

博士論文

津波遡上計算における  
多層型非線形分散波モデルの適用性の検証

(Applicability of Multi-Layered Nonlinear Dispersive Long Waves  
Model for Tsunami Run-up Simulation)

深沢壮騎



## 要旨

本研究は津波解析の精度と実用性の向上を目指すべく、フィールドスケールの計算から既存モデルの特性を取りまとめ、そこから浮かび上がった問題点を解決するべく新たなモデルの構築と開発、適用性の検証を行ったものである。

2011年3月11日の東日本大震災を契機とし、各地で堤防を越流する大規模な津波に対しての防災・減災計画の検討が進められている。特に氾濫域における水理特性の把握は対策案の策定に重要な役割を果たすため、非定常流れの越流や氾濫に対する高精度で実用的な数値モデルが求められている。広域の津波と氾濫に対しては、鉛直積分型の非線形長波理論に基づいたモデルが主流である。しかし、このモデルは津波のマクロな浸水域は比較的精度良く計算できるものの、沿岸部における分裂を伴う比較的周期の短い波動成分の生成・伝播特性や、海岸堤防などの構造物の越流量などの再現性には課題が残されている。また、波の分散性による影響を考慮した非線形分散波理論に基づいたモデルでは、上記の分裂波の生成・伝播特性や、鉛直方向加速度の影響による圧力場の変化などの算定において再現性の向上が期待されるが、急勾配地形への適用は難しく、特に人工物の周囲のような複雑な流れ場の計算が難しい。三次元流体モデルは、エネルギーの保存性や計算負荷に課題が残っている。

本研究ではまず、東日本大震災において福島県の木戸川流域で撮影された映像を元に、実地スケールでの津波の河川遡上の特徴を整理するとともに、様々な計算条件や計算方法に基づく数値モデルを適用する数値実験を実施し、その再現性の比較を行った。その結果、非線形長波理論に基づいたモデルでは全体的に津波の河川遡上速度を過小評価する傾向が見られたが、摩擦係数や河川流量、入射波の形状や入射角、基礎式の離散化手法などを変更することによって、遡上速度に有意な影響を与えることが示された。特に、入射波形の違いと離散化手法は遡上速度に大きな影響を及ぼした。しかしながら、これらの検討では、画像から推定した遡上速度を十分には再現できなかった。以上より、鉛直加速度に起因する分散性や、河川流との重合に伴う水平方向流速の鉛直分布などの、非線形長波理論では再現できない現象が原因であると推察した。

そこで、静水圧近似がなされず有限振幅性と非線形性を考慮した分散性を含む後藤(1984)の非線形分散波方程式と同様の仮定で、各深度の流量を変数として考慮した多層モデルを導出した。同様に鉛直加速度を考慮した多層モデルとして金山(1997)の平面波浪場のものが挙げられるが、本モデルは遡上計算を前提としたために式展開の過程で非回転の式そのものを用いていない点や、流速ではなく流量を変数として展開している点、スケーリング操作により各層毎の移流項を式内に残している点で異なる。既往研究では簡便に与えられることの多い

層間の剪断応力についても、方程式の導出を行った。そして導出した多層型非線形分散波モデルを解析するシミュレータの開発を行った。

開発したシミュレータを用いた既往の実験の再現計算について、従来の非線形長波モデル、ブシネスクモデル、3次元モデルによる解析結果を用いて比較検討を行った。方程式の近似精度としては、非線形長波モデル、ブシネスクモデル、多層モデル、3次元モデルの順に高くなり、計算時間はこの順に増加する。

まず、ブシネスクモデル以上の近似精度を持つモデルを用いて得られる段波到達時刻は沿岸域、遡上域共に実験とよく一致する一方で、非線形長波モデルは底面勾配のある場合に実験よりも遅れる傾向が見られた。また、ブシネスクモデル以上の近似精度であれば、伝播に伴う波の分裂を再現できた。これらは、鉛直加速度に起因する分散項の効果である。

多層モデルを用いた場合にブシネスクモデルよりも再現性が上がったものとして、まず圧力の評価が挙げられる。堤防を越流する流れがある場合、天端や裏法尻にて圧力が静水圧分布から大きく外れる。既存モデルではその傾向をつかめているのみであったが、多層モデルで層数を増やすにつれて、実験結果に近づいた。次に、分散第1波高について、3層モデルによる計算結果と実験値とのずれは、ブシネスクモデルによる計算結果と実験値のずれと比べて、半分程度になった。また、水平流速の鉛直分布についても、層数を増やすにつれて3次元モデルから得られた分布に近づいた。そして、鉛直堤防の非定常越流実験においては、多層モデルで層数を増やすにつれ、堤防越流量の再現性が大きく向上した。さらに、単層モデルでは表現し得ない鉛直堤防への衝突直後の複雑な流れ場についても、その特徴をつかんだ妥当な解析が可能であった。

最後に、開発した多層型非線形分散波モデルを用いて木戸川における津波の河川遡上の再現計算を行い、非線形長波理論のモデルの結果との比較を行った。ブシネスクモデル、多層モデル共に、この津波の遡上速度は上記の実験の再現計算と同様に非線形長波モデルよりも速く算出され、ビデオ解析から得られた遡上速度を十分に再現することができた。また、層数を増やした場合には、津波と逆向きの流れが津波にも影響を与え、遡上速度が減速する傾向があることが示された。

# 目次

1	序論	1
1.1	東日本大震災における津波被害とその後の対応	1
1.2	津波の数値シミュレーション	2
1.3	研究の目的	3
2	非線形長波方程式の導出	5
2.1	連続の式	5
2.2	Navier-Stokes 方程式	9
2.3	レイノルズ方程式	11
2.4	非線形長波方程式	13
3	非線形長波モデルの実地への適用性の検証	16
3.1	東日本大震災における木戸川河口域の被害状況	16
3.2	非線形長波モデルによるパラメータの感度分析	17
3.2.1	分析のための基本モデルの設定	17
3.2.2	津波遡上に関する特性分析	20
3.3	非線形項の離散化手法の違いが遡上速度に与える影響	26
3.3.1	検討した数値解析手法	26
3.3.2	非粘性バーガーズ方程式への適用	28
3.3.3	段波実験への適用	29
3.3.4	1次元実地スケール計算への適用	34
3.4	本章のまとめ	36
4	多層型非線形分散波モデルの構築	38
4.1	既存の非線形分散波モデル	38
4.2	既存の多層モデル	40
4.3	強非線形分散波の多層式の導出	41
4.3.1	境界条件	41
4.3.2	連続の式	42
4.3.3	鉛直流速の分布の仮定	42
4.3.4	運動方程式	43
4.3.5	粘性項の導入	49
4.4	多層型非線形分散波モデルの数値解析	52
4.4.1	離散化のための方程式の変形	52
4.4.2	多層モデルの離散式	55
4.4.3	境界条件などの数値処理	57
4.4.4	連続の式の離散化	60

4.5	多層式の妥当性について . . . . .	61
5	多層型非線形分散波モデルの妥当性検証	63
5.1	海岸波動 . . . . .	63
5.2	定常状態の堤防越流実験 . . . . .	64
5.3	段波実験 . . . . .	67
5.4	非定常状態の堤防越流実験 . . . . .	72
6	多層型非線形分散波モデルの実地への適用性の検証	79
7	結論	82
	謝辞	84
	参考文献	85

## 表目次

3.1	case1 計算条件 . . . . .	20
3.2	各ケースにおける遡上速度計算結果 . . . . .	23
3.3	図 3.4 の各地点における浸水高 . . . . .	25
3.4	実験条件と結果 (松富 [32] より作成) . . . . .	31
5.1	段波波高 $H_m$ の実験値からのずれ . . . . .	70
5.2	段波波高 $\eta_m$ の実験値からのずれ . . . . .	70

## 目次

3.1	津波先端線の推移（佐貫ら [15] より）	17
3.2	佐貫らによる遡上速度の比較 [15]	18
3.3	計算領域東端の入射波形	19
3.4	浸水高・流跡の調査結果（佐貫ら [15]）に case1 での浸水高計算結果を加筆（赤字：単位 m）	19
3.5	木戸川河道内における津波先端線の時間推移	24
3.6	木戸川南部の低平地における津波先端線の時間推移	24
3.7	津波先端線の比較（case1, case9, ビデオ解析）	25
3.8	非粘性バーガーズ方程式の計算結果の違い	29
3.9	松富の実験装置	30
3.10	記号の定義	30
3.11	段波形成実験の再現計算での観測点時間波形	32
3.12	段波先端速度の計算値と理論値の比較（ $H_b$ を使用）	33
3.13	段波先端速度の計算値と理論値の比較（ $\eta_m$ を使用）	34
3.14	1次元モデルによる津波先端線の推移の比較	35
3.15	1次元モデルによる津波先端線の移動速度の比較	35
5.1	台形潜堤の形状と水面波形の測定位置	63
5.2	P3 における実験値 [5] と多層モデルの計算波形	64
5.3	堤防越流実験の模型断面図	65
5.4	定常状態における水位の比較	66
5.5	定常状態におけるピエゾ水頭の比較	66
5.6	段波先端速度の比較	67
5.7	段波形成実験ケース 13 の観測点時間波形	68
5.8	段波波高 $H_m$ の比較	69
5.9	分散第一波の波高 $\eta_m$ の比較	70
5.10	段波形成実験ケース 15 の多層モデルにおける水平流速の鉛直分布	71
5.11	段波形成実験ケース 15 の水平流速の鉛直分布の MPS 法との比較	71
5.12	断面二次元水槽概略図（瀬戸 [19] より）	72
5.13	堤防周辺における越流時流況（瀬戸 [19] より）	72
5.14	CH1 における実験波高と計算値の比較	73
5.15	CH2 における実験波高と計算値の比較	74
5.16	CH3 における実験波高と計算値の比較	75
5.17	CH4 における実験波高と計算値の比較	75
5.18	CH5 における実験波高と計算値の比較	76
5.19	越流枳内の水総量の比較	77
5.20	非常越流時の層内断面平均流速分布	77



5.21	非定常越流時の MPS 法による計算結果 . . . . .	78
6.1	多層モデルによる津波先端線の推移の比較 . . . . .	79
6.2	多層モデルによる津波先端線の遡上速度の比較 . . . . .	79
6.3	河川遡上時の流況 (層数 3) . . . . .	80
6.4	河川遡上時の流況比較 . . . . .	81

# 1 序論

## 1.1 東日本大震災における津波被害とその後の対応

我々人間が生きるために、水はなくてはならない存在である。しかし、我々の暮らす地球上で生じる多くの災害に、水が関係している。主に水害と呼ばれる洪水氾濫や高潮、暴風雨、干ばつ等の他にも、土砂災害に括られる地滑りや土石流、都市の地下水揚水が原因で生じる地盤沈下、地震により生じる液状化や津波も、水のもたらす災害と言えるだろう。21 世紀に入ってから、これらの災害による被害は世界各地で後を絶たず、それは日本も例外ではない。

日本における記憶に新しい大災害として、東日本大震災による津波が挙げられる。2011 年 3 月 11 日 14 時 46 分、三陸沖の深さ 24km を震源として Mw9.0 の巨大地震が生じた。この地震をきっかけにいくつもの地震が連動して生じ、大規模な津波が東日本、主に東北地方を襲った。この津波は海岸堤防も越流し、堤防に守られた地域にも深刻な損害を与えた。人的被害は、死者 15,889 名、行方不明 2,601 名、負傷者 6,152 名となり、建築物被害も全半壊が約 40 万戸に及んでいる。東日本大震災以外にも津波による被害は世界規模で生じており、特に被害が甚大なものとして 2004 年 12 月 26 日に起こったスマトラ沖地震による津波では、死者・行方不明者が 22 万人を超えた。

東日本大震災において、ギネス記録に認定されていた釜石湾の防波堤ですら津波の侵入を完全に防ぐことができなかった。港湾空港技術研究所の調査 [13] によれば、釜石の防波堤は津波高を 4 割、最大遡上高を 5 割低減し、市街地における水位上昇を 6 分間遅らせた。この事実は、海岸構造物などのハード対策は災害対策として一定の効果を発揮するものの、それ単独では限界があることを示しており、情報システムや土地利用計画等によるソフト対策と組み合わせて被害軽減策を考えることが必要不可欠であることがわかる。内閣府中央防災会議 [23] も今後の防災について抜本的な見直しが必要であるとし、各地方自治体においても海岸堤防では防ぐことのできない津波に対しても氾濫を前提とした防災・減災計画の見直しが進められている。限られた予算の中で津波の氾濫に対する最適な防災・減災策を講じるためには、従来のハザードマップに見られるような浸水域・浸水深の分布だけでなく、氾濫流が到達するまでの時間や氾濫流の流速、流向、浸水の継続時間な

どの氾濫域における詳細な水理特性の把握，同時に水以外の要素が流れ場に与える影響が重要であり，実用的で高精度な氾濫場予測モデルの構築が必要不可欠である．特に近年の CPU の性能や解析技術，観測技術の進歩は目覚ましく，従来よりも詳細で信頼性の高い解析が可能となってきており，今後はさらにソフト面での重要性が増してくると考えられる．

本論文では，津波対策において今後さらに重要性の増す数値シミュレーションに焦点を当てる．

## 1.2 津波の数値シミュレーション

実用化されている津波シミュレータは TIME PROJECT[46] に代表されるように 2 次元非線形長波理論に基づいているものが多い．最近ではソリトン分裂などの現象も考慮した非線形分散波理論に基づくモデルでの数値解析も多数実施，及びソースコードの公開もされており (Baba et al.[36] など)，海域の津波の挙動の再現に関しては着実に精度が上がっている．

しかしながら，陸上を遡上し氾濫する津波の挙動に関しては最終的な浸水深や浸水域に関してはある程度の再現性が得られるものの，氾濫域における避難や構造物の倒壊に影響する氾濫流の流速や流体力の再現については依然として精度に課題が残されている [15][24]．さらに，津波対策を講じる上で，巨大な津波にも減災効果を発揮する粘り強い堤防を越流する津波の水理特性の再現は必要不可欠であるが，従来の鉛直積分型の静水圧を前提としたモデルでは天端や裏法における圧力や流速を十分な精度で求めることは難しく，鉛直加速度を考慮した分散型のモデルが優位であると指摘されている [2]．また，東日本大震災では河川を遡上することでより陸地深くまで入り込んだ津波が氾濫することで被害を拡大させた事例も多く見られたが，河川を遡上する津波の再現計算にも同様に精度の面で課題が残っている．例えば佐貫ら [15] は震災当時に福島県楢葉町の木戸川河口域で撮影された津波の映像を解析し，一般的な非線形長波方程式に基づくモデルでは，浸水域や浸水深を精度よく再現できても，河道内の遡上速度は 5 割程度過小評価することを指摘した．このような遡上速度の過小評価は，津波の到達時刻の過小評価につながり，避難計画の策定に重大な影響を与えられられる．

これらの問題点は，例えば CADMAS-SURF[4] に代表されるような 3 次元型のシミュレータを用いれば解決が期待されるものの，3 次元型のシミュレータは計算負荷が高く，再現領域や使用環

境が限定されてしまう。準 3 次元型の解析は、2 次元型よりも精度の面では向上し、3 次元型よりも計算負荷が低いが、遡上や氾濫を含んだ津波を解いた研究は 2 次元型や 3 次元型に比べて数が少なく、また米山ら [35] のように静水圧を仮定しているものが多い。

### 1.3 研究の目的

以上の背景を踏まえ、本研究は津波の遡上計算の精度と実用性の向上を目的とした。本論文では大きく分けて 2 つのテーマを取り扱っており、前半では最も広く使われている非線形長波モデルをフィールドスケールの計算に適用した場合の再現性の検証を、後半では動圧や強非線形の分散性を考慮した準 3 次元型の多層モデルを構築・開発し、その適用性の検証を記述している。具体的な構成は以下の通りである。

#### 第 1 章 序論

本章では、本研究の背景と目的、従来の研究、論文構成をまとめた。

#### 第 2 章 非線形長波方程式の導出

第 2 章では、広く使われている非線形長波方程式を導出過程から示す。多くの水理学の教科書に書かれている内容ではあるが、第 4 章に詳述する多層型非線形分散波モデルと比べ、どのような近似が為されているのかを明確にすることが目的である。

#### 第 3 章 非線形長波モデルの実地への適用性の検証

第 3 章では、非線形長波モデルを用いて東日本大震災における木戸川の津波遡上の再現計算を行い、河川津波の特性を分析する。入力波形や河床高などの様々なパラメータ、および非線形項の離散化手法の違いがシミュレーション結果に与える影響を詳細に調査する。

#### 第 4 章 多層型非線形分散波モデルの構築

第 4 章では、多層型（準 3 次元型）非線形分散波モデルの構築を行う。既存の多層モデル、および既存の非線形分散波モデルを紹介した後、アーセル数の大きい場合にも適用可能な分散波式を多層に展開する。展開した式を離散化し、シミュレータを開発する。

#### 第 5 章 多層型非線形分散波モデルの妥当性検証

第 5 章では，第 4 章で構築したシミュレータを用いて，既存の実験について再現計算を行うことで，モデルの妥当性を検証する．

#### 第 6 章 多層型非線形分散波モデルの実地への適用性の検証

第 6 章では，上述の多層型非線形分散波モデルの実地への適用として，第 3 章で行った木戸川の河川津波の再現計算を行う．

#### 第 7 章 結論

第 7 章では本研究で得られた主な結論と将来への展望を述べる．

## 2 非線形長波方程式の導出

ここでは島田 [16], 日野 [26], 登坂 [21]などを参考に, 非線形長波方程式の導出を行う.

### 2.1 連続の式

速度  $v$ [m/s] で動く流体の中の, 密度  $\rho$ [kg/m<sup>3</sup>], 体積  $\Delta V$ [m<sup>3</sup>] の微小空間  $V_0$  を考える. 質量を  $M(t)$ [kg] とすれば,

$$\frac{dM(t)}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_0} \rho dV = \int_{V_0} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \quad (2.1.1)$$

である. ここで, この微小体の表面積を  $A_0$ , 微小面積  $dA$  に対する法線ベクトルを  $n$  とする. 上記  $M(t)$  の変化は  $V_0$  の表面  $A_0$  を通る流体の流出入に関係する.

$dA$  を通過する流体の量は単位時間当たり,  $\rho v \cdot n$  と表せる.  $V_0$  全体から流出する量は, ガウスの発散定理を用いて,

$$\int_{A_0} \rho v \cdot n dA = \int_{V_0} \text{div}(\rho v) dV \quad (2.1.2)$$

である. これが  $M(t)$  の減少分と等しくなるので,

$$\frac{dM(t)}{dt} = \int_{V_0} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \int_{V_0} \text{div}(\rho v) dV \quad (2.1.3)$$

つまり,

$$\int_{V_0} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho v) \right] dV = 0 \quad (2.1.4)$$

これが流体中のあらゆる場所で成立していることから,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho v) = 0 \quad (2.1.5)$$

が導かれる. これを成分表示すれば,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (2.1.6)$$

となり, これを連続の方程式という.

更にこれを変形する .

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla$$

を用いると ,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (2.1.7)$$

となる . 非圧縮流体なら ,

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0$$

が成立するので , 連続の方程式は ,

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (2.1.8)$$

となる .

さて , 連続の方程式を導出したが , このままでは使いにくいので , 使いやすいように変形する .

$z = \eta_b$  は底面、 $z = \eta$  は水面とする . この範囲で  $\operatorname{div} \mathbf{v}$  を積分する .

$$\begin{aligned} \int_{\eta_b}^{\eta} \operatorname{div} \mathbf{v} dz &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{\eta_b}^{\eta} u dz - u \frac{\partial \eta}{\partial x} \Big|_{z=\eta} + u \frac{\partial \eta_b}{\partial x} \Big|_{z=\eta_b} \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \int_{\eta_b}^{\eta} v dz - v \frac{\partial \eta}{\partial y} \Big|_{z=\eta} + v \frac{\partial \eta_b}{\partial y} \Big|_{z=\eta_b} \\ &+ w \Big|_{z=\eta} - w \Big|_{z=\eta_b} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.1.9)$$

なお , この式変形にはライプニッツの微分に関するチェインルールを使用している . これに関しては後ほど証明する .

(2.1.9) 式において ,  $\eta, \eta_b$  は  $t, x, y$  の関数であるから , 下の式が成立する .

$$d\eta = \frac{\partial \eta}{\partial t} dt + \frac{\partial \eta}{\partial x} dx + \frac{\partial \eta}{\partial y} dy \quad (2.1.10)$$

$$d\eta_b = \frac{\partial \eta_b}{\partial t} dt + \frac{\partial \eta_b}{\partial x} dx + \frac{\partial \eta_b}{\partial y} dy \quad (2.1.11)$$

また,  $w$  は  $z$  方向の流速だから,

$$w|_{z=\eta} = \frac{d\eta}{dt} = \frac{\partial\eta}{\partial t} + \frac{\partial\eta}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial\eta}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \frac{\partial\eta}{\partial t} + u \frac{\partial\eta}{\partial x} \Big|_{z=\eta} + v \frac{\partial\eta}{\partial y} \Big|_{z=\eta} \quad (2.1.12)$$

$$w|_{z=\eta_b} = \frac{d\eta_b}{dt} = \frac{\partial\eta_b}{\partial t} + \frac{\partial\eta_b}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial\eta_b}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \frac{\partial\eta_b}{\partial t} + u \frac{\partial\eta_b}{\partial x} \Big|_{z=\eta_b} + v \frac{\partial\eta_b}{\partial y} \Big|_{z=\eta_b} \quad (2.1.13)$$

式 (2.1.12), (2.1.13) を式 (2.1.9) に代入することにより,

$$\int_{\eta_b}^{\eta} \text{div} \mathbf{v} dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{\eta_b}^{\eta} u dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{\eta_b}^{\eta} v dz + \frac{\partial\eta}{\partial t} - \frac{\partial\eta_b}{\partial t} = 0 \quad (2.1.14)$$

ここで,  $D = \eta - \eta_b$ ,  $M = UD = \int_{\eta_b}^{\eta} u dz$ ,  $N = VD = \int_{\eta_b}^{\eta} v dz$  とすると,

$$\frac{\partial D}{\partial t} + \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} = 0 \quad (2.1.15)$$

となる. 上式において,  $D$  は全水深を,  $M, N$  はそれぞれ  $x, y$  方向の単位幅流量 (フラックス) を,  $U, V$  はそれぞれ  $x, y$  方向の水深方向に平均した断面平均流速を表す. この (2.1.15) 式を連続の式と呼ぶ.

ライプニッツの微分に関するチェインルールは以下である.

$$\frac{d}{dx} \int_{G(x)}^{F(x)} H(x, y) dy = \int_{G(x)}^{F(x)} \frac{\partial}{\partial x} H(x, y) dy + H(x, F(x)) \frac{dF(x)}{dx} - H(x, G(x)) \frac{dG(x)}{dx} \quad (2.1.16)$$

この式を証明する.

微分の定義式を用いれば,

$$\frac{d}{dx} \int_{G(x)}^{F(x)} H(x, y) dy = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_{G(x+\Delta x)}^{F(x+\Delta x)} H(x+\Delta x, y) dy - \int_{G(x)}^{F(x)} H(x, y) dy}{\Delta x} \quad (2.1.17)$$

上式の右辺の分子を変形すると, 下のようになる.

$$\int_{G(x+\Delta x)}^{F(x+\Delta x)} H(x+\Delta x, y) dy - \int_{G(x+\Delta x)}^{F(x+\Delta x)} H(x, y) dy + \int_{G(x+\Delta x)}^{F(x+\Delta x)} H(x, y) dy - \int_{G(x)}^{F(x)} H(x, y) dy \quad (2.1.18)$$



式 (2.1.18) の第 1 項, 第 2 項をまとめると,

$$\int_{G(x+\Delta x)}^{F(x+\Delta x)} H(x+\Delta x, y) dy - \int_{G(x+\Delta x)}^{F(x+\Delta x)} H(x, y) dy = \int_{G(x+\Delta x)}^{F(x+\Delta x)} (H(x+\Delta x, y) - H(x, y)) dy \quad (2.1.19)$$

$\Delta x$  で除し,  $\Delta x \rightarrow 0$  の極限をとる.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_{G(x+\Delta x)}^{F(x+\Delta x)} (H(x+\Delta x, y) - H(x, y)) dy}{\Delta x} = \int_{G(x)}^{F(x)} \frac{\partial}{\partial x} H(x, y) \quad (2.1.20)$$

これで式 (2.1.16) の右辺第 1 項が与えられた. 次に式 (2.1.18) の第 3 項, 第 4 項をまとめて変形する.

$$\int_{G(x+\Delta x)}^{F(x+\Delta x)} H(x, y) dy - \int_{G(x)}^{F(x+\Delta x)} H(x, y) dy + \int_{G(x)}^{F(x+\Delta x)} H(x, y) dy - \int_{G(x)}^{F(x)} H(x, y) dy \quad (2.1.21)$$

この式の第 1 項, 第 2 項をまとめる.

$$\int_{G(x+\Delta x)}^{F(x+\Delta x)} H(x, y) dy - \int_{G(x)}^{F(x+\Delta x)} H(x, y) dy = - \int_{G(x)}^{G(x+\Delta x)} H(x, y) dy \quad (2.1.22)$$

となる. これを  $\Delta x$  で除し,  $\Delta x \rightarrow 0$  の極限をとる.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{- \int_{G(x)}^{G(x+\Delta x)} H(x, y) dy}{\Delta x} = -H(x, G(x)) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{G(x+\Delta x) - G(x)}{\Delta x} = -H(x, G(x)) \frac{dG}{dx} \quad (2.1.23)$$

式 (2.1.16) の右辺第 3 項が与えられた. 同様に式 (2.1.19) の第 3 項, 第 4 項をまとめて書けば,

$$\int_{G(x)}^{F(x+\Delta x)} H(x, y) dy - \int_{G(x)}^{F(x)} H(x, y) dy = \int_{F(x)}^{F(x+\Delta x)} H(x, y) dy \quad (2.1.24)$$

となる. これを  $\Delta x$  で除し,  $\Delta x \rightarrow 0$  の極限をとり, 同様の式変形をすることで, 式 (2.1.16) の右辺第 2 項を得ることが出来る.

