ階層、エントロピー生成と自己組織化)』と題する本論文は10の章及び序論と結論で構成され、各章は以下の内容を記述している。

序論では、当該分野のキーワードの説明と、本研究の目的とその位置づけが説明されている。

第1～3章は先行研究のレビューにあてられている。第1章では、エネルギー保存則をみたす運動方程式を生成する準ポアソン作用素を紹介している。第2章では、正準ハミルトン力学系の統計理論を紹介している。とくに、エントロピー測度とリュービルの定理の関係、エントロピー測度の座標変換依存性を指摘している。第3章では、確率変数の座標変換則 (伊藤の補題) を紹介したのち、確率微分方程式に対するフォッカープランク方程式を解説している。

第4章では、準ポアソン作用素の微分幾何学的分類を行っている。準ポアソン作用素のカレントに注目し、カレントがヘリシティーをもたない可積分なクラス (ポアソン代数) から、コンフォーマルなクラス、ベルトラミ条件を満たすクラス (ベルトラミ型)、そして一般のエネルギー保存クラスを定義している。測度保存型になるためにはベルトラミ条件を満たす必要があることを証明している。また、すべての準ポアソン作用素が測度保存型作用素に拡張できることを証明している。

第5章では、準ポアソン作用素のカーネル (核) によるトポロジー束縛の可積分性について研究している。カレントのヘリシティーがフロベニウスの可積分条件と関係することに注目し、前章で分類したクラスのトポロジー束縛の性質を分析している。

第6章からは、トポロジー束縛を受けたマクロ系の統計理論を議論している。まず、確率微分方程式とそのフォッカープランク方程式を導出し、測度保存型作用素の統計理論を構築している。不変測度に関するエントロピー最大の原理、平衡分布を議論している。次に、ベルトラミ型の統計理論を検討している。拡散過程がエントロピー最大の原

理を満たすことを証明し、平衡分布を求めている。最後に、3次元空間における拡散の統計理論を具体的に解析している。

第7章では、トポロジー束縛による自己組織化の例として、天体磁気圏などダイポール磁場における内向き拡散を議論している。磁気モーメントを断熱不変量とする縮減によって生じる葉層上のフォッカープランク方程式を導出し、その数値シミュレーションによって内向き拡散、密度勾配の生成、温度非等方性、エントロピーの最大化を実証している。

第8章では、3次元の準ハミルトン力学系のポアソン化を議論している。前章で議論したダイポール磁場の場合と異なり、一般的な磁場の中で起こる粒子輸送 ($\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ドリフト) は、ベルトラミ型、あるいは一般的な非ベルトラミ型となる。空間を4次元に拡張し、時間の座標変換を利用することで正準ハミルトン力学系を導き、拡張された空間における統計理論を構築している。

第9章は、3次元空間における拡散の数値シミュレーションの結果を記述している。4つのクラスについて熱平衡をもとめ、理論的な予測と一致することを示している。とくに、一般的な準ポアソン作用素がカレントをもつことによって生じる自己組織化は興味深い結果である。

第10章では、縮退した楕円型微分作用素の数理を論じている。この作用素は、非可積分なトポロジー束縛が葉層構造を作らない中で、カレントの非一様性がどのように構造を作るかを解析するために必要となる。作用素の定義域として定義されるヒルベルト空間の位相構造を解析している。

最後に、結論で本研究の成果をまとめている。

以上のように、本論文は、トポロジー束縛の幾何学的分類によって、構造形成する閉じたマクロ系の統計力学を基礎付けるものであり、プラズマ乱流の構造形成をはじめとして幅広い応用が期待される。したがって、先端エネルギー工学、とくにプラズマの非線形科学に貢献するところが大きい。

なお、本論文の第4章から10章の成果は吉田善章氏との共同研究、第7章は川面洋平氏と笠岡紀和氏との共同研究によるものであるが、論文提出者の寄与が十分であると判断する。

したがって、博士(科学)の学位を授与できると認める。

以上2000字