以上により, 式 (2.1.16) が示された.

## 2.2 Navier-Stokes 方程式

次に流体の運動方程式を求める．前節と同じ微小体を考える．表面  $A_0$  に外から作用する圧力の合力は，圧力を  $p[\text{N/m}^2]$  とすると，

$$-\int_{A_0} p \mathbf{n} dA = -\int_{V_0} \text{grad} p dV = -(p_x, p_y, p_z) \Delta V \quad (2.2.1)$$

となる．なお式変形にはガウスの発散定理を用いた．

質量  $\rho \Delta V$ ，加速度  $\frac{D\mathbf{v}}{Dt}$ ，面積力  $-\Delta V \text{grad} p$ ，体積力  $\rho \mathbf{f} \Delta V$  であるから，運動方程式は，

$$\rho \Delta V \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = (-\text{grad} p + \rho \mathbf{f}) \Delta V \quad (2.2.2)$$

である．これを整理する．

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \text{grad} p + \mathbf{f} \quad (2.2.3)$$

この式をオイラーの運動方程式という．一様外力の場合， $\mathbf{f} = \mathbf{g} = (0, 0, g)$  である．

ところで，運動量は  $(\rho \Delta V) \mathbf{v}$  で表されるので， $\rho \mathbf{v}$  は運動量密度であることがわかる．これを  $t$  で偏微分する．

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) = \frac{\partial \rho}{\partial t} v_i + \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} \quad (2.2.4)$$

また，式 (2.2.2) を次のように表す．

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \rho \mathbf{f} \quad (2.2.5)$$

さらにクロネッカーの  $\delta_{ik}$  を用いれば，

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_k} (p \delta_{ik}) \quad (2.2.6)$$

と表せるので，式 (2.2.4)，(2.2.5) から，下の式が導かれる．

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_k} p_{ik} = \rho f_i \quad (2.2.7)$$

ただし  $p_{ik} = \rho v_i v_k + p \delta_{ik}$  .

これまでは完全流体として運動方程式を求めてきたが , ここからは粘性流体を考える . 応力  $F(\boldsymbol{n})$  は単位面積あたりに作用する力である .  $F_i(\boldsymbol{n})$  は応力テンソル  $\sigma_{ik}$  を使うと ,  $F_i(\boldsymbol{n}) = \sigma_{ik} n_k$  と表せる . 応力テンソルは粘性流体に対しては ,

$$\sigma_{ik} = -p \delta_{ik} + \sigma_{ik}^{(v)} \quad (2.2.8)$$

である . 右辺第 1 項が圧力テンソル , 第 2 項が粘性応力テンソルを表す .

完全流体では  $p_{ik} = \rho v_i v_k + p \delta_{ik}$  だったが , 粘性流体では次のようになる .

$$p_{ik}^{(v)} = \rho v_i v_k + p \delta_{ik} - \sigma_{ik}^{(v)} = \rho v_i v_k - \sigma_{ik} \quad (2.2.9)$$

よって , 粘性流体の運動量保存則は ,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_k} p_{ik}^{(v)} = \rho f_i \quad (2.2.10)$$

となる . この式を連続の方程式を使い整理することにより ,

$$\rho \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} \sigma_{ik}^{(v)} + \rho f_i \quad (2.2.11)$$

または ,

$$\frac{Dv_i}{Dt} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_k} \sigma_{ik} + f_i \quad (2.2.12)$$

となる . 応力テンソルに関して ,

$$\sigma_{ik}^{(v)} = \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \operatorname{div} \boldsymbol{v} \right) + \zeta \delta_{ik} \operatorname{div} \boldsymbol{v} \quad (2.2.13)$$

が成立する . ただし  $\mu$  はずり粘性係数 ,  $\zeta$  は体積粘性係数 . 粘性係数を定数とみなすことにより ,

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \sigma_{ik}^{(v)} = \mu \left( \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} v_i + \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \operatorname{div} \boldsymbol{v} \right) + \zeta \frac{\partial}{\partial x_i} \operatorname{div} \boldsymbol{v} = \mu \nabla^2 v_i + \left( \frac{1}{3} \mu + \zeta \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \operatorname{div} \boldsymbol{v} \quad (2.2.14)$$

となる．式 (2.2.8) , (2.2.11) , (2.2.14) から ,

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}\right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \left(\frac{1}{3}\mu + \zeta\right)\nabla \operatorname{div} \mathbf{v} + \rho \mathbf{f} \quad (2.2.15)$$

が導かれる．これを Navier-Stokes 方程式 (NS 方程式) という．なお , ここで粘性の影響を無視したものをオイラー方程式と呼ぶ．

ここで非圧縮性流体の条件を適用すると ,  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$  かつ  $\rho$  は定数となるので ,  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$  を動粘性係数とすれば ,

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\nabla\left(\frac{p}{\rho}\right) + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{f} \quad (2.2.16)$$

となる．

## 2.3 レイノルズ方程式

NS 方程式における各変数を ,

$$\mathbf{v} = [\mathbf{v}] + \mathbf{v}' \quad (2.3.1)$$

$$p = [p] + p' \quad (2.3.2)$$

$$\mathbf{f} = [\mathbf{f}] + \mathbf{f}' \quad (2.3.3)$$

とする．右辺第 1 項はそれぞれの時間  $T$  の間の平均値 , 第 2 項は平均値からの偏りを表す．

$[\mathbf{v}]$  ,  $[p]$  ,  $[\mathbf{f}]$  は時間平均であるから ,

$$\frac{1}{T} \int_t^{t+T} [\mathbf{v}] dt = [\mathbf{v}] \quad (2.3.4)$$

$$\frac{1}{T} \int_t^{t+T} [p] dt = [p] \quad (2.3.5)$$

$$\frac{1}{T} \int_t^{t+T} [\mathbf{f}] dt = [\mathbf{f}] \quad (2.3.6)$$

が成り立つ．また偏りについて時間平均をとれば，

$$\frac{1}{T} \int_t^{t+T} \mathbf{v}' dt = \mathbf{0} \quad (2.3.7)$$

$$\frac{1}{T} \int_t^{t+T} p' dt = 0 \quad (2.3.8)$$

$$\frac{1}{T} \int_t^{t+T} \mathbf{f}' dt = \mathbf{0} \quad (2.3.9)$$

である．さらに，

$$\frac{1}{T} \int_t^{t+T} \frac{\partial[\mathbf{v}]}{\partial t} dt = \frac{\partial[\mathbf{v}]}{\partial t} \quad (2.3.10)$$

$$\frac{1}{T} \int_t^{t+T} \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} dt = \mathbf{0} \quad (2.3.11)$$

$$\frac{1}{T} \int_t^{t+T} ([\mathbf{v}] \cdot \nabla) \mathbf{v}' dt = \mathbf{0} \quad (2.3.12)$$

$$\frac{1}{T} \int_t^{t+T} (\mathbf{v}' \cdot \nabla)[\mathbf{v}] dt = \mathbf{0} \quad (2.3.13)$$

$$\frac{1}{T} \int_t^{t+T} \nabla^2[\mathbf{v}] dt = \nabla^2[\mathbf{v}] \quad (2.3.14)$$

$$\frac{1}{T} \int_t^{t+T} \nabla^2 \mathbf{v}' dt = \mathbf{0} \quad (2.3.15)$$

がわかるので，式 (2.2.16) の時間平均をとれば以下のようになる．

$$\frac{\partial[\mathbf{v}]}{\partial t} + ([\mathbf{v}] \cdot \nabla)[\mathbf{v}] + (\mathbf{v}' \cdot \nabla) \mathbf{v}' = -\nabla\left(\frac{[p]}{\rho}\right) + \nu \nabla^2[\mathbf{v}] + [\mathbf{f}] \quad (2.3.16)$$

左辺の第 3 項は加速度項の非線形項に由来する乱れの運動量輸送項であるレイノルズ応力である．

レイノルズ応力は 2 つの乱れ速度成分の積の平均値の分布，あるいは両者の相関の空間分布を意味する新たな変数である．ここでは渦動粘性モデルによる近似で簡易化する．

$$(\mathbf{v}' \cdot \nabla) \mathbf{v}' \approx -\varepsilon \nabla^2[\mathbf{v}] \quad (2.3.17)$$

ただし  $\varepsilon$  は渦動粘性係数といい，一般的に動粘性係数  $\nu$  よりもオーダーの大きな値となる．これを

利用してまとめると，

$$\frac{\partial[\mathbf{v}]}{\partial t} + ([\mathbf{v}] \cdot \nabla)[\mathbf{v}] = [\mathbf{f}] - \frac{1}{\rho} \nabla[p] + \nu \nabla^2[\mathbf{v}] + \varepsilon \nabla^2[\mathbf{v}] \quad (2.3.18)$$

となる．これがレイノルズ方程式である．

## 2.4 非線形長波方程式

乱流では流体粘性による応力はレイノルズ応力に比べて無視できる．その仮定の下でレイノルズ方程式を成分分解する．

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial UU}{\partial x} + \frac{\partial UV}{\partial y} + \frac{\partial UW}{\partial z} = F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \varepsilon \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) \quad (2.4.1)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial VU}{\partial x} + \frac{\partial VV}{\partial y} + \frac{\partial VW}{\partial z} = F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \varepsilon \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right) \quad (2.4.2)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial WU}{\partial x} + \frac{\partial WV}{\partial y} + \frac{\partial WW}{\partial z} = F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \varepsilon \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right) \quad (2.4.3)$$

なお，ここでは  $(F_x, F_y, F_z) = (0, 0, -g)$  である．

津波は波長が長く（最大で数十から数百 km のオーダーになることもある），水深が比較的浅い（最大でマリアナ海溝の 1 万 m）流れであり，長波の近似が可能である．ここで波高水深比  $\epsilon = \eta_0/h_0$ ，相対水深  $\sigma = (h_0/l_0)^2$ ，それら 2 つのパラメータから求められるアーセル数  $U_r = \epsilon/\sigma$  とする．重力加速度に比べて水粒子の鉛直方向加速度が無視できる程度に小さく，また  $\epsilon$  が十分に小さい弱非線形の近似が成り立つとすると，式 (2.4.3) は次のようになる．

$$0 = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (2.4.4)$$

これを  $\eta$  から  $z$  まで積分すると， $z$  の位置での静水圧分布を求められる．

$$\int_{\eta}^z \left( g + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \right) dz = [gz]_{\eta}^z + \frac{p}{\rho} = 0 \quad (2.4.5)$$

これより，

$$p = \rho g(\eta - z) \quad (2.4.6)$$

が求められる．なおこれは大気圧  $p_0 = 0$  として，大気圧を基準に計ったゲージ圧と呼ばれる圧力である．

式 (2.4.1) の左辺について，底面から水面まで積分する．

$$\begin{aligned} \int_{\eta_b}^{\eta} \left( \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial UU}{\partial x} + \frac{\partial UV}{\partial y} + \frac{\partial UW}{\partial z} \right) dz &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{\eta_b}^{\eta} U dz - U \frac{\partial \eta}{\partial t} \Big|_{z=\eta} + U \frac{\partial \eta_b}{\partial t} \Big|_{z=\eta_b} \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} \int_{\eta_b}^{\eta} U^2 dz - U^2 \frac{\partial \eta}{\partial x} \Big|_{z=\eta} + U^2 \frac{\partial \eta_b}{\partial x} \Big|_{z=\eta_b} \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \int_{\eta_b}^{\eta} UV dz - UV \frac{\partial \eta}{\partial y} \Big|_{z=\eta} + UV \frac{\partial \eta_b}{\partial y} \Big|_{z=\eta_b} \\ &+ UW \Big|_{z=\eta} - UW \Big|_{z=\eta_b} \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

ここで，

$$UW \Big|_{z=\eta} = U \frac{\partial \eta}{\partial t} + U^2 \frac{\partial \eta}{\partial x} \Big|_{z=\eta} + UV \frac{\partial \eta}{\partial y} \Big|_{z=\eta} \quad (2.4.8)$$

$$UW \Big|_{z=\eta_b} = U \frac{\partial \eta_b}{\partial t} + U^2 \frac{\partial \eta_b}{\partial x} \Big|_{z=\eta_b} + UV \frac{\partial \eta_b}{\partial y} \Big|_{z=\eta_b} \quad (2.4.9)$$

である．式 (2.4.7) を整理すると，

$$\begin{aligned} \int_{\eta_b}^{\eta} \left( \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial UU}{\partial x} + \frac{\partial UV}{\partial y} + \frac{\partial UW}{\partial z} \right) dz &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{\eta_b}^{\eta} U dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{\eta_b}^{\eta} U^2 dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{\eta_b}^{\eta} UV dz \\ &= \frac{\partial M}{\partial t} + \beta_{xx} \frac{\partial(UM)}{\partial x} + \beta_{xy} \frac{\partial(VM)}{\partial y} \end{aligned} \quad (2.4.10)$$

となる．ここで  $\beta_{xx} = \frac{\int_{\eta_b}^{\eta} U^2 dz}{DU^2}$ ,  $\beta_{xy} = \frac{\int_{\eta_b}^{\eta} UV dz}{DUV}$  は運動量補正係数であり，通常は 1 に近似され

る．次に式 (2.4.1) の右辺第 2 項を同じ範囲で積分する．式 (2.4.6) を用いることにより，

$$\begin{aligned}
 \int_{\eta_b}^{\eta} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} dz &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\eta_b}^{\eta} p dz + \frac{p}{\rho} \frac{\partial \eta}{\partial x} \Big|_{z=\eta} - \frac{p}{\rho} \frac{\partial \eta_b}{\partial x} \Big|_{z=\eta_b} \\
 &= -g \frac{\partial}{\partial x} \int_{\eta_b}^{\eta} (\eta - z) dz + 0 - g(\eta - \eta_b) \frac{\partial \eta_b}{\partial x} \\
 &= -g \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\eta^2}{2} - \eta \eta_b + \frac{\eta_b^2}{2} \right) - g(\eta - \eta_b) \frac{\partial \eta_b}{\partial x} \\
 &= -gD \frac{\partial \eta}{\partial x}
 \end{aligned} \tag{2.4.11}$$

がわかる．なお， $\eta = D + \eta_b$  は水位を表す．また今後は  $z_b = \eta_b$  で底面高を表すとする．

式 (2.4.1) の右辺第 3 項について考える．浅い平面流れでは，平面渦による抵抗は無視出来る場合が多いので，鉛直方向の摩擦抵抗項のみについて積分する．

$$\int_{\eta_b}^{\eta} \varepsilon \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} dz = \varepsilon \frac{\partial U}{\partial z} \Big|_{z=\eta} - \varepsilon \frac{\partial U}{\partial z} \Big|_{z=\eta_b} = 0 - \frac{\tau_{bx}}{\rho} \tag{2.4.12}$$

ただし， $\tau$  はせん断摩擦応力を， $\tau_{bx}$  は  $\tau$  の  $x$  成分を表す．

以上の式をまとめると，

$$\frac{\partial M}{\partial t} + \beta_{xx} \frac{\partial(UM)}{\partial x} + \beta_{xy} \frac{\partial(VM)}{\partial y} = -gD \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\tau_{bx}}{\rho} \tag{2.4.13}$$

$y$  成分に関しても同様にすれば，

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \beta_{yx} \frac{\partial(UN)}{\partial x} + \beta_{yy} \frac{\partial(VN)}{\partial y} = -gD \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\tau_{by}}{\rho} \tag{2.4.14}$$

が導かれる．ただし  $\beta_{yx} = \beta_{xy}$ ， $\beta_{yy} = \frac{\int_{\eta_b}^{\eta} V^2 dz}{DV^2}$  であり，これを 1 と近似する．

式 (2.4.13)，(2.4.14) の 2 式と連続の式 (2.1.15) と連立させて水の流れを解く理論が非線形長波理論あるいは浅水理論であり，これらをまとめて非線形長波方程式あるいは浅水流方程式と呼ぶ．



### 3 非線形長波モデルの実地への適用性の検証

本章は、東日本大震災の津波が福島県楢葉町へ襲来した際に木戸川河口域で撮影された映像の分析結果 [15] を元に、非線形長波理論による津波計算の再現性の向上を目指した研究 [29][30][38] を取りまとめ、さらに検討を進めたものである。

#### 3.1 東日本大震災における木戸川河口域の被害状況

津波の被害軽減策の策定が重要であるのと同様に、津波発災後の現地調査も重要である。現地調査の結果は浸水域や浸水深、遡上高、流向などの津波の水理特性、また堤防や防潮水門、海岸保安林などの効果や破壊の程度などを把握する上で活用されており、例えば 1992 年のインドネシアでの津波では今村ら [3] などの調査が、東日本大震災でも後藤ら [12] などの調査が行われている。さらに近年では、これまでよりも津波の映像が数多く残されるようになっており、映像解析を行うことで津波の挙動を測定する例も増えてきた（例えば林ら [25]）。

佐貫ら [15] は、東日本大震災における木戸川河口域における津波遡上の浸水高や遡上速度を、当時のビデオ映像や現地調査、数値解析に基づき分析した。木戸川河口域は福島県楢葉町に位置しており、北部は海食崖に、南部は約  $3\text{km}^2$  の低平地となっている。低平地は田畑としての利用が多く、その中に集落や森林が点在する。

佐貫らが 2012 年 8 月に実施した現地調査によれば、低平地における浸水高は 5.4m から 8.4m 程度で、内陸に向かうにつれ徐々に小さくなる傾向が見られた一方で、河口より約 1800m も上流で 9.1m の遡上高が計測された。これにより河川津波による水位は平地と比べて高いことが示唆された。また流跡調査から、津波が河川から平地内へ向かって浸水したことが見られた。堤防に関して、規模の大きな箇所では約 300m にわたり海岸堤防が津波により破壊されたこと、河川堤防においても局所的ながら破堤したことがわかった。さらに破堤以外にも、液状化による埋没管の浮上や舗装の剥離といった被害が現地にて確認された。

上述のビデオ映像は 2011 年 3 月 11 日 15:30 頃に木戸川河口北側の天神岬展望台（標高 40m）から撮影されたものであり、津波の最大波の来襲の様子が記録されている。映像によれば、津波は

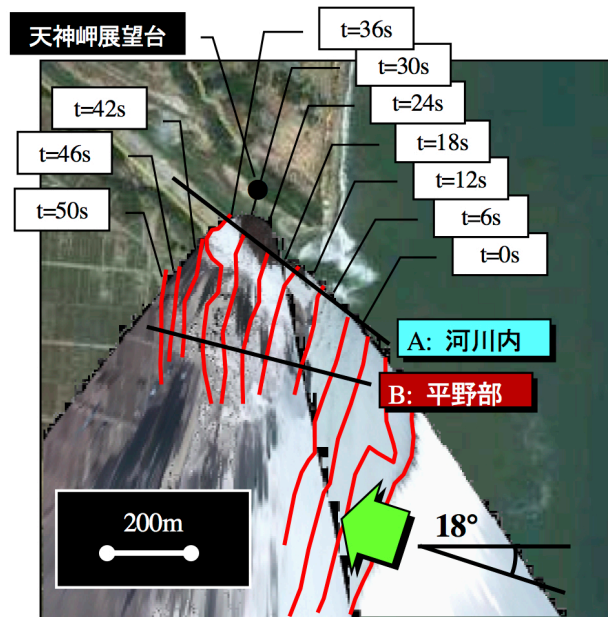


図 3.1 津波先端線の推移 (佐貫ら [15] より)

南東方向から来襲し、流域南側の海岸堤防より浸水を開始した。続いて木戸川河口に進入した津波は一気に川を遡上すると同時に、川から平地内に氾濫した。佐貫らは映像に対して座標変換を施した画像から、図 3.1 のような津波先端位置の時間変化を描いた。座標変換には写真の中の参照点と実際の緯度経度情報に基づき、最適な変換パラメータを求めている。

これを用いて河川より進入した津波と海岸堤防より進入した津波の遡上速度の特性を分析したところ、津波は沿岸から約  $12\text{m/s}$  の速度で接近し、河川では河口付近でやや速度を上げてある程度その速度を保ったまま上流へと河川を遡上したこと、平野部では海岸堤防付近で一時的に速度が上昇するも早い段階で減速したことなどが明らかとなった。なお、河川堤防沿いの階段や水門等を目印としながら、映像から直接的に遡上速度を求めることで、映像解析の結果の妥当性を確認している。

## 3.2 非線形長波モデルによるパラメータの感度分析

### 3.2.1 分析のための基本モデルの設定

佐貫らは前節の現地調査とビデオ解析の後、一般的な非線形長波方程式を Leapfrog 法に基づき離散化した津波氾濫モデルで再現計算を行った。しかし、浸水域や浸水高に関してはよく再現でき

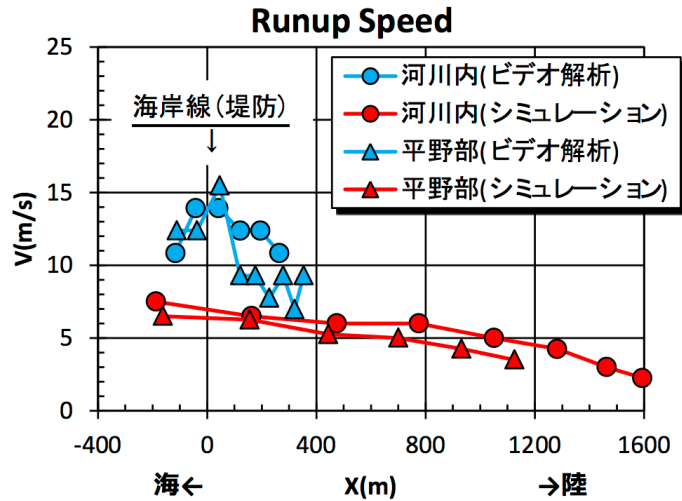


図 3.2 佐貫らによる遡上速度の比較 [15]

た一方で，図 3.2 に見られるように遡上速度を過小評価した．本研究ではこの過小評価の原因を探るため，非線形長波方程式や境界条件等の各種パラメータの感度分析を行った．

感度分析に用いる基本モデル（これを case1 とする）は，佐貫らを参考に以下の通りに設定した．基礎方程式は非線形長波方程式 (2.1.15),(2.4.13),(2.4.14) とし，マニングによる底面摩擦項を用いた．

$$\tau_{bx} = \rho g \frac{n^2 M \sqrt{u^2 + v^2}}{D^{4/3}} \quad (3.2.1)$$

$$\tau_{by} = \rho g \frac{n^2 N \sqrt{u^2 + v^2}}{D^{4/3}} \quad (3.2.2)$$

$n[m^{-1/3}s]$  はマニングの粗度係数である．変数はスタッガード格子に配置し，時間積分にはリーブフロッグ法を，移流項には 1 次精度風上差分法を，津波遡上端条件には小谷ら [14] の手法を用いた．その他の計算条件を表 3.1 に示す．LP 測量に基づく計算地形には，河川堤防と海岸堤防の複数箇所の破堤，地震による地盤沈下，および第 1 波による河口砂州の消滅を考慮してある．境界条件として，図 3.3 に示す緑線の波形を，計算領域東端部より入射させた．

この case1 の計算結果を現地調査結果と比較したものを図 3.4 に示す．図中の地点 A，B の河口部付近では浸水高を小さく，内陸部では大きく評価する傾向があった．一方で流向や浸水域は現地調査結果をほぼ妥当に再現できた．

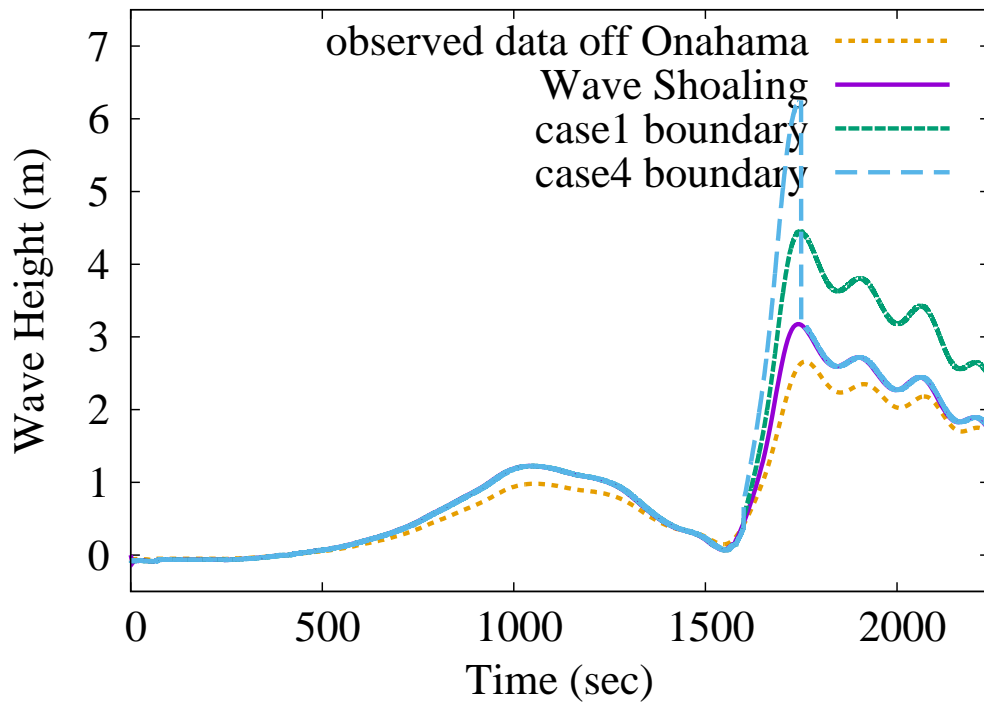


図 3.3 計算領域東端の入射波形

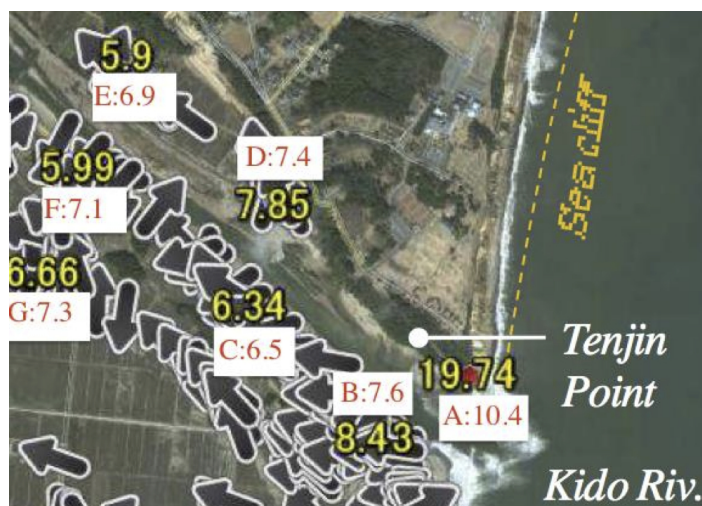


図 3.4 浸水高・流跡の調査結果（佐貫ら [15]）に case1 での浸水高計算結果を加筆（赤字：単位 m）

表 3.1 case1 計算条件

計算領域	10km×15km
水平格子間隔	$\Delta x = \Delta y = 10\text{m}$
時間刻み	$\Delta t = 0.2\text{s}$
地形データ	海底: M7004 シリーズ, 陸上: LP 測量データ
入射波形	波形: 福島県沖 GPS 波浪計データ, 入射角: E0°S
底面摩擦係数	海底・河道内: $n = 0.025[\text{s}/\text{m}^{1/3}]$ , 陸上: $n=0.030[\text{s}/\text{m}^{1/3}]$

河川に沿って河川座標  $X$  を設定し, 河口部を  $X = 0$ , 正の方向を上流側 (陸域側), 負の方向を下流側 (海域側) とすることとする. この河川座標沿いの津波先端線の推移から津波遡上速度を計算して比較を行った. この設定ではビデオ映像の津波遡上速度の解析結果は約  $12\text{m}/\text{s}$  となるが, case1 の計算結果では  $6.8\text{m}/\text{s}$  と, 佐貫らの指摘通り, 浸水域が一致していても遡上速度はかなりの過小評価となることが確かめられた.

### 3.2.2 津波遡上に関する特性分析

本研究では前節の case1 を元に, case2 から case8 の 7 種類の計算条件を変更して河川遡上解析をすることで, 河川津波の各種の特性が解析結果に与える影響の分析を行った. それぞれの計算ケースの条件と結果は以下の通りである.

#### case2 移流項の精度向上

非線形長波理論の移流項の離散化には 1 次精度風上差分法がよく用いられるが, この離散化スキームは数値拡散が生じることが知られている. case2 では 3 次精度の差分スキームである QUICKEST 法 [39] を用いて計算を行った. case1 と case2 の結果を比較すると, 河口部付近での遡上速度の差は見られないが, 内陸部での遡上速度を僅かに大きくする結果となった.

#### case3 底面摩擦の低減

河川部でのマンニングの粗度係数は, 小谷ら [14] の提案である,  $0.025\text{m}^{-1/3}/\text{s}$  がよく用いられる. また, 構造物による抵抗を考慮するために油屋ら [1] の合成等価粗度モデルなどが提案されており, これにより遡上速度が遅くなり良好な遡上速度の整合性が得られるように

なっている． case3 では摩擦の影響を小さくするため， $0.005\text{m}^{-1/3}/\text{s}$  として計算を行った． case1 と case3 を比較すると，水深が比較的大きい海域では，底面摩擦の影響はほとんど見られない．水深が小さい河道内では遡上時の流速も大きいため底面摩擦の影響が現れたが，摩擦係数を  $1/5$  としたことによる遡上速度の増大率は約 2.2% 程度であった．

#### case4 入力波形の調整

図 3.3 に見られるように，当該地点では，1m 程度の第 1 波が来襲したあと，最大浸水高を与えた第 2 波が来襲している．ビデオ画像により推定した津波速度は第 2 波によるものである．図中の紫線は GPS データ（橙破線）を計算領域沖側境界まで浅水変形させた波形，緑破線（case1）は浅水変形後の第 2 波の成分のみを 1.4 倍した波形，青破線（case4）は第 2 波の先端部のみの高さを大きくした波形である．計算領域東端に対してこの波形を境界条件として与えて計算を行った．case4 では，第 2 波のピーク水位が約 6.2m と，case1 における第 2 波のピーク水位 4.4m の約 1.4 倍とした．これにより case4 では河口部での津波第 2 波先端部の波高が約 8m となり，case1 の約 6m と比べて先端部の波高が増加した．結果として，case4 での平均の遡上速度は case1 の約 1.2 倍となった．以上から，波峰の増幅が遡上速度に大きな影響を与えることがわかる．なお，case4 では最大波峰以降の波高に関しては，case1 の場合よりも小さくなるように設定している．これにより津波の質量の総量が増加することを抑え，最終的な浸水域が case1 の浸水域と変わらないようにしている．

#### case5 入力波向の変更

基本モデルでは計算領域東端に対してある波形を  $E0^\circ S$  の方向から入射させているが，case5 ではこの波形を  $E18^\circ S$  の方向から入射させて計算を行った．この角度は海岸線の法線方向と一致し，佐貫らの画像解析結果とも符合する．case5 の結果を見ると，case1 に比べて津波先端の遡上速度が約 5% 過小評価された．津波の遡上速度が僅かに遅くなる原因として考えられるのは，北部からの反射回折波の影響である．木戸川北部には海食崖が存在しており，ここからの反射回折波が木戸川方向へ向かう流れがある．case1 では入射に角度がついていないため，南部よりも北部の方が僅かに早く津波が到達するが，case5 では入射角を与

えたことでほぼ同時に到達することになる。そのため、case1 では木戸川における津波先端部には北部からの回折波の影響が重なっていたが、case5 における回折波は津波先端部よりも遅れが生じ、水位と遡上速度が小さくなったと推察される。

#### case6 河床の掘り下げ

木戸川流域では最大浸水高を与えた第 2 波の前にやや波高の小さな第 1 波が存在していた。津波来襲前の衛星写真と現地調査結果との比較から、この第 1 波は河口砂州や河床地形に影響を与えたと考えられる。その影響を考慮するため、case6 では、河道内の河床高を一律 50cm 低くした条件で計算を行った。その結果、case1 と比べて先端部における水深が深くなったため、遡上速度が 0.2m/s 程度増大した。また、実際には第 1 波だけではここまで大幅に削れていない可能性は高いが、河床を 0.5m ではなく 2.5m とさらに深く掘り下げることで、遡上速度が 7.68m/s とかなり上昇した。なお、表 3.2 には、50cm 掘り下げた条件の結果を記している。

#### case7 河川流入条件の考慮

基本モデルにおいて、津波来襲前の河道内の水理条件は静水を仮定し、水位を静水位、流速をゼロとしていた。case7 では木戸川に上流境界で流量を与え、河川流の影響を考慮した。東北地方太平洋沖地震は初春に起きたもので降雨はそこまで多くなかったことと、木戸川が二級河川であることを考慮して、上流境界として約  $20\text{m}^3/\text{s}$  の流入条件を与えた。これにより津波来襲前の河口部の河道水深が約 50cm となった。結果として、case1 と case7 では遡上速度に顕著な違いは見られなかった。与えた河川流量が津波の規模に比べて小さく、第 1 波の引き波の影響のみが顕著に出たために第 2 波の到達時には差異が出なかったと考えられる。

#### case8 堤防の非越流

基本モデルで用いた地形データには河川堤防が含まれており、またその一部は破堤したものとしている。case8 では木戸川南側の河川堤防と海岸堤防の一部に対して、堤防を津波が全く越流しなかった場合を考え、河川に津波が集中した場合の計算を行った。この結果、case8

表 3.2 各ケースにおける遡上速度計算結果

case1	基本モデル	6.78m/s
case2	移流項の精度向上	6.93m/s
case3	底面摩擦の低減	6.93m/s
case4	入力波形の調整	8.01m/s
case5	入力波向の変更	6.43m/s
case6	河床の掘り下げ	6.93m/s
case7	河川流入条件の考慮	6.78m/s
case8	堤防の非越流	6.93m/s

では case1 よりも遡上速度が 0.2m/s 程度大きくなった。流況を見ると、基本モデルの計算では河川から平野部への水の流出は多いことが示唆されており、case8 ではこの流出が抑えられることで、河口部での遡上速度が大きくなったと考えられる。

遡上速度の計算結果は表 3.2 にまとめている。これらのケースは、浸水状況を大きく変えた case8 を除いて、浸水域や浸水高に関して case1 とほぼ同等の結果となったことを記しておく。

図 3.5 は各ケースの計算結果とビデオ解析の結果をまとめたものであり、横軸は時間、縦軸は河川座標  $X$  上の津波先端部の位置を示しており、このグラフの傾きが遡上速度を意味している。各種パラメータを調整することで僅かに遡上速度が向上するものの、いずれのケースでもビデオ映像から得られた河川内の遡上速度を再現することはできなかった。

ところで、図 3.6 は木戸川南部の低平地部において、同様のプロットを行ったグラフである。ビデオ解析による遡上速度が  $X = 160$  付近で大きく落ちているが、これは海岸堤防により速度が落ちているためである。堤防越流後に大きく落ちた遡上速度は、各ケースとよく符合していることもわかる。すなわち、遡上速度の過小評価は、海洋部および河川部の津波波速の過小評価であると考えられる。

次に、比較的遡上速度の向上に寄与したケースを組み合わせ、再現性の向上を試みた。case2,6,8 と同等の条件を組み合わせ、さらに case4 でのピーク水位を基本モデルの 2 倍である 8.8m とし、同時に波峰以降の水位を 70% とし与えたケースを case9 とする。



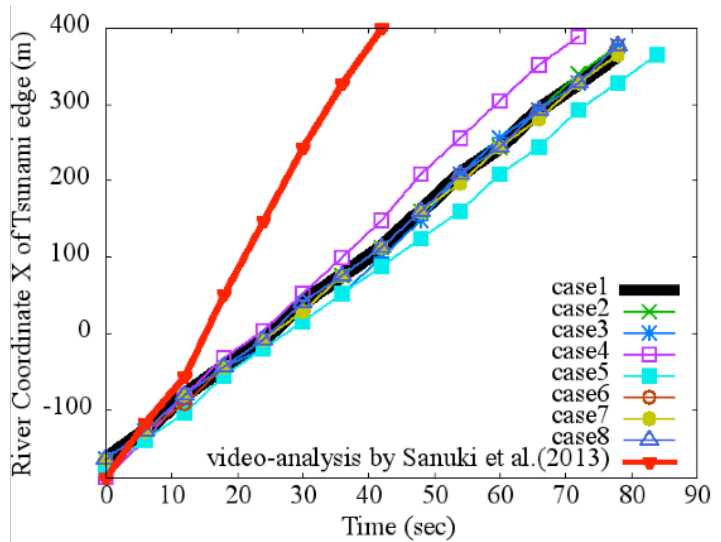


図 3.5 木戸川河道内における津波先端線の時間推移

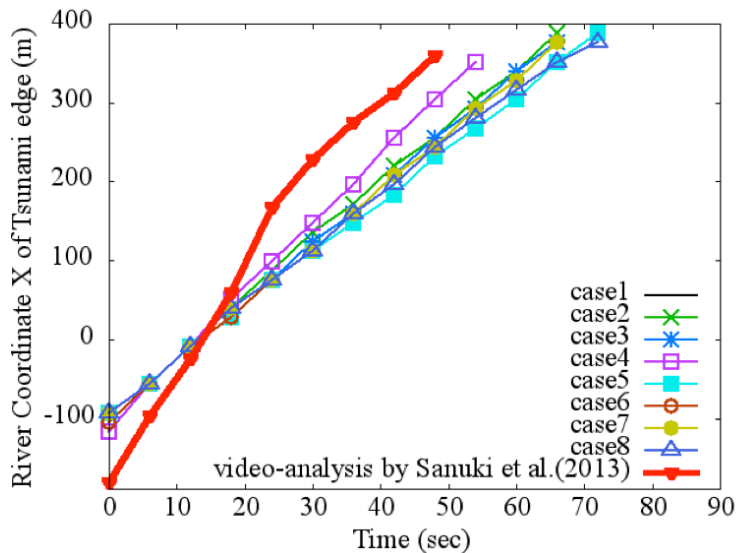


図 3.6 木戸川南部の低平地における津波先端線の時間推移

表 3.3 にて以上の条件を与えた計算結果の浸水高を、現地調査結果、基本モデル (case1), case4 の 3 つの浸水高と比較した。また、測線上の津波先端線の時間推移の比較として、現地調査結果, case1, case9 をまとめて図 3.7 に示す。河口部での浸水高が観測値に近いこと、図 3.7 の 0 秒から 12 秒までの津波先端線の推移が映像解析結果とほぼ一致していることから、特に沿岸から河口付近での波高や遡上速度に強く影響を与える入射波形の増幅率に関しては妥当であり、波峰の増幅が沿岸部での津波の速度に大きく寄与していると考えられる。さらに case4 の傾向と比較すると、堤防

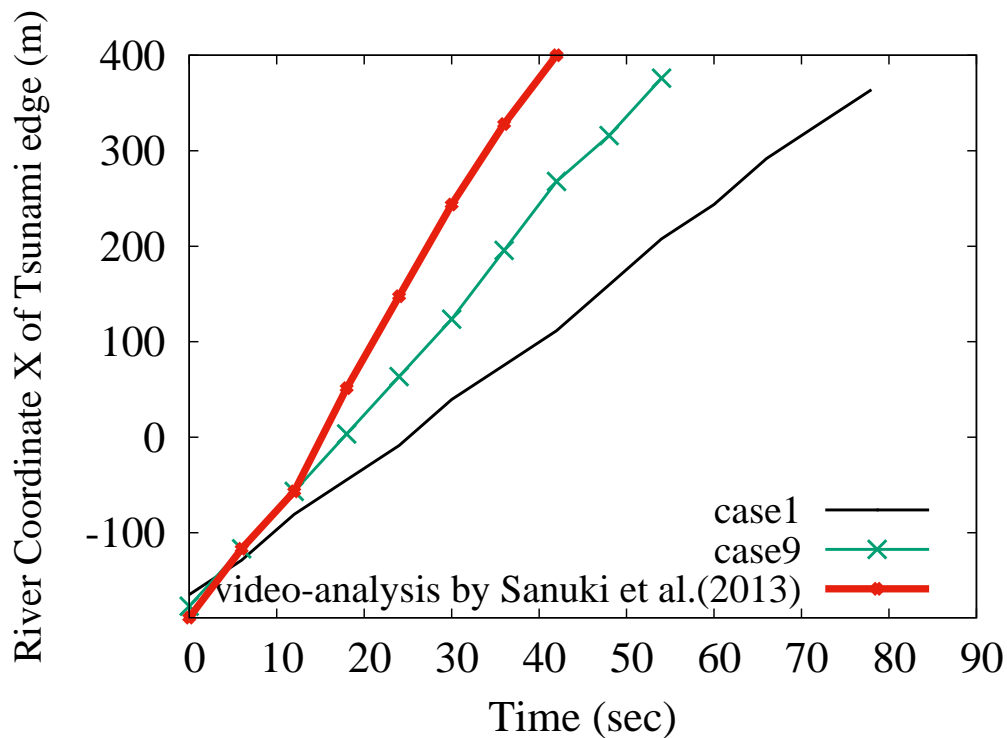


図 3.7 津波先端線の比較 (case1, case9, ビデオ解析)

表 3.3 図 3.4 の各地点における浸水高

地点	現地調査	case1	case4	case9
A	19.7m	10.4m	11.4m	13.7m
B	8.4m	7.6m	9.3m	8.8m
C	6.3m	6.5m	7.0m	7.9m
D	7.9m	7.4m	6.9m	9.1m
E	5.9m	6.9m	7.2m	9.0m
F	6.0m	7.1m	6.9m	8.0m
G	6.7m	7.3m	7.1m	6.9m

の非越流条件を適用したために地点 D, E での浸水高が特に過大となっていることが示唆される。ただし全体的に内陸部での各地点での浸水高がほぼ過大評価になっており、波形のより詳細な調整が必要である。また図 3.7 より、河川内部では津波は速度を上げながら遡上することが示唆されているが、今回の計算ではこの現象の再現には至らず、遡上速度は約 10m/s と過小評価となった。

### 3.3 非線形項の離散化手法の違いが遡上速度に与える影響

ここまでは各種パラメータを主眼に置いてきたが、ここからは数値解析手法による結果の違いを検討する。

#### 3.3.1 検討した数値解析手法

本研究では基本的な手法を取り上げた。この節ではまず、以下の線型移流方程式を考える。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = u_t + cu_x = 0 \quad (3.3.1)$$

この節では、 $u$  はある物理量を表すとする。 $c$  は速度、 $\nu = c\Delta t/\Delta x$  はクーラン数である。検討した手法で、この式の時間発展解を示す。

- 中心差分法

FTCS(Forward in Time and Central Difference in Space) 法は、時間に前進差分、空間に中心差分を用いる手法である。

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{1}{2}\nu(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) \quad (3.3.2)$$

- 1次精度風上差分法

1次精度風上差分法では、時間に前進差分、空間には移流速度  $c$  に対して風上差分を取る手法である。

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\nu}{2}(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) + \frac{|\nu|}{2}(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) \quad (3.3.3)$$

- リープフロッグ法

Leapfrog 法は、時空間共に中心差分を取る手法である。

$$u_i^{n+1} = u_i^{n-1} - \nu(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) \quad (3.3.4)$$

- QUICKEST 法

QUICKEST(QUICK with Estimated Streaming Terms) 法は 4 点をラグランジュ補間して高精度な差分を施した QUICK 法に，さらに時間項まで含めて離散化したものである．なお，ここでは煩雑になるため， $c$  が正の場合のみ示す．

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\nu}{6}(2u_{i+1}^n + 3u_i^n - 6u_{i-1}^n + u_{i-2}^n) + \frac{\nu^2}{2}(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) - \frac{\nu^3}{6}(u_{i+1}^n - 3u_i^n + 3u_{i-1}^n - u_{i-2}^n) \quad (3.3.5)$$

- MacCormack 法

MacCormack 法は予測子修正子法の一つであり，航空分野で衝撃波捕捉法として有名な手法である．予測段階と修正段階を用いて時間発展させる．

$$\bar{u}_i = u_i^n - \nu(u_i^n - u_{i-1}^n) \quad (3.3.6)$$

$$u_i^{n+1} = \frac{1}{2}(u_i^n + \bar{u}_i) - \frac{\nu}{2}(\bar{u}_{i+1} - \bar{u}_i) \quad (3.3.7)$$

- TVD-MacCormack 法

TVD-MacCormack 法は MacCormack 法の修正段階に人工的な数値粘性項を付加したものとなる．今回は TVD(Total Variation Diminishing) スキームとして Causon モデルを用いる．

$$TVD_i = \{G^+(r_i^+) + G^-(r_{i+1}^-)\}\Delta U_{i+1/2} - \{G^+(r_{i-1}^+) + G^-(r_i^-)\}\Delta U_{i-1/2} \quad (3.3.8)$$

$$\Delta U_{i+1/2} = u_{i+1} - u_i, \quad (3.3.9)$$

$$r_i^+ = \frac{1}{r_i^-} = \frac{\Delta U_{i-1/2}}{\Delta U_{i+1/2}}, \quad (3.3.10)$$

$$G^\pm(r_i^\pm) = 0.5|\nu|(1 - |\nu|)\{1 - \phi(r_i^\pm)\}, \quad (3.3.11)$$

$$\nu = \frac{c\Delta t}{\Delta x}, \quad (3.3.12)$$

$$\phi(r) = \begin{cases} \min(2r, 1) & (r > 0) \\ 0 & (r \leq 0) \end{cases} \quad (3.3.13)$$

- CIP 法

CIP(Constrained Interpolation Profile) 法は矢部ら [47] により提案された，セミラグランジュ法の一つで，移流項と非移流項を分離して解く．この手法では，関数値だけでなく微分値も移流させることで良い計算精度を得る．解説に紙面が必要となるが，以降あまり深入りをしないため，本論文内では式は示さない．参考書籍 [34] をご参照願いたい．

### 3.3.2 非粘性バーガース方程式への適用

ここでは 1 次元非線形移流方程式に複数の離散化手法を適用して，前節の手法の非線形問題への適用性を把握する．前節との違いは， $u$  の空間微分の係数が  $c$  ではなく  $u$  になっていることである．

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = u_t + uu_x = 0 \quad (3.3.14)$$

この方程式は非粘性バーガース方程式と呼ばれる．上記の形は微分形あるいは非保存形と呼ばれる定式化である．

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} u^2 \right) = 0 \quad (3.3.15)$$

この形が積分形あるいは保存形と呼ばれる定式化である．今， $\Delta x = 0.05[\text{m}]$ ,  $\Delta t = 0.01[\text{s}]$  を与える．また  $u(t, x)$  に対して以下の初期条件を与える．

$$u(0, x) = \begin{cases} 1 & (x < 1.5) \\ 0 & (x \geq 1.5) \end{cases} \quad (3.3.16)$$

この問題の正しい弱解は，衝撃波が  $1/2$  の速度で右へ移動する，すなわち  $x = 1/2t$  で表されるものである．衝撃波の右側では  $u = 0$ ，衝撃波の左側では  $u = 1$  となるのが正解である．なお，弱解とは，流れの滑らかな領域で微分形を満足し，それ以外の領域を含めて至る所で積分形を満足している解のことを言う．非線形問題の場合，弱解は 1 つとはならないが，物理的に適合する解は 1 つ存在する．この初期条件で，各数値計算法により得られた結果と理論解を比較する (図 3.8)．

得られた結果を図 3.8 にまとめる．横軸は  $x$  座標を，縦軸は物理量  $u$  を表している．これを見る

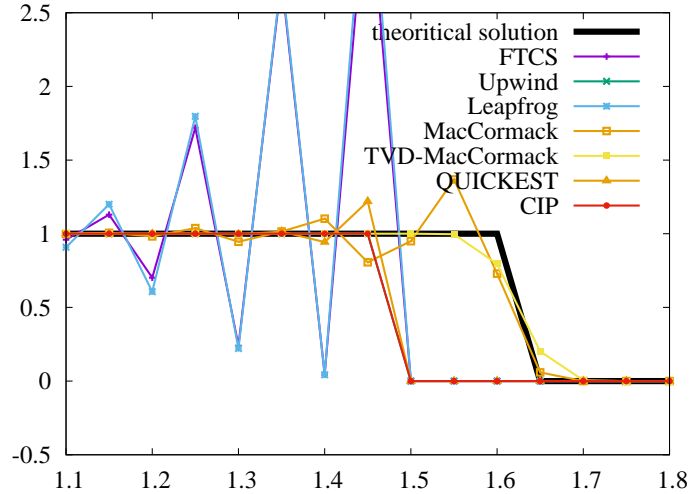


図 3.8 非粘性バーガーズ方程式の計算結果の違い

と、非保存形による離散化では不連続面が初期の位置から動いていないのに対し、保存形による離散化では、理論解と同様に非連続面が伝播する現象を妥当に再現できている。これは、不連続面後方の物理量が 0 となっているため、物理量を使って移流させる非保存形式の離散化表現では、元々が 0 であった領域には物理量が進んでいかなないために生じる。保存形式は物理量の保存則を含んでいるため、不連続面前後の物理量の平均の速度で移流する、物理的に正しい弱解を捉えることができる。なお、不連続面の付近では、FTCS 法、Leapfrog 法では大きな振動誤差が生じており、特に不連続面を有する波形の伝播計算においては、これらの手法が適していないことを示している。

### 3.3.3 段波実験への適用

ここでは非線形長波方程式に基づき段波の伝播過程の再現し、3 つの異なる離散化手法による違いを検証する。1 次元の非線形長波方程式は以下である。

$$\frac{\partial D}{\partial t} + \frac{\partial M}{\partial x} = 0 \quad (3.3.17)$$

$$\frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\partial(UM)}{\partial x} + gD \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{gn^2}{D^{7/3}} M|M| = 0 \quad (3.3.18)$$

これを非保存形式で表せば，

$$\frac{\partial M}{\partial t} + U \frac{\partial M}{\partial x} + M \frac{\partial U}{\partial x} + gD \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{gn^2}{D^{7/3}} M |M| = 0 \quad (3.3.19)$$

である．変数を断面平均流速  $U$  となるようにこの式を変形すれば，連続の式を利用すれば，

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{gn^2}{D^{7/3}} U |UD| = 0 \quad (3.3.20)$$

となる．

ここで検討する段波は，非線形性と散逸性が運動の支配的要因で，波状段波は，さらに分散性がその一つに加わった現象である．松富 [32] はダムブレイクを利用した実験を行い，1次元水平床かつ段波下流側流速がゼロの場合の一般的な移動跳水の発生条件を調べた．松富の実験は移動跳水の発生条件（波状段波非発生条件）を調査したものであり，本研究の意図とは少し異なるが，多くのダムブレイク実験のデータが残されているため松富の実験を妥当性検証に採用した．移動跳水発生条件の詳細は元論文に譲り，ここでは再現計算に関わる実験設定を説明する．

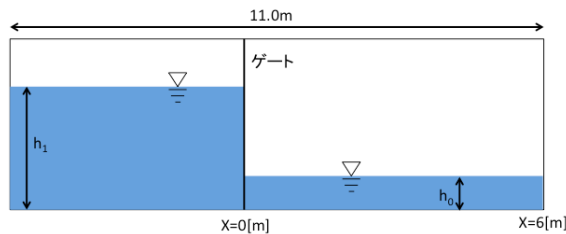


図 3.9 松富の実験装置

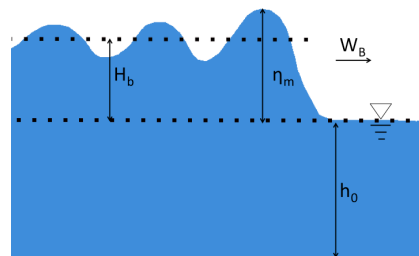


図 3.10 記号の定義

実験装置は図 3.9 で示されている．高さ 0.5m，幅 0.3m，長さ 11.0m の水平に設置された鋼製の矩形水路に，手動の引き上げ式ゲートを設置し，ダムブレイクの現象を再現する．実験は  $h_0$  を 0.05m と 0.06m の 2 種類，初期ゲート上流側水深  $h_1$  を 0.10m から 0.17m まで 0.5cm ずつ変化させて行われた．測定は波高計による段波の時間波形  $\eta(t)$  とカメラによる空間波形  $\eta(x)$  である．波高計の位置は，ゲートの位置を  $X = 0[m]$  とすると  $X = 5[m]$  に設置された．それぞれのケースの計算条件を表 3.4 にまとめた．

表 3.4 実験条件と結果 (松富 [32] より作成)

Case	$h_0$ [cm]	$h_1$ [cm]	$H_b$ [cm]	$\eta_m$ [cm]
1	5.0	10.0	2.35	3.13
2	5.0	10.5	2.50	3.20
3	5.0	11.0	2.76	3.23
4	5.0	11.5	2.94	3.26
5	5.0	12.0	3.10	3.40
6	5.0	12.5	3.20	3.40
7	5.0	13.0	3.47	3.60
8	5.0	13.5	3.62	3.69
9	5.0	14.0	3.89	3.78
10	5.0	14.5	4.07	3.99
11	6.0	12.0	2.88	3.89
12	6.0	12.5	2.99	3.89
13	6.0	13.0	3.20	3.81
14	6.0	13.5	3.40	3.94
15	6.0	14.0	3.57	3.95
16	6.0	14.5	3.76	4.18
17	6.0	15.0	3.90	4.31
18	6.0	15.5	4.06	4.36
19	6.0	16.0	4.31	4.53
20	6.0	16.5	4.45	4.59
21	6.0	17.0	4.52	4.79

本研究では、この実験 21 ケースの再現計算を、以下の 6 種類の数値計算手法により行った。

- 特性曲線を利用した CIP 法 [34] (式 (3.3.20) を使用)
- 非保存形で離散化した 1 次精度風上差分法 (式 (3.3.19) を使用)
- QUICKEST 法 (式 (3.3.19) を使用)
- 保存形で離散化した 1 次精度風上差分法 [46] (式 (3.3.18) を使用)
- MacCormack 法 (式 (3.3.18) を使用)
- TVD-MacCormack 法 (式 (3.3.18) を使用)

いずれのケースでも同様の傾向を示したので、ここでは松富のケース 20 ( $h_0 = 6.0$ [cm]),



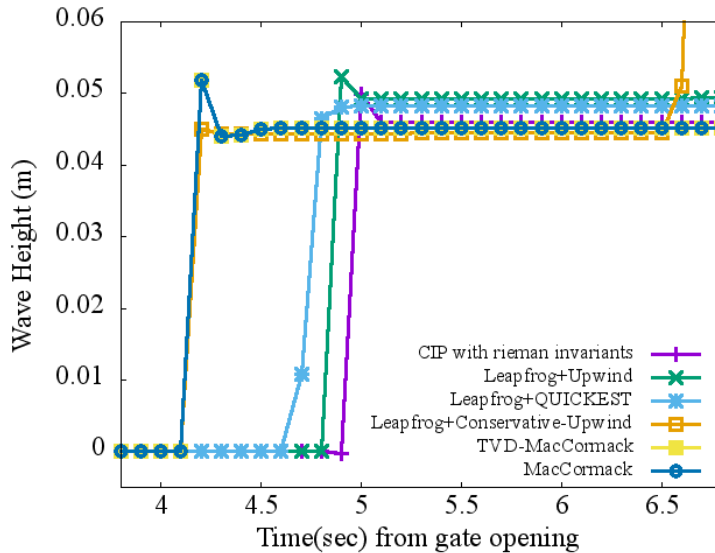


図 3.11 段波形成実験の再現計算での観測点時間波形

$h_1 = 16.5[\text{cm}]$ ) の計算結果を図 3.11 に示す．MacCormack 法と TVD-MacCormack 法の結果は完全に一致したため，ここでは (TVD-)MacCormack 法としてまとめて表記する．波形の立ち上がりの時刻と，収束する段波波高が異なることがわかる．松富によれば，このケース 20 における段波波高  $H_b$  は  $4.45\text{cm}$  であった．図 3.11 から，保存形での Leapfrog 法，(TVD-)MacCormack 法および CIP 法による計算結果は段波波高をおよそ正しく捉えているのに対して，非保存形での Leapfrog 法による計算結果は段波波高を過大評価していることがわかる．保存形での波形について，Leapfrog 法と (TVD-)MacCormack 法の解は異なっており，前者はあまりオーバーシュートしていない．これは 1 次風上差分法により生じた数値拡散の影響であると考えられる．また，保存形の Leapfrog 法では  $t = 6.5$  から波高が急激に上昇しているが，これは段波が実験装置右端に達して反射した影響である．反射波の速度に，Leapfrog 法と (TVD-)MacCormack 法では差異があるようであるが，この実験結果からはどちらが正しいのかは検証できない．非保存形での波形について，QUICKEST 法を用いた場合は 1 次風上差分法を用いた場合よりも段波伝播速度が少し早いことがわかる．

次に段波先端の到達時刻に関してであるが，これは松富の論文には数値的な記載がない．しかし段波先端移動速度の実験結果と Stoker の理論 [45] により求めた移動速度とよく合致していたと

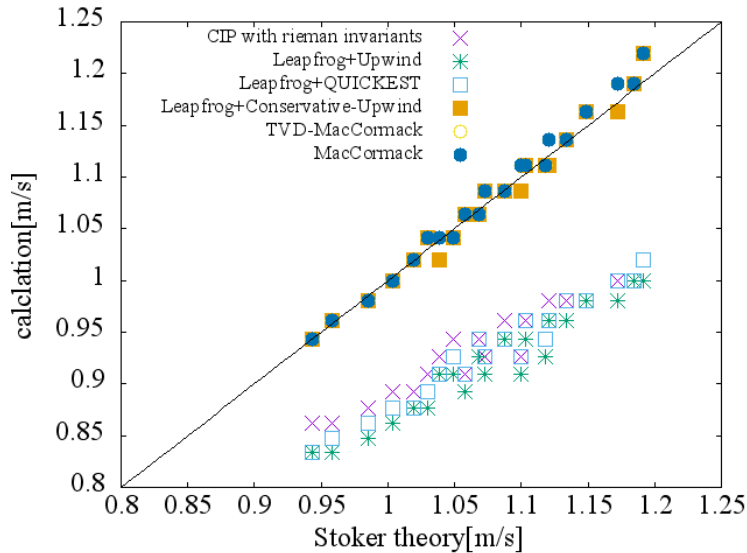


図 3.12 段波先端速度の計算値と理論値の比較 ( $H_b$  を使用)

記載されているため，ここでは Stoker の理論値と比較する．Stoker は段波の基本的な関係式を整備している．段波が正の方向に進んでいる場合，段波上流側の全水深，断面平均流速をそれぞれ  $d_1, u_1$ ，下流側のそれらを  $d_2, u_2$  としたとき，質量と運動量の輸送方程式から，

$$W_B = u_1 + \sqrt{\frac{gd_2}{2d_1}(d_1 + d_2)} = u_2 + \sqrt{\frac{gd_1}{2d_2}(d_1 + d_2)} \quad (3.3.21)$$

となる．ただし  $W_B$  は段波の伝播速度である．ここでは各ケースにおいて表 3.4 の値と  $u_2 = 0$  を用いて  $W_B$  を算出した．

図 3.12, 3.13 のグラフは横軸が Stoker 理論に松富の実験結果を代入して得られた段波先端速度を，縦軸には計算結果から得られた段波先端速度をとっており，図内に示した黒線の近傍にプロットしてあるほど，実験値に近い計算結果が得られたことを表す．黒線より下側にプロットしてあれば，計算で得られた段波速度が理論値よりも遅いことを意味する．図 3.12 は  $d_1$  の算出に  $H_b$  を，図 3.13 は  $d_1$  の算出に  $\eta_m$  を用いている．これを見ると，保存形と非保存形で傾向が異なることがわかる．どちらの図においても，CIP 法および移流項を非保存形で評価した Leapfrog 法は速度を過小評価している一方で，保存形解法は理論値に比較的よく一致している．

以上より，非保存形による評価では，段波波高と段波速度が実験結果と異なるという結果が明らか

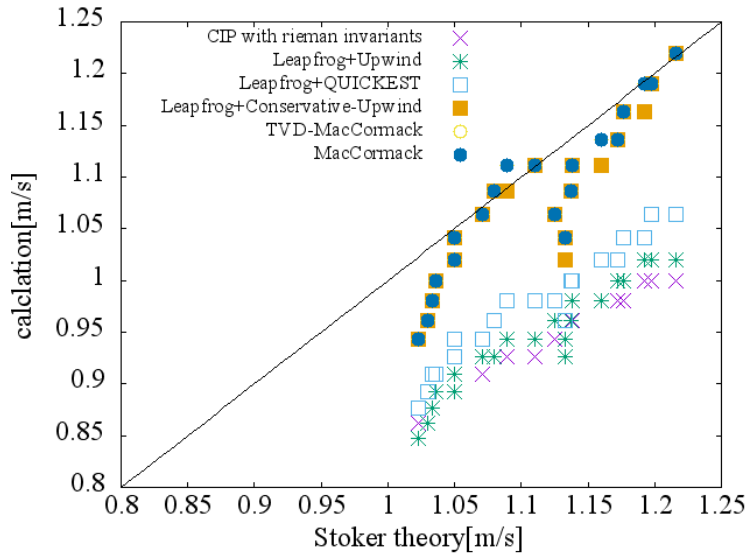


図 3.13 段波先端速度の計算値と理論値の比較 ( $\eta_m$  を使用)

かになった．非線形長波式の移流項は非粘性バーガス方程式と同様の形を取っているため，前節の議論を踏まえて考えると，非保存形では移流項を正しく評価出来ていない可能性が高い．そのため，非線形性の影響が大きい段波問題において，段波速度を過小評価し，実験と異なる解が得られたと考えられる．

なお，式形や図 3.11 から明らかな通り，実験に見られたような波形の分散は非線形長波モデルでは再現することはできず，段波到達後すぐに段波波高は一定値となった．

理論式は上流側，下流側でそれぞれ  $d_1, u_1, d_2, u_2$  が均一な流れを想定しているため移動跳水の条件と合致しているため，非線形長波式を正しく解けばよく一致することは予測できる．しかし， $\eta_m$  の値が  $H_b$  に比べて大きい場合は波状段波が生じ（詳細は松富 [32] に記載されている），理論値から離れてしまうと考えられることは留意する必要がある．

### 3.3.4 1次元実地スケール計算への適用

ここでは，先の木戸川のケースに対して，保存形と非保存形の離散化手法が与える影響を確認する．なお，3.2 節の感度分析は非保存形で行ったものである．

本節では，離散化手法の違いをより明確に見るため，3.2 節での河川座標  $X$  を元に 1 次元の地形モデルを作成した．その他の計算条件は，3.2 節 case4 と同一のものとなっている．適用スキーム

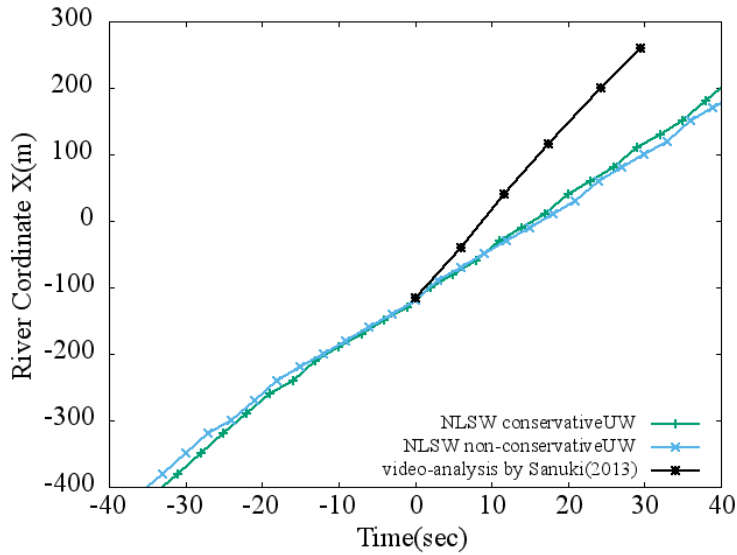


図 3.14 1次元モデルによる津波先端線の推移の比較

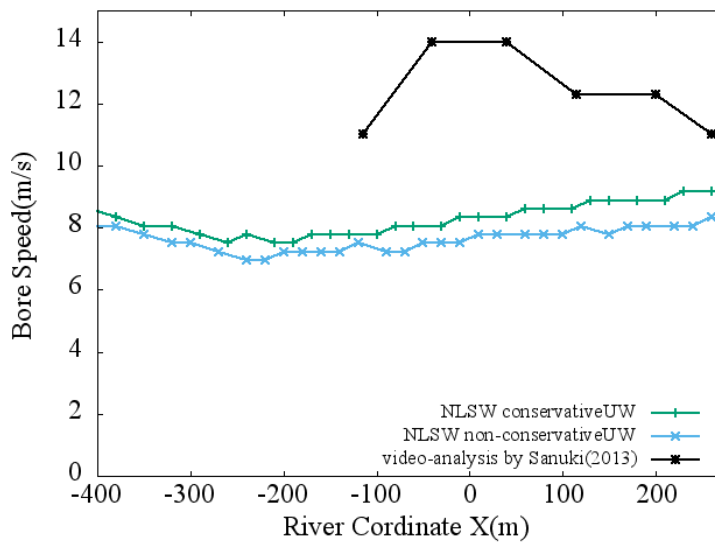


図 3.15 1次元モデルによる津波先端線の移動速度の比較

は、Leapfrog 陽解法 +1 次精度風上差分法（非保存形）および Leapfrog 陽解法 +1 次精度風上差分法（保存形）の 2 つである。これらも、移流項の離散化手法以外は、全く同一のものである。

計算結果および佐貫ら [15] による映像解析における津波先端線の時間推移を図 3.14 に示す。縦軸が津波先端線の位置、横軸が時間を表しており、遡上速度はこのグラフの傾きと一致する。佐貫らの映像解析結果のある  $X = -115$  でそれぞれのグラフが  $t = 0$  となるように調整している。津波先端線の位置は、流速の向きを参照して決定した。図 3.14 から、河口域への津波の到達する際

の速度は、風上差分法を保存形式にしたもの（緑線）の方が、非保存形式にしたもの（青線）よりも速いことがわかる。特に  $-200 < X < 0$  の区間では二つのグラフがほぼ重なっているのに対して、それ以降の河川内での速度低減が小さく、差が生じている。

また、遡上速度を縦軸に、河川座標を横軸にとったものが図 3.15 である。全体的に保存形の計算結果が非保存形のものよりも高い速度を保持しており、最終的には 15% 程度の差が生じている。これらの結果は段波形成実験の再現計算と同様の傾向にあり、移流項の差分スキームが段波の伝播速度に有意な影響を及ぼすことが確認された。

### 3.4 本章のまとめ

本章では様々な計算条件が河川津波の遡上速度の解析結果に与える影響を調査した。非線形長波理論では浸水域や浸水高、平野部での遡上速度をよく再現できる一方で、河道内および河口付近の沿岸部において遡上速度を過小評価することが確かめられた。津波の河川遡上について、河口部の波形や波高が津波の遡上速度に強く影響を与える一方で、非線形項の離散化手法を非保存形から保存形へと変更することでも遡上速度は大きく改善したが、ビデオ解析により得られた遡上速度を再現することはできなかった。

現段階よりもさらに入力波形を調整すれば遡上速度を合わせることはできるだろうが、これ以上の調整はこのケースのみのパラメータフィッティングとなり、一般性を持ち得ないと考えられる。また、本章の検証は河道内および河口付近の沿岸部特有のものであり、平野部に関しては非線形長波理論でも遡上速度をよく再現できていたことも考慮すると、河川遡上に関しては非線形長波理論では再現できない可能性が示唆されている。このことから、以下の 2 つが過小評価の原因であると推察した。

- 分裂の影響

非線形長波理論では無視している、鉛直加速度に起因する項は一般に分散項と呼ばれ、津波の海洋伝播の際の波の分裂を再現するのに必要な項である。この項が沿岸域での波形や波高に影響を与えた結果、遡上速度が小さく評価された。

- 木戸川上流から下流方向への流れ

本ケースでは本来、河川そのものの流れ、および小さめの第1波の引き波として、検討した津波の流れと逆方向の強い流れが河道内には存在する。非線形長波理論では水平流速の鉛直分布を無視しているが、これが本ケースでは無視できないほどの大きさを持っているため、遡上速度が小さく評価された。

次章からはこれらの解決を目指す。

## 4 多層型非線形分散波モデルの構築

前章での結論を踏まえ，本章では鉛直加速度による分散性を考慮し，また水平流速の鉛直分布が大きく変化することを前提としたモデルとして，多層型の非線形分散波モデルを構築する．なお，ここからは断面 2 次元で式展開を行う．

### 4.1 既存の非線形分散波モデル

ここでは複数の文献や研究 [22][10][11][17] を参考に，既存の非線形分散波モデルを確認する．

2.4 節において，重力加速度に比べて水粒子の鉛直方向加速度が無視できる程度に小さく， $\epsilon$  が十分に小さい弱非線形の下で非線形長波理論が導かれた．この条件を詳しく書けば  $\epsilon \approx \sigma^2$  かつ  $\sigma \ll O(1)$ ， $U_r \ll O(1)$  が仮定されていた．ここではその仮定が成立しない場合について検討する．鉛直方向加速度が無視できなければ波に分散性が生じ，波の振幅が水深に比べて無視できなければ非線形性が生じる．

津波計算において波の分散性を考慮した研究として Boussinesq[37] のものがまず挙げられ，その後の展開も含めて Boussinesq 型の非線形分散波方程式あるいは非線形分散波方程式と呼ばれる．その中で精度の検討や適用例が多いものとして，Peregrine の式 [43]，後藤の式 [10]，Madsen らの式 [40]（修正ブシネスク方程式），Nwogu の式 [42] などが挙げられる．

ここでは導出は省略するが，もっとも簡単な形の Boussinesq 方程式は，

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial M}{\partial x} = 0 \quad (4.1.1)$$

$$\frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\partial UM}{\partial x} + gD \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{h^2}{3} \frac{\partial^3 M}{\partial t \partial x^2} \quad (4.1.2)$$

と表される． $h[\text{m}]$  は静水深を表す．

ここからさらに水深の平面的な変化する場に適用できるようにすると Peregrine の式，

$$\frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\partial UM}{\partial x} + gD \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{Dh}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 hU}{\partial t \partial x} \right) - \frac{Dh^2}{6} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial t \partial x} \right) \quad (4.1.3)$$

となる．この式は波高水深比と相対水深が共に小さく，アーセル数が1のオーダーであると仮定されて展開され，第二次近似で得られた式である．アーセル数がさらに大きい条件に対しては，後藤の式，

$$\frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\partial UM}{\partial x} + gD \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{D^3}{3} F_1 + \frac{D^2}{2} F_2 \right] - \frac{\partial h}{\partial x} \left[ \frac{D^2}{2} F_1 + DF_2 \right] \quad (4.1.4)$$

$$F_1 = \frac{\partial^2 U}{\partial t \partial x} + U \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 \quad (4.1.5)$$

$$F_2 = \frac{\partial}{\partial t} \left( U \frac{\partial h}{\partial x} \right) + U \frac{\partial}{\partial x} \left( U \frac{\partial h}{\partial x} \right) \quad (4.1.6)$$

となる．

Boussinesq 方程式は長波の仮定であるため，深海条件では精度が落ちる．Madsen らは修正係数を導入して，深海域と浅海域の分散性を統一して表した．

$$\frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\partial UM}{\partial x} + gD \frac{\partial \eta}{\partial x} = \left( B + \frac{1}{3} \right) h^2 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 M}{\partial t \partial x} \right) + Bgh^3 \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} \quad (4.1.7)$$

ここで  $B$  は修正係数で， $B = 1/21$  とすれば  $h/L_0 = 0.6$  程度の深海域の波浪の伝播まで精度よく計算できるとされている．

また，代表流速として任意水深  $z_\alpha$  における水平流速  $U_\alpha$  を用いて式展開を行った Nwogu の式は次の通りである．

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial U_\alpha D}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \frac{z_\alpha^2}{2} - \frac{h^2}{6} \right) h \frac{\partial^2 U_\alpha}{\partial x^2} + \left( z_\alpha + \frac{h}{2} \right) h \frac{\partial^2 h U_\alpha}{\partial x^2} \right] = 0 \quad (4.1.8)$$

$$\frac{\partial U_\alpha}{\partial t} + U_\alpha \frac{\partial U_\alpha}{\partial x} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \left[ \frac{z_\alpha^2}{2} \frac{\partial^3 U_\alpha}{\partial t \partial x^2} + z_\alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( h \frac{\partial U_\alpha}{\partial t} \right) \right] = 0 \quad (4.1.9)$$

この式は  $U_\alpha = U$  とすれば，Peregrine の式と等しい．また，示した式系は  $U_r = O(1)$  のものである．

以上のように，非線形分散波理論はアーセル数のオーダーにより式系が異なるため，ケースによって適切な方程式を選択する必要がある．



## 4.2 既存の多層モデル

ここまでは断面平均流速を用いた全水深積分型のモデルを解説してきたが，水平流速の鉛直方向分布が大きく異なる場合は，3次元モデルで取り扱うのが理に叶っている．しかし計算時間の観点から，ナビエ=ストークス式をそのまま解く純粋な3次元モデルではなく，複数の層に区切って計算を行う多層型の準3次元モデルを考える．

津波の分野ではあまり多層モデルを用いた計算の例は多くないが，海洋循環や高潮の分野ではPOM[41] や ROMS[44] などのモデルが存在する．しかしながら，これらのモデルは静水圧近似がなされており，本章で対象としたい流れには不適切である．ここでは，強分散性非線形平面波浪場に対する多層モデルを提案した金山 [8] のモデルを紹介する．ここでも導出過程は省略する．

金山のモデルの基礎方程式は，静水深  $h$  を  $N$  層に分割し，鉛直方向に積分した連続式および渦なしの条件に基づいて変形されたオイラー方程式を各層の平均水平流速  $u_n$  を用いて表示したものである．ここでは  $z$  は静水面を 0 とし上向きにとった鉛直座標，添字  $s$  は水表面  $z = \eta$  での値であることを意味している．鉛直流速  $w$  を，層ごとに傾きを変える線形の鉛直分布を有すると仮定し，金山は最終的に次の式を導いた．

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x} (d_i u_i) + \frac{\partial \eta u_1}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{2} \eta (d_1 + \eta) \left\{ \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x} \left( d_i \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( u_b \frac{\partial h}{\partial x} \right) \right\} \right] + \frac{1}{6} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \eta (d_1^2 - \eta^2) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \right] = 0 \quad (4.2.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_n}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (u_s^2 + w_s^2) + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = & \frac{\partial}{\partial x} \left[ \eta \sum_{i=1}^N d_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial t \partial x} + \frac{1}{2} \left( \eta^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t \partial x} \right) + \eta \frac{\partial u_b}{\partial t} \frac{\partial h}{\partial x} \right] \\ & + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^N \frac{\partial}{\partial x} \left( d_i d_j \frac{\partial^2 u_j}{\partial t \partial x} \right) + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( d_i^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t \partial x} \right) \\ & - \sum_{i=n+1}^N \frac{1}{2} d_n \frac{\partial}{\partial x} \left( d_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial t \partial x} \right) - \sum_{i=n+1}^N \frac{\partial h_{n-1}}{\partial x} d_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial t \partial x} \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( d_n^2 \frac{\partial^2 u_n}{\partial t \partial x} \right) - \frac{1}{6} d_n^2 \frac{\partial^3 u_n}{\partial t \partial x^2} - \frac{1}{2} d_n \frac{\partial h_n}{\partial x} \frac{\partial^2 u_n}{\partial t \partial x} \\ & + \sum_{i=1}^{n-1} \left( d_i \frac{\partial u_b}{\partial t} \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} d_n \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u_b}{\partial t} \frac{\partial h}{\partial x} \right) - \frac{\partial h_{n-1}}{\partial x} \frac{\partial u_b}{\partial t} \frac{\partial h}{\partial x} \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

これらの式を，渦なしの条件を海底から  $z$  まで積分して得られた  $u(z)$  を用いて求めた  $u_s = u(\eta)$ ， $u_b = u(-h)$ ，水表面での運動学的条件から得られる  $w_s$  を用いて解くこととなる．

### 4.3 強非線形分散波の多層式の導出

本研究では遡上津波を対象としているため，アーセル数は大きくなる．また，水平流速の鉛直分布が大きく変化し，場所によっては渦も生じ得る流れを対象とするため，渦なしの条件をできる限り用いない導出が望ましい．また実用上，遡上計算においては質量保存の観点から，流速を変数とするよりも流量を変数とした方が解きやすい．そこで本研究では，アーセル数の大きい場合にも適用可能な仮定の下で，式を多層型に展開することとする．

本節より，変数を新たに定義し直す．非圧縮性流体の断面 2 次元運動を考え，静水面上に  $x$  軸、鉛直上向きに  $z$  軸，水平流速  $u$ ，鉛直流速  $w$ ，静水面からの水位  $\eta$ ，地盤高  $z_b$ ，圧力  $p$ ，静水深  $h$ ，全水深  $D$ ，重力加速度  $g$ ，密度  $\rho$  とする．添え字  $s$  は水表面  $z = \eta$  での，添え字  $b$  は底面  $z = z_b$  での値を表す． $l_0, h_0$  は水平および鉛直方向の特性長， $\eta_0$  は波高に相当し運動の大きさを表す特性長． $\epsilon = \eta_0/h_0$  は波高水深比， $\sigma = (h_0/l_0)^2$  は相対水深．そして運動を  $\epsilon \sim 1$ ， $\sigma^2 \ll 1$  と仮定する．水表面の層を第  $N_\eta$  層とし，最低層を第  $N_b$  層とする．総層数は  $NZ$  とする．第  $n$  層の層厚を  $d_n[\text{m}]$  とし，層下端の鉛直座標を  $z = z_n$  とし， $z = z_n$  における鉛直方向流速を  $w_n$  とする．また，第  $n$  層における線流量を  $M_n$  とする．第  $n$  層の層厚を  $d_n$  とすれば，第  $n$  層の断面平均流速  $u_n$  は  $u_n = M_n/d_n$  と表される．また，ここでは  $\nabla$  を水平方向の微分演算子  $\partial/\partial x$  とする．

#### 4.3.1 境界条件

支配方程式の導出に用いる境界条件は，底面と水面における運動学的境界条件である．水面  $S = \eta - z$  として，

$$\frac{DS}{Dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + u_s \frac{\partial S}{\partial x} + w_s \frac{\partial S}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u_s \frac{\partial \eta}{\partial x} - w_s = 0 \quad (4.3.1)$$

が成立する．これより，

$$w_s = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u_s \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (4.3.2)$$

となる．また，底面  $S_b = z - z_b$  として，

$$\frac{DS_b}{Dt} = \frac{\partial S_b}{\partial t} + u_b \frac{\partial S_b}{\partial x} + w_b \frac{\partial S_b}{\partial z} = 0 - u_b \frac{\partial z_b}{\partial x} + w_b = 0 \quad (4.3.3)$$

が成立する．これより，

$$w_b = u_b \frac{\partial z_b}{\partial x} \quad (4.3.4)$$

となる．

#### 4.3.2 連続の式

連続の式，

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (4.3.5)$$

を考える．水表面のある層の層厚に関して，時々刻々変化する  $d_{N_\eta} = \eta - z_{N_\eta}$  とする．また， $z_{N_{\eta-1}} = \eta$  である．この式を  $z_b$  から  $\eta$  まで積分すると，

$$\begin{aligned} w_s - w_b &= - \int_{z_b}^{\eta} \frac{\partial w}{\partial x} dz = - \nabla \int_{z_b}^{\eta} u dz + u_s \nabla \eta - u_b \nabla z_b \\ &= - \nabla \sum_{k=N_\eta}^{N_b} M_k + u_s \nabla \eta - w_b \end{aligned} \quad (4.3.6)$$

となる．すなわち連続の式は，

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \sum_{k=N_\eta}^{N_b} \nabla M_k = 0 \quad (4.3.7)$$

と表される．

#### 4.3.3 鉛直流速の分布の仮定

連続の式を  $z_n$  から第  $n$  層に含まれる  $z$  まで積分すると，以下の式が得られる．

$$w(z) - w_n = \int_{z_n}^z - \frac{\partial u}{\partial x} dz = - \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_n}^z u dz + u(z) \nabla z - u(z_n) \nabla z_n \quad (4.3.8)$$

ここで，断面内における水平方向流速の変化は十分小さいとすると，以下のようにまとめられる．

$$w(z) \approx w_n - (z - z_n) \nabla u_n = w_n - \xi \nabla M_n + \xi u_n \nabla d_n \quad (4.3.9)$$

ただし  $\xi = (z - z_n)/d_n$  である．この関係を用いれば，

$$w_n = w_b - \sum_{k=n+1}^{N_b} d_k \nabla u_k = u_b \nabla z_b - \sum_{k=n+1}^{N_b} (\nabla M_k - u_k \nabla d_k) \quad (4.3.10)$$

となることがわかる．

#### 4.3.4 運動方程式

ここでは基礎方程式をオイラー方程式とする．鉛直方向のオイラー方程式は，

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \quad (4.3.11)$$

であるから，ゲージ圧で考えて  $p(\eta) = 0$  とすれば，

$$\begin{aligned} \int_{\eta}^z -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} dz &= -\frac{p(z)}{\rho} \\ &= \int_{\eta}^z \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} + g \right) dz \end{aligned} \quad (4.3.12)$$

となることがわかる． $w$  の全微分項について，連続の式を用いれば，

$$\begin{aligned} \int_z^{\eta} \frac{Dw}{Dt} dz &= \int_z^{\eta} \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} dz \\ &= \int_z^{\eta} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uw) + \frac{\partial}{\partial z}(w^2) dz \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \int_z^{\eta} w dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_z^{\eta} u w dz - w_s \{ \eta_t + u_s \nabla \eta - w_s \} + w \{ z_t + u \nabla z - w \} \end{aligned} \quad (4.3.13)$$

となる．さらに水表面の運動学的境界条件により，

$$\int_z^{\eta} \frac{Dw}{Dt} dz = \frac{\partial}{\partial t} \int_z^{\eta} w dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_z^{\eta} u w dz + w(z_t + u z_x - w) \quad (4.3.14)$$

となる．この積分は層毎に変数が異なるため，

$$\int_z^{\eta} w dz = \sum_{j=N_{\eta}}^{n-1} \int_{z_j}^{z_{j-1}} w dz + \int_z^{z_{n-1}} w dz \quad (4.3.15)$$

のように分けて解く必要がある．

次に水平方向のオイラー方程式を考える．

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (4.3.16)$$

この式を  $z_n$  から  $z_{n-1}$  まで層内で鉛直積分したものが支配方程式となる．まず，左辺を層内で積分する．連続の式を用いれば，

$$\begin{aligned} & \int_{z_n}^{z_{n-1}} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} dz \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_n}^{z_{n-1}} u dz - u(z_{n-1}) \frac{\partial z_{n-1}}{\partial t} + u(z_n) \frac{\partial z_n}{\partial t} + \int_{z_n}^{z_{n-1}} \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uw}{\partial z} dz \\ &= \frac{\partial M_n}{\partial t} - u(z_{n-1}) \frac{\partial z_{n-1}}{\partial t} + u(z_n) \frac{\partial z_n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_n}^{z_{n-1}} u^2 dz \\ &\quad - u(z_{n-1})^2 \frac{\partial z_{n-1}}{\partial x} + u(z_n)^2 \frac{\partial z_n}{\partial x} + uw|_{z=z_{n-1}} - uw|_{z=z_n} \\ &\approx \frac{\partial M_n}{\partial t} - u(z_{n-1}) \frac{\partial z_{n-1}}{\partial t} + u(z_n) \frac{\partial z_n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (u_n M_n) \\ &\quad - u(z_{n-1})^2 \frac{\partial z_{n-1}}{\partial x} + u(z_n)^2 \frac{\partial z_n}{\partial x} + uw|_{z=z_{n-1}} - uw|_{z=z_n} \\ &= \frac{\partial M_n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (u_n M_n) - u(z_{n-1}) \left( \frac{\partial z_{n-1}}{\partial t} + u(z_{n-1}) \frac{\partial z_{n-1}}{\partial x} - w_{n-1} \right) \\ &\quad + u(z_n) \left( \frac{\partial z_n}{\partial t} + u(z_n) \frac{\partial z_n}{\partial x} - w_n \right) \end{aligned} \quad (4.3.17)$$

式展開の途中で，

$$\int_{z_n}^{z_{n-1}} u' dz = 0 \quad (4.3.18)$$

の関係を用いた．

ここでスケーリングを導入する．Nwogu[42] と同様に， $x = l_0 X$ ， $z = h_0 Z$ ， $\eta = \eta_0 N$ ， $u_0 = \eta_0 c_0 U_0 / h_0$ ， $w = \eta_0 c_0 W / l_0$ ， $c_0 = \sqrt{gh_0}$ ， $h = h_0 H$ ， $t = l_0 T / c_0$ ， $p = \rho gh_0 P$ ， $M = \eta_0 c_0 M'$  とする．非回転の式が成立するとすると，

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial(u + u')}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x} \quad (4.3.19)$$

から，

$$u' = \frac{\eta_0}{h_0} c_0 \sigma U' \quad (4.3.20)$$

がわかる．ここで  $\sigma = h_0^2 / l_0^2$ ， $\epsilon = \eta_0 / h_0$  である．水平流速分布を認めつつも，変化量のオーダー

がこの関係式と大きく変わらないことを仮定して式をまとめ、 $O(\sigma^2)$  を無視した。なお、運動学的境界条件により、 $u(z_{n-1})$  で括られた項は水表面を含む層で、 $u(z_n)$  で括られた項は最底面層でそれぞれ 0 になる。さらに、 $u(z_n) = u(z_{n-1}) = u_n + O(\sigma)$  なので、

$$\begin{aligned}
L.H.S. &= \frac{\partial M_n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u_n M_n) - u_n \left( \frac{\partial z_{n-1}}{\partial t} + u_n \frac{\partial z_{n-1}}{\partial x} - w_{n-1} - \frac{\partial z_n}{\partial t} - u_n \frac{\partial z_n}{\partial x} + w_n \right) \\
&= d_n \frac{\partial u_n}{\partial t} + u_n \frac{\partial d_n}{\partial t} + \nabla(u_n^2 d_n) - u_n \frac{\partial d_n}{\partial t} - u_n^2 \nabla d_n - u_n d_n \nabla u_n \\
&= d_n \frac{\partial u_n}{\partial t} + u_n d_n \nabla u_n \\
&= \frac{\partial M_n}{\partial t} - u_n \frac{\partial d_n}{\partial t} + M_n \nabla u_n
\end{aligned} \tag{4.3.21}$$

となる。

次に、運動方程式の右辺、

$$\begin{aligned}
R.H.S. &= \int_{z_n}^{z_{n-1}} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} dz \\
&= -\frac{\partial}{\partial x} \int_{z_n}^{z_{n-1}} \frac{p}{\rho} dz + \frac{p(z_{n-1})}{\rho} \nabla z_{n-1} - \frac{p(z_n)}{\rho} \nabla z_n \\
&= -\nabla \int_{z_n}^{z_{n-1}} \left\{ g(\eta - z) + \frac{\partial}{\partial t} \int_z^\eta w dz + \nabla \int_z^\eta u w dz + w(z_t + u z_x - w) \right\} dz \\
&\quad + \nabla z_{n-1} \left\{ g(\eta - z_{n-1}) + \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_{n-1}}^\eta w dz + \nabla \int_{z_{n-1}}^\eta u w dz \right. \\
&\quad \left. + w_{n-1} \left( \frac{\partial z_{n-1}}{\partial t} + u(z_{n-1}) \nabla z_{n-1} - w_{n-1} \right) \right\} \\
&\quad - \nabla z_n \left\{ g(\eta - z_n) + \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_n}^\eta w dz + \nabla \int_{z_n}^\eta u w dz + w_n \left( \frac{\partial z_n}{\partial t} + u(z_n) \nabla z_n - w_n \right) \right\}
\end{aligned} \tag{4.3.22}$$

を考える。g の係る項を  $A_1$  として、

$$\begin{aligned}
A_1 &= -\nabla \int_{z_n}^{z_{n-1}} g(\eta - z) dz + \nabla z_{n-1} g(\eta - z_{n-1}) - \nabla z_n g(\eta - z_n) \\
&= \nabla \left[ \frac{1}{2} g(z - \eta) \right]_{z_n}^{z_{n-1}} + g(\eta - z_{n-1}) \nabla z_{n-1} - g(\eta - z_n) \nabla z_n \\
&= g(\eta - z_{n-1}) \nabla(\eta - z_{n-1}) - g(\eta - z_n) \nabla(\eta - z_n) + g(\eta - z_{n-1}) \nabla z_{n-1} - g(\eta - z_n) \nabla z_n \\
&= g(\eta - z_{n-1}) \nabla \eta - g(\eta - z_n) \nabla \eta \\
&= -g d_n \nabla \eta
\end{aligned} \tag{4.3.23}$$

次に，時間微分の係る項を  $A_2$  として，

$$\begin{aligned}
A_2 &= -\nabla \int_{z_n}^{z_{n-1}} \frac{\partial}{\partial t} \int_z^\eta w dz dz + \nabla_{z_{n-1}} \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_{n-1}}^\eta w dz - \nabla_{z_n} \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_n}^\eta w dz \\
&= -\nabla \left[ \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_n}^{z_{n-1}} \int_z^\eta w dz dz - \int_{z_{n-1}}^\eta w dz \frac{\partial z_{n-1}}{\partial t} + \int_{z_n}^\eta w dz \frac{\partial z_n}{\partial t} \right] \\
&\quad + \nabla_{z_{n-1}} \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_{n-1}}^\eta w dz - \nabla_{z_n} \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_n}^\eta w dz
\end{aligned} \tag{4.3.24}$$

となる．ここで，

$$W_n = \int_{z_n}^{z_{n-1}} w dz = d_n w_n - \frac{1}{2} d_n^2 \nabla u_n = d_n w_n - \frac{1}{2} d_n (\nabla M_n - u_n \nabla d_n) \tag{4.3.25}$$

とすれば，

$$\begin{aligned}
\int_z^\eta w dz &= \sum_{j=N_\eta}^{n-1} \int_{z_j}^{z_{j-1}} w dz + \int_z^{z_{n-1}} w dz \\
&= \sum_{j=N_\eta}^{n-1} W_j + \{d_n - (z - z_n)\} w_n - \frac{1}{2} \{d_n^2 - (z - z_n)^2\} \nabla u_n ,
\end{aligned} \tag{4.3.26}$$

$$\int_{z_n}^\eta w dz = \sum_{j=N_\eta}^n W_j , \tag{4.3.27}$$

$$\int_{z_n}^{z_{n-1}} \int_z^\eta w dz dz = d_n \sum_{j=N_\eta}^{n-1} W_j + \frac{1}{2} d_n^2 w_n - \frac{1}{3} d_n^3 \nabla u_n , \tag{4.3.28}$$

$$\int_{z_n}^{z_{n-1}} \int_{z_n}^\eta w dz dz = d_n \sum_{j=N_\eta}^n W_j \tag{4.3.29}$$

となるから ,

$$\begin{aligned}
A_2 &= -\nabla \frac{\partial}{\partial t} \left[ d_n \sum_{j=N_\eta}^{n-1} W_j + \frac{1}{2} d_n^2 w_n - \frac{1}{3} d_n^3 \nabla u_n \right] + \nabla \left[ \frac{\partial z_{n-1}}{\partial t} \sum_{j=N_\eta}^{n-1} W_j - \frac{\partial z_n}{\partial t} \sum_{j=N_\eta}^n W_j \right] \\
&\quad + \nabla z_{n-1} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \sum_{j=N_\eta}^{n-1} W_j \right] - \nabla z_n \frac{\partial}{\partial t} \left[ \sum_{j=N_\eta}^n W_j \right] \\
&= \sum_{j=N_\eta}^{n-1} \left[ -\nabla \frac{\partial}{\partial t} (d_n W_j) + \nabla \left( \frac{\partial z_{n-1}}{\partial t} W_j \right) - \nabla \left( \frac{\partial z_n}{\partial t} W_j \right) + \nabla z_{n-1} \frac{\partial W_j}{\partial t} - \nabla z_n \frac{\partial W_j}{\partial t} \right] \\
&\quad - \nabla \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{2} d_n^2 w_n - \frac{1}{3} d_n^3 \nabla u_n \right] + \nabla \left[ -\frac{\partial z_n}{\partial t} W_n \right] - \nabla z_n \frac{\partial W_n}{\partial t}
\end{aligned} \tag{4.3.30}$$

時空間の微分を展開してまとめると ,

$$A_2 = \sum_{j=N_\eta}^{n-1} \left[ -d_n \nabla \frac{\partial W_j}{\partial t} \right] - \nabla \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{2} d_n^2 w_n - \frac{1}{3} d_n^3 \nabla u_n \right] - \nabla \left( \frac{\partial z_n}{\partial t} W_n \right) - \nabla z_n \frac{\partial W_n}{\partial t} \tag{4.3.31}$$

となる . 同様に , 空間微分の係る項を  $A_3$  として ,

$$\begin{aligned}
A_3 &= -\nabla \int_{z_n}^{z_{n-1}} \nabla \int_z^\eta u w dz + \nabla z_{n-1} \nabla \int_{z_{n-1}}^\eta u w dz - \nabla z_n \nabla \int_{z_n}^\eta u w dz \\
&= -\nabla \left[ \nabla \int_{z_n}^{z_{n-1}} \int_z^\eta u w dz - \nabla z_{n-1} \int_{z_{n-1}}^\eta u w dz + \nabla z_n \int_{z_n}^\eta u w dz \right] \\
&\quad + \nabla z_{n-1} \nabla \int_{z_{n-1}}^\eta u w dz - \nabla z_n \nabla \int_{z_n}^\eta u w dz
\end{aligned} \tag{4.3.32}$$

となる . ここで ,  $O(\sigma^2)$  を無視すれば ,

$$\int_z^{z_{n-1}} u w dz \approx \{d_n - (z - z_n)\} u_n w_n - \frac{1}{2} \{d_n^2 - (z - z_n)^2\} u_n \nabla u_n , \tag{4.3.33}$$

$$\int_z^\eta u w dz \approx \sum_{j=N_\eta}^{n-1} u_j W_j + \{d_n - (z - z_n)\} u_n w_n - \frac{1}{2} \{d_n^2 - (z - z_n)^2\} u_n \nabla u_n , \tag{4.3.34}$$

$$\int_{z_n}^\eta u w dz = \sum_{j=N_\eta}^n u_j W_j \tag{4.3.35}$$



であるから，

$$\begin{aligned}
A_3 &= -\nabla^2 \left[ \sum_{j=N_\eta}^{n-1} d_n u_j W_j + \frac{1}{2} d_n^2 u_n w_n - \frac{1}{3} d_n^3 u_n \nabla u_n \right] + \nabla \left( \nabla z_{n-1} \sum_{j=N_\eta}^{n-1} u_j W_j \right) \\
&\quad - \nabla \left( \nabla z_n \sum_{j=N_\eta}^n u_j W_j \right) + \nabla z_{n-1} \nabla \left( \sum_{j=N_\eta}^{n-1} u_j W_j \right) - \nabla z_n \nabla \left( \sum_{j=N_\eta}^n u_j W_j \right) \\
&= -\nabla^2 \left[ \frac{1}{2} d_n^2 u_n w_n - \frac{1}{3} d_n^3 u_n \nabla u_n \right] - \nabla (\nabla z_n u_n W_n) - \nabla z_n \nabla (u_n W_n) \\
&\quad - \sum_{j=N_\eta}^{n-1} \left[ \nabla^2 (d_n u_j W_j) - \nabla (\nabla z_{n-1} u_j W_j) + \nabla (\nabla z_n u_j W_j) - \nabla z_{n-1} \nabla (u_j W_j) + \nabla z_n \nabla (u_j W_j) \right]
\end{aligned} \tag{4.3.36}$$

先ほどと同様に微分を展開してまとめれば，

$$A_3 = \sum_{j=N_\eta}^{n-1} \{-d_n \nabla^2 (u_j W_j)\} - \nabla^2 \left[ \frac{1}{2} d_n^2 u_n w_n - \frac{1}{3} d_n^3 u_n \nabla u_n \right] - \nabla (\nabla z_n u_n W_n) - \nabla z_n \nabla (u_n W_n) \tag{4.3.37}$$

となる．最後に， $w$  の係る項を  $A_4$  として，

$$\begin{aligned}
A_4 &= -\nabla \int_{z_n}^{z_{n-1}} w(z_t + u z_x - w) dz + \nabla z_{n-1} w_{n-1} \left( \frac{\partial z_{n-1}}{\partial t} + u(z_{n-1}) \nabla z_{n-1} - w_{n-1} \right) \\
&\quad - \nabla z_n w_n \left( \frac{\partial z_n}{\partial t} + u(z_n) \nabla z_n - w_n \right) \\
&= \nabla \int_{z_n}^{z_{n-1}} w^2 dz - \nabla \int_{z_n}^{z_{n-1}} w(z_t + u_n z_x) dz \\
&\quad + \nabla z_{n-1} w_{n-1} \left( \frac{\partial z_{n-1}}{\partial t} + u(z_{n-1}) \nabla z_{n-1} - w_{n-1} \right) - \nabla z_n w_n \left( \frac{\partial z_n}{\partial t} + u(z_n) \nabla z_n - w_n \right)
\end{aligned} \tag{4.3.38}$$

ここで，

$$\begin{aligned}
\nabla \int_{z_n}^{z_{n-1}} w^2 dz &= \nabla \int_{z_n}^{z_{n-1}} w_n^2 - 2(z - z_n) w_n \nabla u_n + (z - z_n)^2 (\nabla u_n)^2 dz \\
&= \nabla \left[ d_n w_n^2 - d_n^2 w_n \nabla u_n + \frac{1}{3} d_n^3 (\nabla u_n)^2 \right]
\end{aligned} \tag{4.3.39}$$

であり，また，

$$\int_{z_n}^{z_{n-1}} w(z_t + u_n z_x) dz \tag{4.3.40}$$

の中の  $z_t, z_x$  は座標を表しているため 0 とできるから ,

$$\begin{aligned}
A_4 = & \nabla \left[ d_n w_n^2 - d_n^2 w_n \nabla u_n + \frac{1}{3} d_n^3 (\nabla u_n)^2 \right] \\
& + \nabla z_{n-1} w_{n-1} \left( \frac{\partial z_{n-1}}{\partial t} + u(z_{n-1}) \nabla z_{n-1} - w_{n-1} \right) - \nabla z_n w_n \left( \frac{\partial z_n}{\partial t} + u(z_n) \nabla z_n - w_n \right)
\end{aligned} \tag{4.3.41}$$

となる .

以上をまとめると , 運動方程式は次のようになる .

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial M_n}{\partial t} - u_n \frac{\partial d_n}{\partial t} + M_n \nabla u_n + g d_n \nabla \eta \\
& = \sum_{j=N_\eta}^{n-1} \left[ -d_n \nabla \frac{\partial W_j}{\partial t} \right] - \nabla \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{2} d_n^2 w_n - \frac{1}{3} d_n^3 \nabla u_n \right] - \nabla \left( \frac{\partial z_n}{\partial t} W_n \right) - \nabla z_n \frac{\partial W_n}{\partial t} \\
& + \sum_{j=N_\eta}^{n-1} \left\{ -d_n \nabla^2 (u_j W_j) \right\} - \nabla^2 \left[ \frac{1}{2} d_n^2 u_n w_n - \frac{1}{3} d_n^3 u_n \nabla u_n \right] - \nabla (\nabla z_n u_n W_n) \\
& - \nabla z_n \nabla (u_n W_n) + \nabla \left[ d_n w_n^2 - d_n^2 w_n \nabla u_n + \frac{1}{3} d_n^3 (\nabla u_n)^2 \right] \\
& + \nabla z_{n-1} w_{n-1} \left( \frac{\partial z_{n-1}}{\partial t} + u(z_{n-1}) \nabla z_{n-1} - w_{n-1} \right) - \nabla z_n w_n \left( \frac{\partial z_n}{\partial t} + u(z_n) \nabla z_n - w_n \right)
\end{aligned} \tag{4.3.42}$$

#### 4.3.5 粘性項の導入

一般に水自体の粘性は小さく , 津波の計算の時には無視できるため , オイラー方程式からの導出でよかった . しかし , 砕波や乱流の影響を考慮する際 , 多くの先行研究が粘性項によるモデル化を行っている . たとえば乱流計算において LES , RANS いずれを用いる場合でも , 以下のような形で支配方程式はモデル化される .

$$\frac{D\bar{u}_i}{Dt} = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\bar{p}}{\rho} + \frac{2}{3} k \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\nu + \nu_t) \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right] \tag{4.3.43}$$

本研究でも層間の剪断応力を表現するために粘性項を用いるため , 粘性項を加えた場合の立式を行う必要がある . 式 (4.3.43) を用いて , これまでと同様に多層化を行う .  $z$  方向の式から ,

$$\frac{\bar{p}}{\rho} = \int_z^n \frac{Dw}{Dt} dz + g(\eta - z) + \frac{2}{3} \{k(\eta) - k(z)\} - \int_z^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\nu + \nu_t) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \tag{4.3.44}$$

追加された項について，

$$\int_z^\eta \frac{\partial}{\partial z} \left[ (\nu + \nu_t) \left( 2 \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] dz = \left[ (\nu + \nu_t) \left( 2 \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right]_z^\eta \quad (4.3.45)$$

ここで，

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} (w_n - (z - z_n) \nabla u_n) = -\nabla u_n \quad (4.3.46)$$

が成立する．最後の項については，

$$\begin{aligned} & \int_z^\eta \frac{\partial}{\partial x} \left[ (\nu + \nu_t) \left( 2 \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] dz \\ &= \nabla \int_z^\eta (\nu + \nu_t) \left( 2 \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) dz - (\nu + \nu_t) \left( -2 \nabla u_n + \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \nabla \eta \Big|_{z=\eta} \\ &\approx \nabla [(\nu + \nu_t) (w_s - w(z)) + u_s - u(z)] + \nabla^2 \left[ (\nu + \nu_t) \int_z^\eta w dz \right] - \nabla \{ (\nu + \nu_t) w_s \nabla \eta \} \\ &- (\nu + \nu_t) \left( -2 \nabla u_n + \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \nabla \eta \Big|_{z=\eta} \end{aligned} \quad (4.3.47)$$

となる．次に x 方向の運動方程式について，

$$\begin{aligned} \frac{Du}{Dt} &= -\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\bar{p}}{\rho} + \frac{2}{3}k \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[ (\nu + \nu_t) \left( 2 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} \left[ (\nu + \nu_t) \left( 2 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.3.48)$$

である．粘性項を層内積分する．

$$\int_{z_n}^{z_{n-1}} \frac{\partial}{\partial z} \left[ (\nu + \nu_t) \left( 2 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] dz = \left[ (\nu + \nu_t) \left( 2 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right]_{z_n}^{z_{n-1}} \quad (4.3.49)$$

$$\begin{aligned} & \int_{z_n}^{z_{n-1}} \frac{\partial}{\partial x} \left[ (\nu + \nu_t) \left( 2 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] dz \\ &= d_n \nabla \left( \left[ (\nu + \nu_t) \nabla \left( 2u_n + w_n - \frac{1}{2} \nabla M_n \right) \right] + (\nu + \nu_t) \{ u(z_{n-1}) - u(z_n) \} \right) \end{aligned} \quad (4.3.50)$$

$$\int_{z_n}^{z_{n-1}} -\frac{2}{3} \nabla k dz = -\frac{2}{3} d_n \nabla \int_0^1 k d\xi \quad (4.3.51)$$

となる .

先程まとめた  $z$  方向の運動方程式を  $p$  に代入し , それぞれ  $x$  微分した後層内積分の操作を行う .

$$-2d_n \nabla [(\nu + \nu_t)_\eta \nabla u_{N_\eta}] + (\nu + \nu_t)_\eta d_n \nabla^2 w_s \quad (4.3.52)$$

$$2d_n \nabla [(\nu + \nu_t) \nabla u_n] - (\nu + \nu_t) \nabla \{u(z_{n-1}) - u(z_n)\} - (\nu + \nu_t) d_n \nabla^2 \left( w_n - \frac{1}{2} \nabla M_n \right) \quad (4.3.53)$$

$$d_n \nabla^2 [(\nu + \nu_t)(2w_s - 2w_n + \nabla M_n + u_s - u_n)] \quad (4.3.54)$$

$$-\nabla^2 \left[ \sum_j \sum_k c_{dif}(\nu + \nu_t) d_n d_j \nabla^2 M_k \right] \quad (4.3.55)$$

$$-d_n \nabla^2 [(\nu + \nu_t)_{z=\eta} w_s \nabla \eta] \quad (4.3.56)$$

$$-d_n \nabla \left[ (\nu + \nu_t)(-2\nabla u_{N_\eta} + \frac{\partial w}{\partial x}_{z=\eta} \nabla \eta) \right] + \nabla [(\nu + \nu_t) \nabla \eta \{u(z_{n-1}) - u(z_n)\}] \quad (4.3.57)$$

以上の粘性項をまとめると ,

$$\begin{aligned} & + 3d_n \nabla \{(\nu + \nu_t) \nabla u_n\} - d_n \nabla \{(\nu + \nu_t)_\eta \nabla u_{N_\eta}\} \\ & + 3d_n \nabla^2 \{(\nu + \nu_t) w_s\} - d_n \nabla^2 \{(\nu + \nu_t)_\eta w_s \nabla \eta\} \\ & + d_n \nabla^2 \{(\nu + \nu_t)(-2w_n + \nabla M_n)\} - \nabla^2 \left\{ \sum_j \sum_k c_{dif}(\nu + \nu_t) d_n d_j \nabla^2 M_k \right\} \\ & - d_n \nabla \{(\nu + \nu_t)(-2\nabla u_n + \nabla w)_\eta \nabla \eta\} + \nabla \{(\nu + \nu_t) \nabla \eta (u(z_{n-1}) - u(z_n))\} \\ & + \left[ (\nu + \nu_t) \left( \nabla u + \frac{\partial u}{\partial z} + \nabla w \right) \right]_{z=z_{n-1}} - \left[ (\nu + \nu_t) \left( \nabla u + \frac{\partial u}{\partial z} + \nabla w \right) \right]_{z=z_n} \end{aligned} \quad (4.3.58)$$

となり , これを運動方程式の右辺に加えればよい . なお , 実際の計算時には ,

$$\nu_t \propto (gh_0)^{1/3} \eta_0^{4/3} \sigma^{1/6} \quad (4.3.59)$$

としてスケーリングを行い ( 平山ら [28] の碎波項より算出 ) ,  $O(\sigma^{3/2})$  以上となった項をこの中から無視し , 最終的に次の項を粘性項として運動方程式の右辺に加えた .

$$+3d_n \nabla \{(\nu + \nu_t) \nabla u_n\} - d_n \nabla \{(\nu + \nu_t)_\eta \nabla u_{N_\eta}\} \quad (4.3.60)$$

## 4.4 多層型非線形分散波モデルの数値解析

### 4.4.1 離散化のための方程式の変形

式 (4.3.42) が本研究で用いる多層型非線形分散波モデルの運動方程式であるが，この形では実際の計算上では安定しづらいため，さらに変形を進める．式 (4.3.10),(4.3.25) を代入してまとめると，式 (4.3.31) の右辺第 1 項と第 2 項は，

$$\begin{aligned} \sum_{j=N_\eta}^{n-1} \left[ -d_n \nabla \frac{\partial W_j}{\partial t} \right] &= \sum_{j=N_\eta}^{n-1} \left[ -d_n \nabla \frac{\partial}{\partial t} \left( d_j w_j - \frac{1}{2} d_j^2 \nabla u_j \right) \right] \\ &= \sum_{j=N_\eta}^{n-1} \left[ -d_n \nabla \frac{\partial}{\partial t} (d_j w_b) + d_n \nabla \frac{\partial}{\partial t} \left( \sum_{k=j+1}^{N_b} d_j d_k \nabla u_k + \frac{1}{2} d_j^2 \nabla u_j \right) \right] \end{aligned} \quad (4.4.1)$$

$$-\nabla \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{2} d_n^2 w_n - \frac{1}{3} d_n^3 \nabla u_n \right] = \nabla \frac{\partial}{\partial t} \left[ -\frac{1}{2} d_n^2 w_b + \sum_{k=n+1}^{N_b} \frac{1}{2} d_n^2 d_k \nabla u_k + \frac{1}{3} d_n^3 \nabla u_n \right] \quad (4.4.2)$$

となる．これらは，

$$\alpha = \begin{cases} 1 & (j < n) \\ 1/2 & (j = n) \end{cases}$$

$$\beta = \begin{cases} 1 & (j < n \wedge k > j) \\ 1/2 & ((j < n \wedge k = j) \vee (j = n \wedge k > j)) \\ 1/3 & (j = n \wedge k = j) \end{cases}$$

なる  $\alpha, \beta$  を導入すると， $j$  を  $N_\eta$  から  $n$  まで， $k$  を  $j$  から  $N_b$  までとしたループ構文を用いて， $d_n$  と  $d_j$  と  $d_k \nabla u_k$  と時空間の微分オペレータの積として統一的に表すことができる．ただし， $j < n$  の場合は  $d_n$  が微分オペレータの中に， $j > n$  の場合は  $d_n$  が微分オペレータの外にあるため，注意が必要である．

式 (4.3.37) の右辺第 1 項と第 2 項についても，

$$\begin{aligned} \sum_{j=N_\eta}^{n-1} \{ -d_n \nabla^2 (u_j W_j) \} &= \sum_{j=N_\eta}^{n-1} \left[ -d_n \nabla^2 \left( u_j d_j w_j - \frac{1}{2} u_j d_j^2 \nabla u_j \right) \right] \\ &= \sum_{j=N_\eta}^{n-1} \left[ -d_n \nabla^2 (-u_j d_j w_b) + d_n \nabla^2 \left( \sum_{k=j+1}^{N_b} u_j d_j d_k \nabla u_k + \frac{1}{2} u_j d_j^2 \nabla u_j \right) \right] \end{aligned} \quad (4.4.3)$$

$$-\nabla^2 \left[ \frac{1}{2} d_n^2 u_n w_n - \frac{1}{3} d_n^3 u_n \nabla u_n \right] = \nabla^2 \left[ -\frac{1}{2} d_n^2 u_n w_b + \sum_{k=n+1}^{N_b} \frac{1}{2} d_n^2 u_n d_k \nabla u_k + \frac{1}{3} d_n^3 u_n \nabla u_n \right] \quad (4.4.4)$$

となるため，同様の  $\alpha, \beta$  を用いて， $d_n$  と  $u_j d_j = M_j$  と  $d_k \nabla u_k$  と空間二階微分のオペレータの積として統一的に表せる．こちらも先ほどと同様に， $j = n$  の場合は  $d_n$  が微分オペレータの中に， $j < n$  の場合は  $d_n$  が微分オペレータの外にある．

式 (4.4.1)，(4.4.2) として示した時空間の微分項については，安定性のため陰的に解く必要がある．ここでは微分オペレータの位置を表記の都合上一度無視して，

$$\nabla \frac{\partial}{\partial t} (d_n d_j d_k \nabla u_k) \quad (4.4.5)$$

として考える．まず，運動方程式の変数は  $M_n$  で表しているため，陰的に処理するために次のように表す．

$$\nabla \frac{\partial}{\partial t} (d_n d_j d_k \nabla u_k) = \nabla \frac{\partial}{\partial t} \{d_n d_j (\nabla M_k - u_k \nabla d_k)\} \quad (4.4.6)$$

この形であれば右辺第 1 項については時間 1 階空間 2 階微分としての離散化を行えるが，それと同時に右辺第 2 項を陽的に処理すると，第 1 項とうまくバランスがとれず，計算が発散してしまうことがあった．右辺第 2 項についても，

$$-\nabla \frac{\partial}{\partial t} (d_n d_j u_k \nabla d_k) = -\nabla \frac{\partial}{\partial t} (d_n d_j \frac{M_k}{d_k} \nabla d_k) \quad (4.4.7)$$

のように表し，陰的に処理すると良い．

次に式 (4.3.41) について考える．まず右辺第 1 項について，これをそのまま差分化すると数値的に不安定となった．そこで次のように変形して計算した．

$$\begin{aligned} \nabla \left[ d_n w_n^2 - d_n^2 w_n \nabla u_n + \frac{1}{3} d_n^3 (\nabla u_n)^2 \right] &= \nabla \left[ d_n w_n (w_n - d_n \nabla u_n) + \frac{1}{3} d_n^3 \left( \frac{w_n - w_{n-1}}{d_n} \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{3} \nabla [d_n w_n^2 + d_n w_n w_{n-1} + d_n w_{n-1}^2] \end{aligned} \quad (4.4.8)$$

ここからさらに第 1,2 項について  $w_n$  を展開し,

$$\frac{1}{3}\nabla(d_n w_n^2 + d_n w_n w_{n-1}) = \frac{1}{3}\nabla\left[d_n w_n \left(2w_b - \sum_{k=n+1}^{N_b} 2d_k \nabla u_k - d_n \nabla u_n\right)\right] \quad (4.4.9)$$

とした．第 3 項については,

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}\nabla(d_n w_{n-1}^2) &= \frac{1}{3}\nabla d_n w_{n-1}^2 + \frac{2}{3}d_n w_{n-1} \nabla w_{n-1} \\ &= \frac{1}{3}\nabla d_n w_{n-1}^2 + \frac{2}{3}d_n w_{n-1} \nabla(w_n - d_n \nabla u_n) \\ &= \frac{1}{3}\nabla w_{n-1}^2 + \frac{2}{3}d_n w_{n-1} \nabla w_n - \frac{2}{3}d_n w_{n-1} \nabla(d_n \nabla u_n) \\ &= \frac{1}{3}\nabla d_n w_{n-1}^2 + \frac{2}{3}d_n w_{n-1} \nabla w_n - \frac{2}{3}d_n w_n \nabla(d_n \nabla u_n) + \frac{2}{3}d_n (d_n \nabla u_n) \nabla(d_n \nabla u_n) \end{aligned} \quad (4.4.10)$$

として,  $d_n \nabla u_n = \nabla M_n - u_n \nabla d_n$  の形で変数  $M_n$  を使って計算できるようにした．

$u(z_{n-1})$ ,  $u(z_n)$  については,  $u$  の分布を考慮する．この項に対してのみ渦なしの条件を適用できるとすると, 渦なしの条件式を底面から第  $n$  層に含まれる  $z$  まで積分することで次の式が得られる [8]．

$$\begin{aligned} u(z) &= u_n + \frac{1}{6} \{d_n^2 - 3(z - z_n)^2\} \nabla^2 u_n \\ &\quad + \frac{1}{2} \{d_n - 2(z - z_n)\} \left[ \sum_{k=n+1}^{N_b} \nabla(d_k \nabla u_k) - \nabla z_n \nabla u_n - \nabla w_b \right] \end{aligned} \quad (4.4.11)$$

第  $n$  層の上端の境界における水平流速を  $u_{0n}$ , 下端の境界における水平流速を  $u_{1n}$  と表せば, それぞれ上式に  $z_{n-1}$ ,  $z_n$  を代入することで次の式が得られる．

$$u_{0n} = u_n - \frac{1}{3}d_n^2 \nabla^2 u_n - \frac{1}{2}d_n \left[ \sum_{k=n+1}^{N_b} \nabla(d_k \nabla u_k) - \nabla z_n \nabla u_n - \nabla w_b \right] \quad (4.4.12)$$

$$u_{1n} = u_n + \frac{1}{6}d_n^2 \nabla^2 u_n + \frac{1}{2}d_n \left[ \sum_{k=n+1}^{N_b} \nabla(d_k \nabla u_k) - \nabla z_n \nabla u_n - \nabla w_b \right] \quad (4.4.13)$$

理論的には非回転状態であれば  $u_{0n+1} = u_{1n}$  は成立するが, 本研究の計算上では渦を許容しているためにこれらの値は一致しない．そこで本研究では  $u(z_n)$  は近似的に次のように与えた．

$$u(z_n) = \frac{1}{2}(u_{0n+1} + u_{1n}) \quad (4.4.14)$$

#### 4.4.2 多層モデルの離散式

多層型非線形分散波モデル（以後、簡単に多層モデルと呼ぶ）のシミュレータの開発にあたり、導出した運動方程式の離散化を行った． $i$  を空間位置を表す下付き添字， $t$  をタイムステップを表す上付き添字とする．3 章で検討した非線形長波式のスタッガードリーブフロッグ法と同様に、水位  $\eta_i^t$ ・水深  $D_i^t$ ・層厚  $d_{ni}^t$  と層流量  $M_{ni+1/2}^{t+1/2}$ ・水平流速  $u_{ni+1/2}^{t+1/2}$  を時空間共に互い違いの位置に配置した．また、層の境界に  $w_{ni}$  を定義した． $W_{ni}$  は層厚と同じ空間位置に定義した． $u_n = M_n/d_n$  の計算など、 $d_{ni+1/2} = (d_{ni+1} + d_{ni})/2$  も所々で必要となるため、実計算上ではこの値の配列も確保している．

層の切り方に関しては、あらかじめ層の数を指定し、各座標について層の厚さが均等になるようにした．すなわち、

$$d_{ni} = D_i/NZ \quad (4.4.15)$$

が成立している．この前提の下では、運動方程式 (4.3.42) の左辺第 2 項は次のように表される．

$$-u_n \frac{\partial d_n}{\partial t} = -\frac{u_n}{NZ} \frac{\partial(\eta - z_b)}{\partial t} = \frac{u_n}{NZ} \sum_{j=N_\eta}^{N_b} \nabla M_j \quad (4.4.16)$$

この項は、 $u_n$  の正負による判断での 1 次精度風上差分法を用いて計算した．左辺第 3 項である移流項も同様に 1 次精度風上差分法を用いて評価した．

式 (4.4.3)、(4.4.4) をまとめて表記すると、表記の都合上微分オペレータの位置を無視すると、

$$\nabla^2(d_n M_j d_k \nabla u_k) \quad (4.4.17)$$

という項が現れる．この項の空間 2 階微分を 2 次精度で離散化すると、

$$\frac{(d_n M_j d_k \nabla u_k)_{i+3/2} - 2(d_n M_j d_k \nabla u_k)_{i+1/2} + (d_n M_j d_k \nabla u_k)_{i-1/2}}{\Delta x^2} \quad (4.4.18)$$

となる．ここで 3 地点の  $\nabla u_k$  の項が現れるが、これを中心差分法で評価すると定常状態で水面に振動が現れることがあった．そのため、1 次精度風上差分法と 2 次精度中心差分法のハイブリッド差分であるドナー法（風上差分の割合は計算ケースごとに変化させた）で  $\nabla u_{ki+3/2}$ 、 $\nabla u_{ki+1/2}$ 、



$\nabla u_{ki-1/2}$  を評価した．風上方向の判断には，それぞれの地点の  $M_j$  を用いた．

その他の項については基本的に 2 次精度中心差分法により評価しているが，壁面境界や鉛直堤防からの段落ち境界については別途条件を与えることがあり，後述する．

時間積分についてはリーブフロッグ法を用いているため，2 次精度となる．前節で述べたように，式 (4.4.1)，(4.4.2) については陰的に処理し，その他の項については陽的に処理した．

運動方程式から陰的に処理する部分のみ抜き出して  $T_{implicit}$  とし，陰的な部分についての差分式を示す．表記の都合上微分オペレータの位置を無視すれば，

$$\begin{aligned}
T_{implicit} &= \frac{\partial M_n}{\partial t} - \sum_{j=N_\eta}^n \sum_{k=j}^{N_b} \beta \nabla \frac{\partial}{\partial t} \left\{ d_n d_j \nabla M_k - d_n d_j \frac{M_k}{d_k} \nabla d_k \right\} \\
&= \frac{M_{ni+1/2}^{t+1/2} - M_{ni+1/2}^{t-1/2}}{\Delta t} \\
&\quad - \sum_{j=N_\eta}^n \sum_{k=j}^{N_b} \beta \frac{(d_n d_j)_{i+1}^t (M_{ki+3/2}^{t+1/2} - M_{ki+1/2}^{t+1/2}) - (d_n d_j)_i^t (M_{ki+1/2}^{t+1/2} - M_{ki-1/2}^{t+1/2})}{\Delta t \Delta x^2} \\
&\quad + \beta \frac{(d_n d_j)_{i+1}^{t-1} (M_{ki+3/2}^{t-1/2} - M_{ki+1/2}^{t-1/2}) - (d_n d_j)_i^{t-1} (M_{ki+1/2}^{t-1/2} - M_{ki-1/2}^{t-1/2})}{\Delta t \Delta x^2} \\
&\quad + \beta B_{jki+1/2}
\end{aligned} \tag{4.4.19}$$

として表した．ここで  $B_{jki+1/2}$  は該当項の空間微分値を  $M_k$  の正負で判断した 1 次風上差分法で評価したものであり， $M_{ki+1/2} > 0$  であれば，

$$\begin{aligned}
B_{jki+1/2} &= \frac{(d_n d_j / d_k)_{i+1/2}^t (d_{ki+1}^t - d_{ki}^t) M_{ki+1/2}^{t+1/2} - (d_n d_j / d_k)_{i-1/2}^t (d_{ki}^t - d_{ki-1}^t) M_{ki-1/2}^{t+1/2}}{\Delta t \Delta x^2} \\
&\quad - \frac{(d_n d_j / d_k)_{i+1/2}^{t-1} (d_{ki+1}^{t-1} - d_{ki}^{t-1}) M_{ki+1/2}^{t-1/2} - (d_n d_j / d_k)_{i-1/2}^{t-1} (d_{ki}^{t-1} - d_{ki-1}^{t-1}) M_{ki-1/2}^{t-1/2}}{\Delta t \Delta x^2}
\end{aligned} \tag{4.4.20}$$

となる．繰り返しになるが，表記の都合で微分オペレータ  $j < n$  の場合は  $d_n$  は微分オペレータの外に出ることに注意されたい．すなわち， $j < n$  の場合は上記の各成分から  $d_n$  が消え，代わりに全体に  $d_{ni+1/2}^t$  が乗じられる．

#### 4.4.3 境界条件などの数値処理

本モデルは沿岸域の津波から河川遡上，堤防越流および陸域の遡上氾濫までに適用できるものを目指しており，様々な境界条件の設定が必要となる．

計算領域の境界については簡単に述べる．閉境界条件については，既存のモデルと同様に， $M_{niwall} = 0$  として与えれば良い．開境界条件については大山ら [6] のように，スポンジ層とその背後に Sommerfeld 型の境界を組み合わせた境界条件を用いた．流入境界条件を与える際には，複数の層に分割していた場合でも各層で同じ断面平均流速となるように流入条件を与えた．

dry/wet 境界については，基本的には運動方程式をそのまま用いて計算した．ただし，dry/wet 境界に特に該当しやすい特別な条件として，渦度を利用した条件を与えた．これは式展開の中で  $u$  の鉛直分布  $u'$  を  $\sigma$  のスケールとして近似しているが，これが成立しない場合に計算が不安定になるために設定した条件である．渦度は，

$$\omega = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \quad (4.4.21)$$

として表される．ここで各層における渦度  $\omega_{i,n}$  を  $u_{0n}, u_{1n}, w_{n-1}, w_n$  から求められると仮定する．渦度の取りうる値の大きさを知るため，これらの成分の絶対値をパラメータとした，次の値  $\Omega$  を考える．

$$\Omega_{i+1/2} = \sum_{j=N_n}^{N_b} \frac{1}{NZ} \left( \frac{|u_{0i+1/2} - u_{1i+1/2}|}{d_{j,i+1/2}} + \frac{1}{2} \frac{|w_{j-1,i+1} - w_{j-1,i}| + |w_{j,i+1} - w_{j,i}|}{\Delta x} \right) \quad (4.4.22)$$

として算出する．これが閾値  $\Omega_0$  を超えている場合，すなわち，

$$\Omega_i > \Omega_0 \quad (4.4.23)$$

となっている場合は，特に不安定性が強かった式 (4.3.41) の項について，値を 0 とした．本論文では閾値  $\Omega_0 = 20$  とした．なお，この閾値の条件を用いても，ほぼ全ての場所で  $\Omega_i < \Omega_0$  となる．主に dry/wet 境界や非定常状態での堤防周辺，壁面付近のような，流れ場が非常に不安定な箇所でのみ， $A_4 = 0$  となることになる．

底面との境界条件として、摩擦の影響を入れる必要がある。本研究では木村ら [9] を参考に底面摩擦応力を評価した。\$f\$ を摩擦係数とすると、底面摩擦応力を \$\tau\_b\$ とすると、

$$\tau_b = \frac{f\rho u\sqrt{u^2}}{2} \quad (4.4.24)$$

であり、ここでマンニングの粗度係数 \$n\$ を用いれば、

$$f = \frac{2gn^2}{D^{1/3}} \quad (4.4.25)$$

となる。摩擦速度 \$u\_\*\$ は摩擦係数を用いて、

$$u_* = \sqrt{\frac{f}{2}u^2} \quad (4.4.26)$$

で与えられる。上記の \$u\$ には本研究では \$u = u\_{N\_b}\$ を与え、渦動粘性係数 \$\nu\_t\$ を求めた。

$$\nu_t = \alpha Du_* \quad (4.4.27)$$

ここで \$\alpha\$ は定数 0.2 が与えられることが多いが、ストレインパラメータ \$S\$ およびローテーションパラメータ \$\Omega\$ を用いて表現する。

$$S = \lambda_p \frac{D}{u_*} \sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2} \quad (4.4.28)$$

$$\Omega = \lambda_p \frac{D}{u_*} \sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2} \quad (4.4.29)$$

ただし添字は総和規約に従い、\$\lambda\_p\$ は定数で 1.07 を与えた。\$\alpha\$ はこの関数として、

$$\alpha = \min \left[ 0.2, \frac{0.3\gamma_k \lambda_p}{1 + 0.09(\max[S, \Omega])^2} \right] \quad (4.4.30)$$

として与えられる。ただし \$\gamma\_k = 2.07\$ の定数である。

本研究では越流公式は用いないが、鉛直堤防を考慮するため、完全越流のような場合の条件設定も行う必要がある。今、急勾配の地点 \$i + 1/2\$ の運動方程式を解くとき、\$i\$ が上流側、\$i + 1\$ が下流

側であるとする．このとき，

$$z_{bi} > \eta_{i+1} \quad (4.4.31)$$

となっている場合は， $wallflag_{i+1/2} = 1$  なるフラグを立て，このフラグが 1 であれば計算を行わず 0 にする項を設定した．分散項全てに共通する条件として，

$$wallflag_{i+1/2}^{t+1/2} = wallflag_{i+1/2}^{t-1/2} \quad (4.4.32)$$

が存在する．すなわち，一つ前のタイムステップにおいて完全越流していた位置では，次のタイムステップでも分散項の計算は行わず，その次から計算を行うようにしている．さらに，時間微分に関する式 (4.3.31) の  $A_2$  に対しては， $wallflag_{i+3/2}^{t+1/2} = wallflag_{i+3/2}^{t-1/2}$ ， $wallflag_{i-1/2}^{t+1/2} = wallflag_{i-1/2}^{t-1/2}$  を，式 (4.3.37) の  $A_3$  および式 (4.3.41) の  $A_4$  に対しては， $wallflag_{i+3/2}^{t+1/2} = 0$ ， $wallflag_{i+1/2}^{t+1/2} = 0$ ， $wallflag_{i-1/2}^{t+1/2} = 0$  を計算条件に設定した．時間微分項の一部，式 (4.4.20) についても， $wallflag_{i+3/2}^{t+1/2} = 0$ ， $wallflag_{i+1/2}^{t+1/2} = 0$ ， $wallflag_{i-1/2}^{t+1/2} = 0$  が必要であった．また，残った項の計算時も，各変数の空間微分値を求める際に値をそのまま用いず， $z_{bi+1} = z_{bi}$ ， $D_{i+1} = 0$  とした dry/wet 境界であるように変数を補って計算した．

本モデルでは鉛直堤防や潜堤などの人工構造物も急勾配地形として与えるが，計算の上で地形勾配  $\nabla z_b$  が大きい場合，底面の鉛直流速  $w_b = u_b \nabla z_b$  や  $\nabla z_n$  の値が大きくなり，計算が発散する要因となる．これを防ぐため，

$$\nabla z_{bi} = \frac{\minmod[z_{bi+1} - z_{bi}, z_{bi} - z_{bi-1}]}{\Delta x} \quad (4.4.33)$$

$$\nabla z_{ni} = \frac{\minmod[z_{ni+1} - z_{ni}, z_{ni} - z_{ni-1}]}{\Delta x} \quad (4.4.34)$$

として与えた．ここで  $\minmod$  関数は，

$$\minmod(a, b) = \text{sign}(a) \max(0, \min(|a|, \text{sign}(a)b)) \quad (4.4.35)$$

で定義され， $a, b$  が異符号の時は 0 を，同符号の時は絶対値の小さい方を与える関数である．

#### 4.4.4 連続の式の離散化

本研究で用いているスタガードリープフロッグ法では，連続の式の離散化は次のように表される．

$$\frac{\eta_i^{t+1} - \eta_i^t}{\Delta t} = \sum_{j=N_\eta}^{N_b} \frac{-M_{ji+1/2}^{t+1/2} + M_{ji-1/2}^{t+1/2}}{\Delta x} \quad (4.4.36)$$

運動方程式と連続の式を交互に解くことで時間発展させるが，連続の式を解いた際に水深が負になってしまう場合がある．水量の保存性を保つため，格子流出量修正法 [20] を適用する．連続の式の計算の上で，各地点での総流量，

$$M_{i+1/2} = \sum_{j=N_\eta}^{N_b} M_{ji+1/2} \quad (4.4.37)$$

を算出する．すると連続の式は，

$$\eta_i^{t+1} = \eta_i^t + \frac{\Delta t}{\Delta x} (-M_{i+1/2} + M_{i-1/2}) \quad (4.4.38)$$

となる．ここで，それぞれの  $M$  の符号から判断して， $\eta_i^{t+1}$  を増やす流量の総和を  $M_{inflow} \geq 0$ ，減らす流量の総和を  $M_{outflow} > 0$  とする．計算の結果， $D_i^{t+1} = \eta_i^{t+1} - z_{bi} < 0$  となる場合に，

$$D_i^{t+1} = D_i^t + \frac{\Delta t}{\Delta x} (M_{inflow} - \lambda M_{outflow}) = 0 \quad (4.4.39)$$

となるような  $\lambda$  を考える．整理すれば，

$$\lambda = \frac{D_i^t \Delta x / \Delta t + M_{inflow}}{M_{outflow}} \quad (4.4.40)$$

である．この  $\lambda$  を流出に寄与した  $M_{i+1/2}$ ， $M_{i-1/2}$  および，その成分である  $M_{ji+1/2}^{t+1/2}$ ， $M_{ji-1/2}^{t+1/2}$  に乗じることで地点  $i$  からの流出を減らし，もう一度全体を計算し直す．なお，実用上は水深が負という条件ではなく，ある正の微小値  $\epsilon > 0$  を定め， $D_i < -\epsilon$  ならば適用するという条件にした方が良い．仮に  $-\epsilon < D_i < 0$  となれば，その水深は 0 に置き換えることになるが，実際の数値計算では完全には処理しきれない微小値が残ってしまうため，このようにする必要がある．

#### 4.5 多層式の妥当性について

単層の場合を考える．このとき，

$$w_n = w_b = u_n \nabla z_b \quad (4.5.1)$$

$$W_n = d_n u_n \nabla z_b - \frac{1}{2} d_n^2 \nabla u_n \quad (4.5.2)$$

$$\frac{\partial d_n}{\partial t} = \frac{\partial \eta}{\partial t} = -\nabla(u_n d_n) = -u_n \nabla d_n - d_n \nabla u_n \quad (4.5.3)$$

$$\frac{\partial z_n}{\partial t} = 0 \quad (4.5.4)$$

となる．式 (4.3.42) は，単層の場合は次のように表される．水表面，底面の境界条件を用いている．

$$\begin{aligned} & \frac{\partial M_n}{\partial t} + \nabla(u_n M_n) + g d_n \nabla \eta \\ &= \nabla \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{3} d_n^3 \nabla u_n - \frac{1}{2} d_n^2 w_n \right] - \nabla \left( \frac{\partial z_n}{\partial t} W_n \right) - \nabla z_n \frac{\partial W_n}{\partial t} \\ &+ \nabla^2 \left[ \frac{1}{3} d_n^3 u_n \nabla u_n - \frac{1}{2} d_n^2 u_n w_n \right] - \nabla(\nabla z_n u_n W_n) - \nabla z_n \nabla(u_n W_n) \\ &+ \nabla \left[ d_n w_n^2 - d_n^2 w_n \nabla u_n + \frac{1}{3} d_n^3 (\nabla u_n)^2 \right] \\ &= \nabla \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{d_n^3}{3} \nabla u_n - \frac{d_n^2}{2} w_n \right) + \nabla \left( \frac{d_n^3}{3} u_n \nabla u_n - \frac{d_n^2}{2} u_n w_n \right) + d_n w_n^2 - d_n^2 w_n \nabla u_n \right. \\ &+ \left. \frac{d_n^3}{3} (\nabla u_n)^2 - \nabla z_n u_n w_n \right] - \nabla z_n \left[ \frac{\partial W_n}{\partial t} \nabla(u_n W_n) \right] \\ &= \left[ d_n^2 \frac{\partial d_n}{\partial t} + \frac{d_n^3}{3} \frac{\partial^2 u_n}{\partial t \partial x} - d_n \frac{\partial d_n}{\partial t} w_n - \frac{d_n^2}{2} \frac{\partial w_n}{\partial t} + d_n^2 \nabla d_n u_n \nabla u_n + \frac{d_n^3}{3} (\nabla u_n)^2 \right. \\ &+ \left. \frac{d_n^3}{3} u_n \nabla^2 u_n - d_n \nabla d_n u_n w_n - \frac{d_n^2}{2} \nabla u_n w_n - \frac{d_n^2}{2} u_n \nabla w_n + d_n w_n^2 - d_n^2 w_n \nabla u_n \right. \\ &+ \left. \frac{d_n^3}{3} (\nabla u_n)^2 - w_n (d_n w_n - \frac{1}{2} d_n^2 \nabla u_n) \right] \\ &+ \nabla z_n \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( d_n w_n - \frac{d_n^2}{2} \nabla u_n \right) - \nabla \left( u_n d_n w_n - \frac{d_n^2}{2} u_n \nabla u_n \right) \right] \\ &= \nabla \left[ \frac{d_n^3}{3} \left( \frac{\partial^2 u_n}{\partial t \partial x} + u_n \nabla^2 u_n - (\nabla u_n)^2 \right) - \frac{d_n^2}{2} \left( \frac{\partial w_n}{\partial t} + u_n \nabla w_n \right) \right] \\ &+ \nabla z_n \left[ \frac{d_n^2}{2} \left( \frac{\partial^2 u_n}{\partial t \partial x} + u_n \nabla^2 u_n - (\nabla u_n)^2 \right) - d_n \left( \frac{\partial w_n}{\partial t} + u_n \nabla w_n \right) \right] \end{aligned} \quad (4.5.5)$$

となる．ここで， $-h = z_n = z_b$ ， $w_n = u_n \nabla z_b = -u_n \nabla h$  が成立するので，この式は後藤の式 (4.1.4) と一致している．

## 5 多層型非線形分散波モデルの妥当性検証

ここでは前章で開発した多層型非線形分散波モデルのシミュレータの妥当性を検証する。

### 5.1 海岸波動

この節では大山ら [5] の行った台形潜堤による波浪変形問題の再現計算を行う。波の非線形性と分散性が特徴的に現れる問題設定であり，海岸波動 [22] でモデルケースに採用されている。

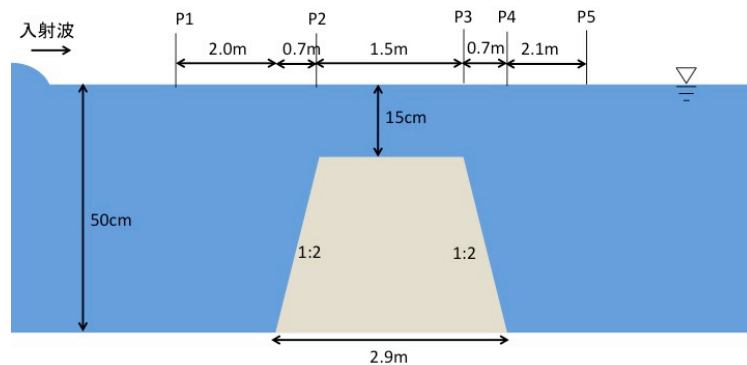


図 5.1 台形潜堤の形状と水面波形の測定位置

図 5.1 は実験における台形潜堤の形状を，図内の P1 から P5 は水面波形の測定位置を示している。本研究で採用した CASE4 では，無次元周期  $T_0\sqrt{gh_0} = 8.91$ ，波高水深比  $H_0/h_0 = 0.1$ ，無次元波数  $k_0h_0 = 0.769$  となっている。入射波源はクノイド波を与えた。

図 5.2 は大山ら [5] の論文に記載されている実験値（白丸）と本研究で開発した多層型分散波モデルのシミュレータの計算結果を重ねたもので，台形潜堤の法肩に位置する P3 における時間波形を示している。黄線（NZ1）は 1 層での計算，青線（NZ2）が 2 層での計算，紫線（NZ3）が 3 層での計算である。1 層は後藤の式と等価である。本研究の時空間解像度は  $\Delta x = 0.025[\text{m}]$ ， $\Delta t = 0.0025[\text{s}]$  である。多層モデルによる最大振幅は実験値ほどの大きさになっていないものの，波形は再現されている。また，単層と複層では得られる波形がわずかに異なっている。

実験値の再現性が低い原因は時空間解像度とシミュレータの離散化精度であると考えられる。同様の解析を行った平山 [27] を参考にすると， $\Delta x = L/80$ ， $\Delta t = T/90$  であり，本研究で与えた条



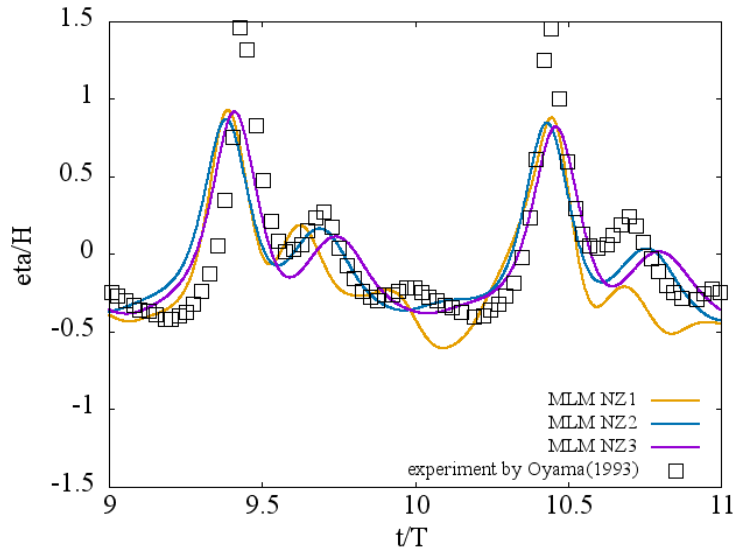


図 5.2 P3 における実験値 [5] と多層モデルの計算波形

件とそこまで大きく変わらない。しかし，本シミュレータでは離散化の際に，移流項に相当する項に 1 次精度の風上差分法を用いており，その他の項にも 1 次精度から 2 次精度として計算している。この結果解析の精度が落ち，非線形性と強分散性が必要な今回のケースについては再現性が落ちてしまったと考えられる。

## 5.2 定常状態の堤防越流実験

この節では加藤ら [7] の行った海岸堤防の定常状態の越流実験の再現計算を行う。加藤らは台形断面の堤防模型を用いて，津波が堤防を一定の水深で越流する状態における，堤防周囲の水位および底面におけるピエゾ水頭を測定した。図 5.3 は加藤らの示した堤防模型の断面図で，寸法は現地換算値，実験の縮尺は 1/25 である。

森ら [33] はこの実験の再現計算をブシネスク方程式で行っている。このようなケースの再現計算では，通常のブシネスク方程式では，越流水深が大きい場合に，非静水圧項の効果で水面に振動が生じて計算が不安定化するため，森らは基礎方程式に修正項を導入して計算を行った。森らによる修正ブシネスク方程式による再現計算結果では，水面形がおよそ実験と合致していても，算出されるピエゾ水頭は，その影響を過大に評価することが示されている。

本研究では森らと同じく越流水深が 6m(現地換算値)の場合について,層数を 1 から 3 まで増やして再現計算を行った.与えた計算条件は実験スケールのもとし, $\Delta x = 0.02\text{m}$ , $\Delta t = 0.00075\text{s}$ ,マニングの粗度係数  $n = 0.01\text{m}^{-1/3}\text{s}$  とした.森らと同様に,初期条件として堤防上流側に堤体高と同じ水位を与え,計算開始とともに上流側境界の水位を少しずつ上昇させ,越流水深が既定の値に達したところで固定した.下流側境界には開境界条件を与えた.なおピエゾ水頭を求めるにあたって,底面圧力を鉛直方向のオイラーの方程式 (4.3.11) から,

$$\begin{aligned}
 \frac{p(z_b)}{\rho} - gD &= \int_{z_b}^{\eta} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uw) + \frac{\partial}{\partial z}(w^2)dz \\
 &= \sum_{j=N_\eta}^{N_b} \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_j}^{z_{j-1}} wdz - w_{j-1} \frac{\partial z_{j-1}}{\partial t} + w_j \frac{\partial z_j}{\partial t} \\
 &\quad + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_j}^{z_{j-1}} uwdz - u(z_{j-1})w_{j-1}\nabla z_{j-1} + u(z_j)w_j\nabla z_j + w_{j-1}^2 - w_j^2 \quad (5.2.1) \\
 &= \sum_{j=N_\eta}^{N_b} \frac{\partial W_j}{\partial t} + \nabla(u_j W_j) \\
 &\quad - w_{j-1} \left( \frac{\partial z_{j-1}}{\partial t} + u(z_{j-1})\nabla z_{j-1} - w_{j-1} \right) + w_j \left( \frac{\partial z_j}{\partial t} + u(z_j)\nabla z_j - w_j \right)
 \end{aligned}$$

として算出した.

計算から得られた水位とピエゾ水頭について,加藤らの実験データと比較したものが図 5.4 と図 5.5 である.図内の黒線が底面,赤線が加藤らによる実験結果,水色線が非線形長波モデル (NLSW) による計算結果で,黄,青,紫線がそれぞれ多層モデル (Multi-Layered Model) による

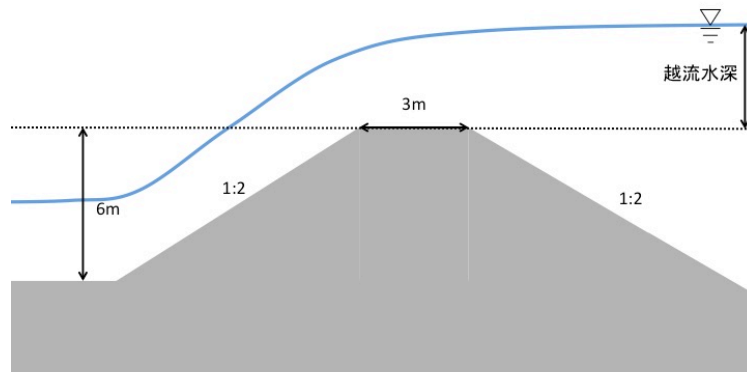


図 5.3 堤防越流実験の模型断面図

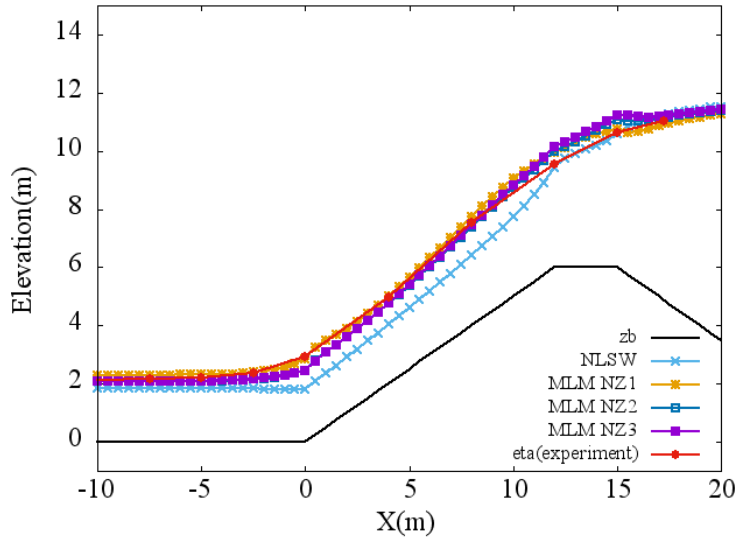


図 5.4 定常状態における水位の比較

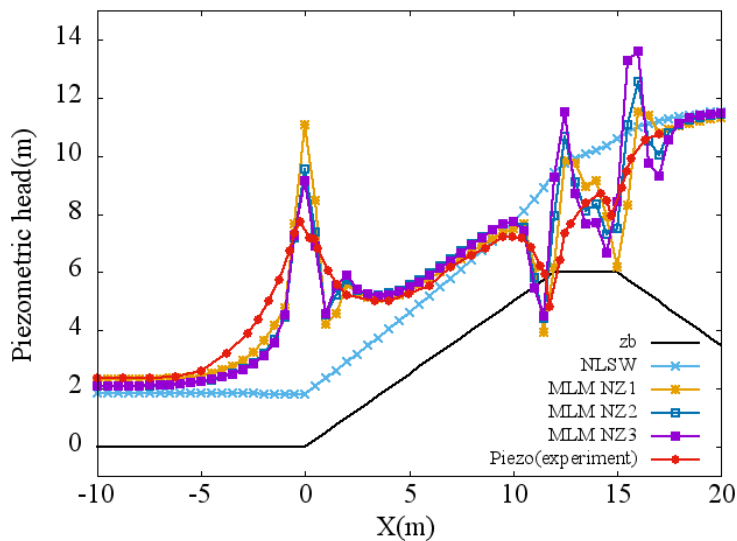


図 5.5 定常状態におけるピエゾ水頭の比較

計算結果（1層，2層，3層）である。

まず水位について，天端上では非線形長波モデルによる結果が実験値と最も合い，多層モデルでは層数を増やすにつれて過大になる傾向がみられた．これは森らの計算結果において修正係数を大きくしたときと同様の傾向であった．裏法では非線形長波モデルでは水位が大きく落ちてしまう一方で，天端付近では層数が多い方が，法尻付近では層数が少ない方が実験値と近い結果となった．法尻でも同様に層数 1 の場合が最もよく実験値と一致したが，さらに下流側の堤内地では層数 3 の

結果が最もよく一致しており，層数 1 では過大評価，非線形長波モデルでは過小評価となっている．堤内地の水位に関しては式 (4.4.23) による修正の影響が出ており，式 (4.4.23) の条件を用いない場合，多層モデルいずれの計算でも非線形長波モデルと同程度に水位を過小評価していた．

次にピエゾ水頭については，法肩では負圧に，法尻では静水圧に比べて非常に大きくなることが実験から示されている．池澤ら [2] はこれを，堤防法肩と法尻で流線が曲がることによって発生する遠心力の効果であり，曲率の正負によって負圧か正圧かが決まる，と指摘している．法方，法尻いずれでも，多層モデルでは層数を増やすとより実験値に近くなり，例えば  $X = 0$  におけるピエゾ水頭は実験値 7.725m に対して，層数が 1 の時は 11.07m，層数が 2 の時は 9.56m，層数が 3 の時は 9.16m となっている．森らの計算結果では，本モデルの層数 1 の結果よりもさらに過大に評価しており，本モデルの圧力評価の優位性が示されている．

### 5.3 段波実験

この節では，本論文の 3 章で既に紹介している松富 [32] により行われた段波形成の実験の再現計算により，実験の段波の波高や段波先端速度を比較することでシミュレータの段波の再現性を検証する．

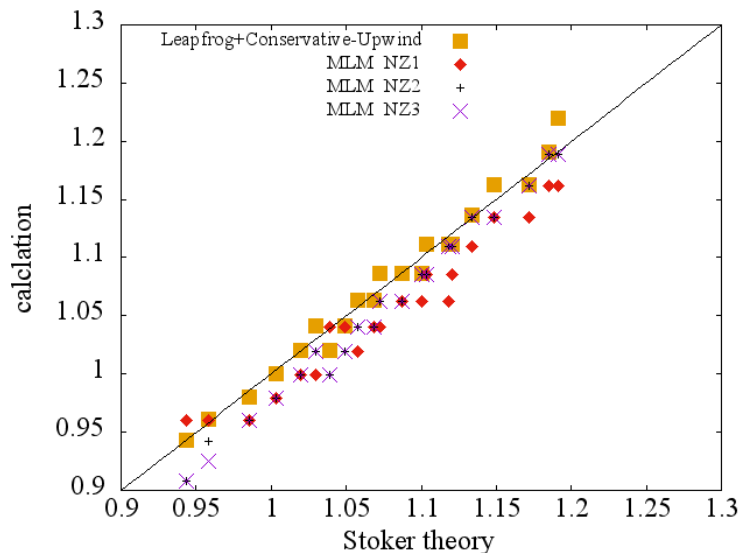


図 5.6 段波先端速度の比較

図 5.6 は、それぞれ層数を 1,2,3 としたときの段波先端速度の比較である。図 3.12 と同様に、横軸に Stoker の理論により得られた理論値（算出には  $H_m$  を使用）を、縦軸に計算により得られた値を 21 ケース分プロットしている。3 章において保存形の 1 次精度風上差分法で計算したものはグラフ内に残し、新たに MLM(Multi Layers Model) として 3 種類のデータを加えた。MLM NZ1（赤ひし形）が層数 1 で計算したもの（後藤の式と等価）、MLM NZ2（黒十字）が層数 2 で計算したもの、MLM NZ3（紫バツ印）となる。プロットを見ると、分散性を考慮して計算を行うと、段波先端速度が理論値よりも若干遅く計算されている。

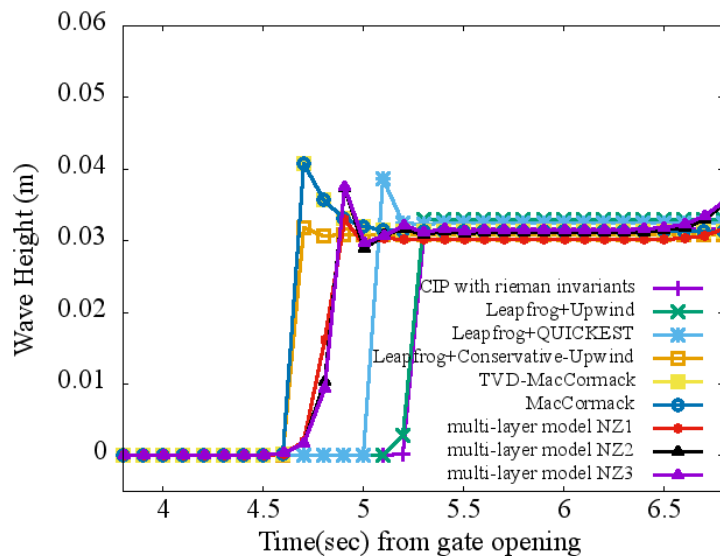


図 5.7 段波形成実験ケース 13 の観測点時間波形

この原因の一つとして、段波先端の判定方法がある。図 5.7 は  $X = 5$  の地点における時間波形である。この図において、多層モデルで 4.9 秒の時刻に見られる最大波高の到達時刻を用いて図 5.6 の段波先端速度を算出している。しかし、図 5.7 の横軸 4.6 秒を見ると、保存系の手法による波形が大きく立ち上がっている一方で、多層モデルによる波形もわずかに立ち上がっていることがわかる。非線形長波方程式による計算結果と異なり分散が生じているため、段波先端位置の定義により、段波先端速度も多少変化してしまっている。

また、藤間ら [31] は、高次非線形分散波式の分散項 ( $O(\epsilon^2)$ ) は過小評価であり、 $O(\sigma)$  の式は分散項が過大であると指摘しており、今回の段波先端速度のずれも分散項の評価値が原因であると考

えられる．図 5.6 を見れば層数が 1 の場合よりも 2, 3 の場合の方が先端速度が速く理論値へ近づいている傾向が見られるが，これは層数を増やしたことで，正しい分散項の評価値に近づいた，と考えられる．

次に，表 3.4 を用いて波形について検証する．段波波高  $H_m$  と分散第一波の波高  $\eta_m$  が検討対象である．実験結果と計算結果の比較を図 5.8, 5.9 に示す．段波波高  $H_m$  について，多層モデルは大きめの段波になるほど過大評価する傾向が見られた．特に，層数を増やした場合に過大評価しているが，保存系解法による非線形長波モデルは，段波波高をよく再現した．その一方で，分散第一波については実験結果から大きく外れている．

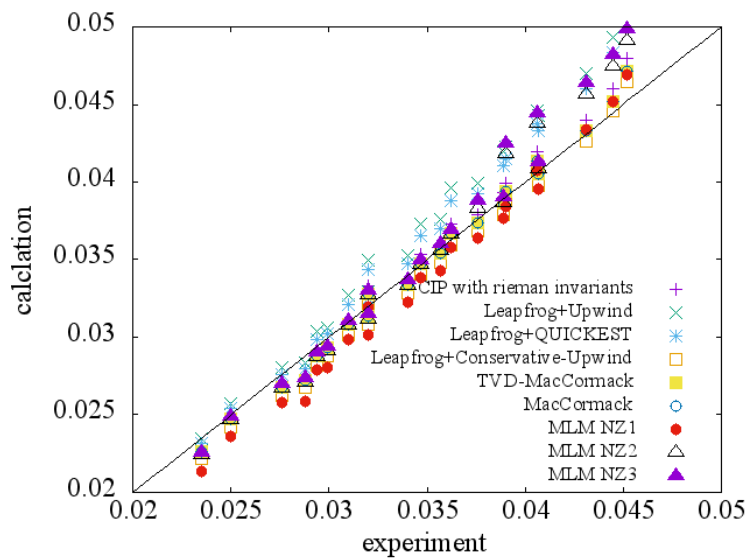


図 5.8 段波波高  $H_m$  の比較

この 21 ケース分の結果を規格化し，実験値からのずれの割合をまとめたものが表 5.1, 5.2 である．表 5.1, 5.2 の上段は計算手法，下段は計算値の実験値からのずれの割合を示しており，例えば表 5.1 の一番右の列は，層数 3 の多層モデルによる 21 ケースの段波波高は，実験のものとは比べて約 8.14% の誤差があったことを示す．段波波高  $H_m$  は保存系解法よりも多層モデルは誤差が大きく，誤差の程度は 10% 弱である．多層モデルの誤差の大きさとしては非保存系解法によるものよりも小さく，極端に大きいわけではない．

$\eta_m$  に関して，後藤の式と等価な単層の場合では，非線形長波モデルと同程度に誤差が生じた．

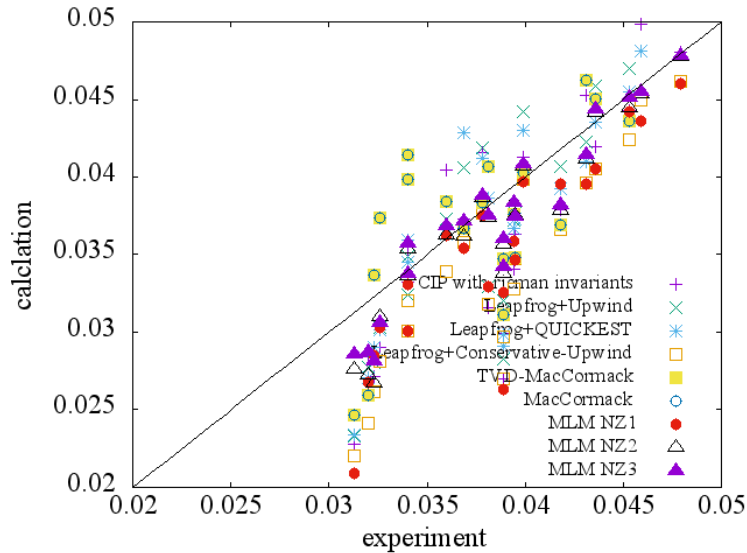


図 5.9 分散第一波の波高  $\eta_m$  の比較

表 5.1 段波波高  $H_m$  の実験値からのずれ

CIP	LF+U	LF+Q	LF+CU	MC	MLM NZ1	MLM NZ2	MLM NZ3
0.0489	0.146	0.108	0.0617	0.0412	0.0904	0.076	0.0814

表 5.2 段波波高  $\eta_m$  の実験値からのずれ

CIP	LF+U	LF+Q	LF+CU	MC	MLM NZ1	MLM NZ2	MLM NZ3
0.244	0.228	0.203	0.281	0.229	0.227	0.123	0.107

これはモデルの問題よりも離散化精度の問題が大きいと考えられる． $\Delta x = 2.0\text{cm}$  と大きめの空間格子で計算していることと，1次精度と2次精度の空間差分を用いていることの二つが大きな原因であり，これらを解決すれば精度が向上すると考えられる．一方で2層，3層と分割数を増やすにつれ，誤差は半分程度となり，波形再現性の精度が向上した．

図 5.10 は，実験ケース 15 における段波先端部の水平流速の鉛直分布を示しており，縦軸が横軸が水平流速，縦軸が  $z$  を表している．多層モデル（層数 1,2,3）において，一度非回転を仮定して式 (4.4.11) から算出した水平流速のプロットである．式形から， $z$  に関する放物線として水平流速は算出される．そして同様のプロットに3次元流体解析法である MPS 法による結果を重ねたものが図 5.11 である．MPS 法のプロットは， $X = 5$  に段波先端部が到達した直後の段波先端部付近の一定幅に存在する粒子の水平流速の分布をとっている．

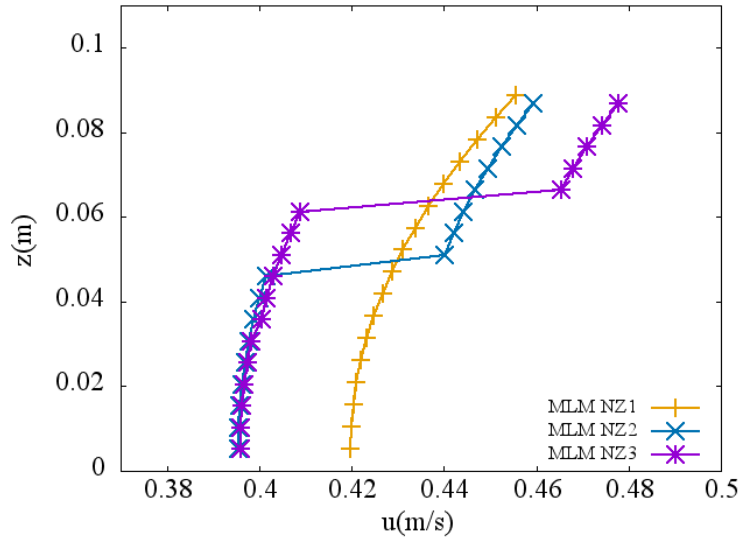


図 5.10 段波形成実験ケース 15 の多層モデルにおける水平流速の鉛直分布

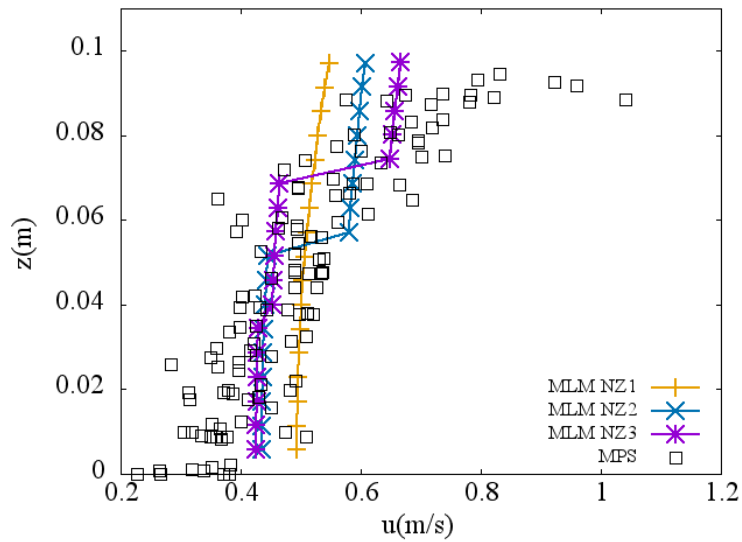


図 5.11 段波形成実験ケース 15 の水平流速の鉛直分布の MPS 法との比較

多層モデルで層数を増やすと、段波の水表面に近い層では水平流速が大きくなることが示されており、これは MPS 法の解析結果の傾向と一致することがわかる。MPS 法ほどの大きな分布の差が出ているわけではないが、この底層と表層の速度差の再現性の向上が、分散波の再現性の向上につながっていると考えられる。



## 5.4 非定常状態の堤防越流実験

この節では、瀬戸 [19] が行った非定常の段波・越流実験の再現計算を行う。実験装置は図 5.12 に示されている。長さ 27.4m、幅 0.6m の水槽に、上流側 9.4m の位置に開閉式ゲートが設置されている。ゲートから 4m の位置から 10m かけて 35cm 上がるスロープを沿岸海底地形の再現として設置されており、スロープの終端に合わせて陸地を再現した 4m にわたる水平床が設置され、その先 2m の区間は越流枡となっている。スロープから 1.5m 下流の位置に堤防を、図内の CH1 から CH6 に波高計を、堤防上部に流速計を設置した。さらに、堤防周辺にビデオカメラを設置している。

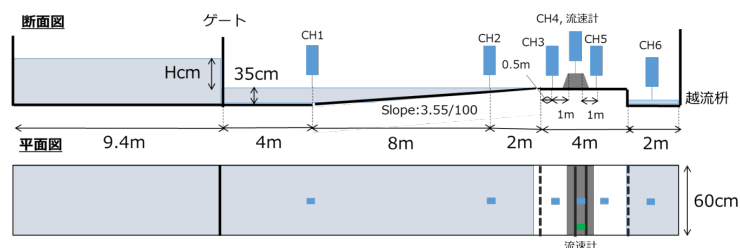


図 5.12 断面二次元水槽概略図（瀬戸 [19] より）

瀬戸は 3 種類の段波波高と 6 種類の堤防形状について実験を行なったが、本研究ではその中からゲート上流下流の水位差  $H = 20\text{cm}$ 、堤防形状は高さ 12cm、天端幅 6cm の鉛直堤のケースの再現計算を行った。このケースは特に堤防周囲の水位や流速が安定せず、空気の泡を含む渦も発達しているようなケースである。図 5.13 は越流開始直後と流れが準定常となった後の、堤防周辺の流れの様子である。



図 5.13 堤防周辺における越流時流況（瀬戸 [19] より）

瀬戸は VOF 法を用いた CADMAS-SURF により実験の再現計算を行なっている。本研究では

瀬戸のまとめた実験値，VOF 法による計算値と，多層モデル(層数 1,2,3，図内で MLM NZ=1,2,3 と表記)と非線形長波モデル(図内で NLSW と表記)による計算値を比較する．なお，ここで非線形長波モデルとしたものは本研究で開発したシミュレータにおいて鉛直加速度に起因する全ての項を 0 としたものである．計算条件は， $\Delta x = 0.06[m]$ ， $\Delta t = 0.0036[s]$ ，粗度係数  $n = 0.01m^{-1/3}s$  とした．時刻はゲート開放時に  $t = 0[s]$  としている．また，実際の実験ではゲートの開放に 1 秒弱ほどかかるため，初期波形は直立な段波とは言えず，瀬戸はこの影響を防ぐため，VOF 法の計算時の初期波形に勾配を与えて整合性が高くなるようにした．最終的に瀬戸が与えた 8:1 の初期勾配を，本研究でも適用している．

CH1 から CH5 の位置における波高および CH6 の波高を元に算出した越流桁内の水総量を図 5.14 から図 5.19 にまとめる．図内の黒線と赤線は瀬戸の示したものであり，実験で得られた波高を黒色で，CADMAS-SURF による計算結果を赤色で示した．他の色は本研究での計算結果であり，水色線が非線形長波モデルによる結果，黄線が多層モデルの層数を 1 としたもの(後藤の式と等価)，青線が多層モデル(層数 2)，紫線が多層モデル(層数 3)の結果である．CH2 以降も同様のカラーで描画している．なお，初期波形として水の総量が変わらないように勾配を与えているため，初期の波先端部がゲート位置よりも下流側に存在する．そのため，以下の図では到達時刻を一律で +0.5 秒して示した．

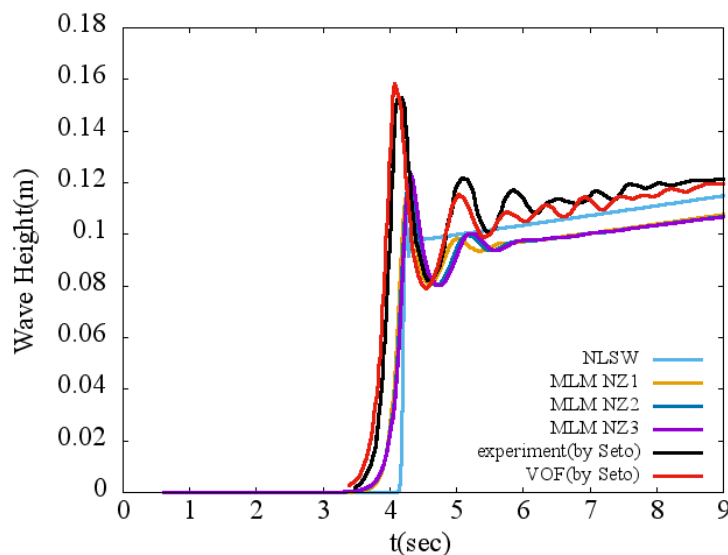


図 5.14 CH1 における実験波高と計算値の比較

まず CH1 について、ゲート位置および CH2 以降の波高計の位置、計測結果を考えると、瀬戸の示した CH1 の位置は正しくないと考えられる。ここではゲートから 8m の位置を CH1 として、図 5.14 に示す。非線形長波モデルでは段波先端のオーバーシュート以降は水面の振動が生じないが、鉛直加速度を考慮することで分裂が生じるため、多層モデルの結果では水面が振動している。また、層数を増やすにつれて波峰が高くなり、到達が遅れていることがわかる。第 1 波峰到達から第 2 波峰到達までの時間を比べると、層数 1 の場合は 0.756 秒、層数 2 の場合は 0.864 秒、層数 3 の場合は 0.918 秒と層数を増やすにつれて周期が伸びた。図から読み取る限りでは、CADMAS-SURF の計算結果からは 1.01 秒であり、多層モデルによる分散は実験とある程度整合していると言える。

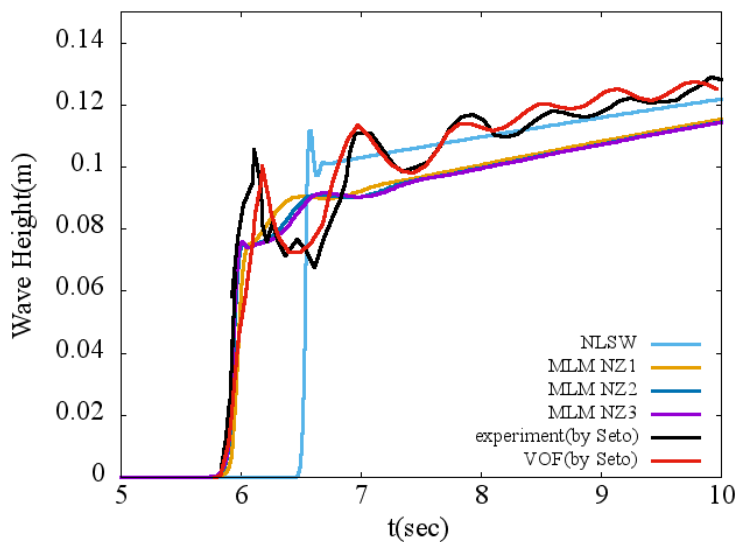


図 5.15 CH2 における実験波高と計算値の比較

CH1 においては非線形長波モデルと多層モデルの波峰の到達はほぼ同程度であったが、CH2 においては多層モデルが先んじて到達している。これは遡上の過程で分散項が波の加速に影響を与えたことを意味している。多層モデルでは段波波高が全体的に過小評価の傾向があるが、初期条件に与えた傾き 8:1 は CADMAS-SURF に最適化されたものであり、多層モデルでは最適化されていないため、このようになっていると考えられる。また、第 1 波峰よりも後続の波峰の方が高い傾向は一致していることが見て取れる。実験よりも後続波の分裂が少ないのは、離散化精度が悪く数値粘性が入っていることが原因であると考えられる。

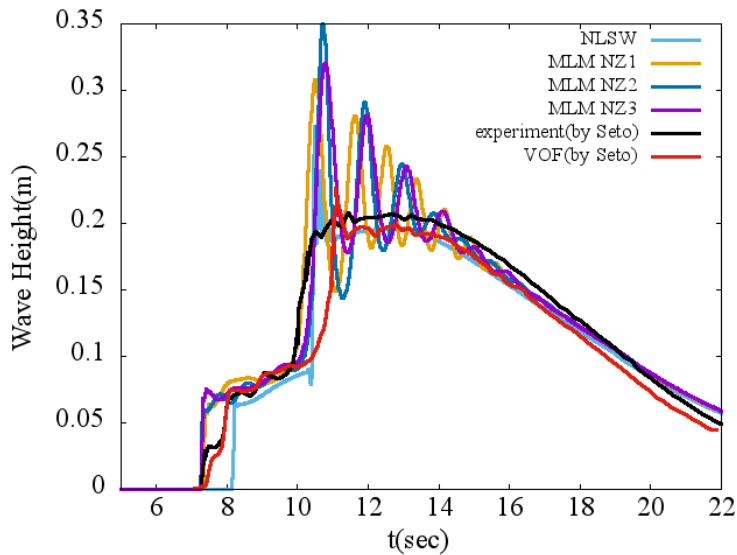


図 5.16 CH3 における実験波高と計算値の比較

CH3 以降は初期水深が 0 であり dry/wet 境界が生じる地点となる．ここには波が到達した後，堤防からの反射波が到達して波高が跳ね上がる．初期波，反射波共に，多層モデルの到達時刻は実験とよく一致している．層数による差は波の分裂に見られるが，反射波の波高はいずれも実験および VOF 法によるものよりも過大評価している．これは多層モデルに碎波項や乱流項を導入していないことが原因であると考えられる．

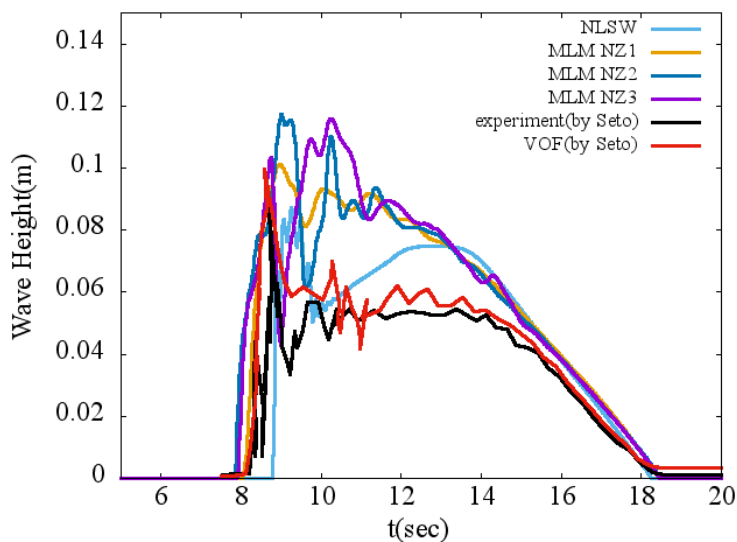


図 5.17 CH4 における実験波高と計算値の比較

CH4 は鉛直堤防の上部である。まず、越流の開始時刻は、非線形長波モデルが遅れる一方で、多層モデルによる計算は実験とほぼ一致していた。越流終了時刻はいずれのモデルでも大きな差はなかった。越流開始直後はモデル、実験いずれも不安定であるが、越流開始からしばらく経つと準定常状態となり、振動が弱くなる。層数による差異はあまり大きくはないが、実験値と比べると波高を過大評価している傾向にある。

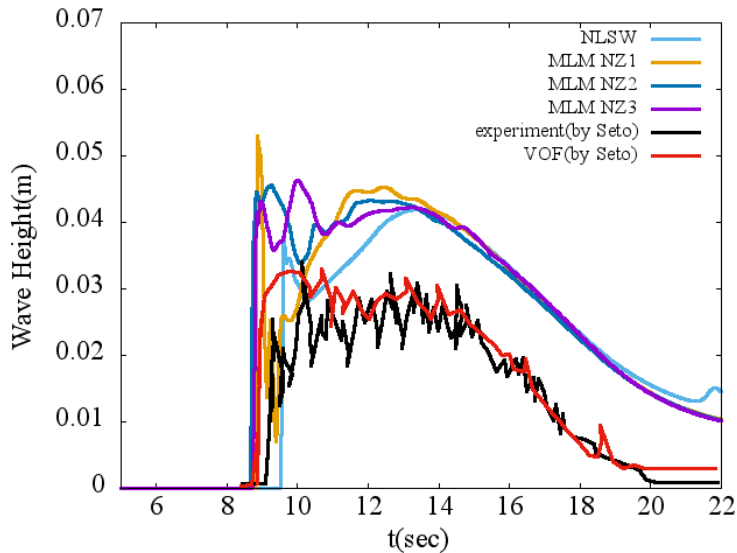


図 5.18 CH5 における実験波高と計算値の比較

CH5 では、1 層での計算では越流直後に値が強く振動している。2 層、3 層の計算では比較的安定した波高が得られているが、全体的に実験値よりも高く評価されている。これも上流側である CH4 で波高を過大評価しているのが原因と考えられる。しかし層数 3 での計算結果は、他に比べて波高が低く計算されているようである。この理由は後述する。なお、鉛直堤防の背後となる CH5 は、越流直後に空隙が発生し、底面から水表面まで水が存在していることを仮定して導出した本モデルの適用外であると考えられることには留意する。

CH6 を用いた越流枡内の水総量について、実験においては波高計を越流枡内中央部付近に置いているが、図 5.19 において水総量の計算は越流枡に水が入った時点から始まるので、実験よりも早く計算のグラフが立ち上がっている。図 5.19 では CH6 の波高から計算された水送料の平均値が緑線により示されている。多層モデルによる計算による越流枡内への流入のタイミングや水の増え方

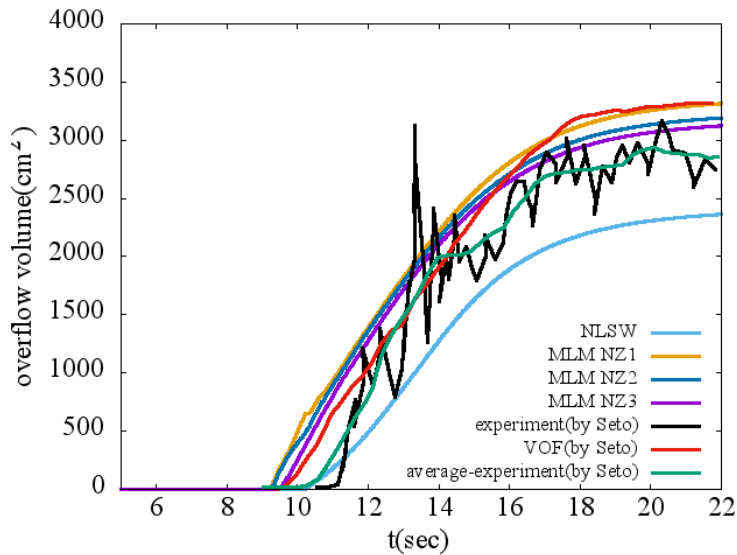


図 5.19 越流枙内の水総量の比較

は、VOF 法による計算と一致している。水総量の計算結果は、非線形長波モデルは越流量を大きく過小評価している一方で、多層モデルおよび VOF 法による計算では過大評価した。多層モデルの層数を増やすにつれて少なくなり、層数 3 の越流量は VOF 法の結果よりも実験値に近かった。

CH1,2,3,4 においては層数によって波高の差がそれほど大きくなかった一方で、堤防越流後の CH5 でわずかに差が生まれ、最終的な越流量に差がついた理由は、多層モデルが水平流速の鉛直分布が大きい箇所でも計算できるためである。図 5.20 は時刻  $t = 10.46\text{s}$  時点での波形と水平方向の層内断面平均流速の分布を表している。時刻  $t = 10.46\text{s}$  とは、図 5.17 から、非定常の堤防越流時である。図内の色は断面平均流速  $u_n$  を表しており、カラーバーは  $-1\text{m/s}$  から  $1\text{m/s}$  までを青色から赤色で表示している。

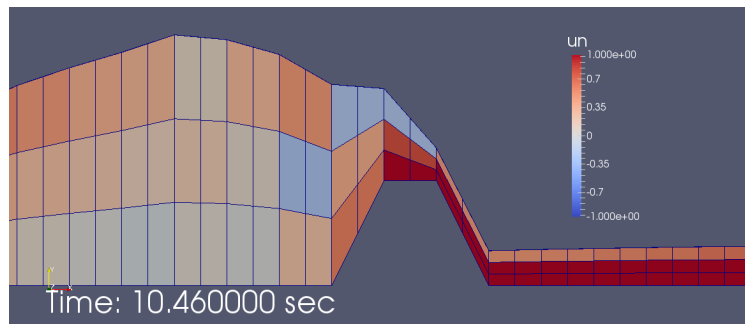


図 5.20 非定常越流時の層内断面平均流速分布

これを見ると、堤防上部の水表面の層が負の流速として与えられており、堤防上部に到達した波の一部が戻っていることがわかる。本来、鉛直堤防に前面に衝突した波が戻る流れが見られるものであるが、今回の計算では格子幅が  $\Delta x = 6\text{cm} = L_w$  (天端幅) とかなり大きいため、堤防前面の反射波に引きずられて堤防上部でも戻る方向の流れが発生したと考えられる。そして、堤防上部で一部が戻っているために、最終的な越流量も単層のモデルに比べて減少したことがわかる。

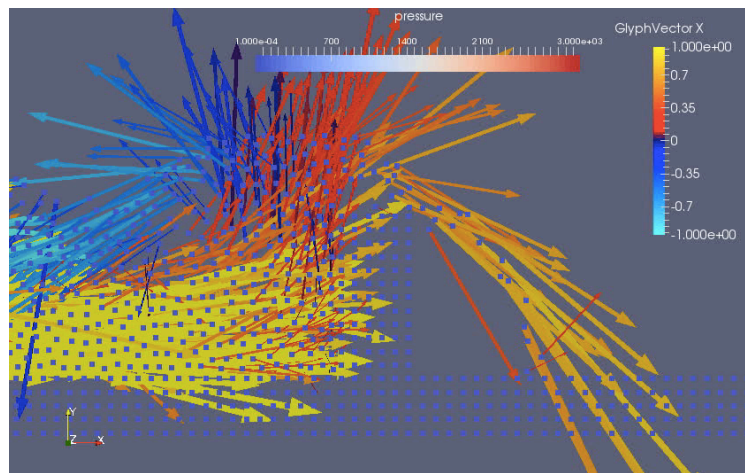


図 5.21 非定常越流時の MPS 法による計算結果

堤防前面の上部で戻る方向の流れが生じることは、図 5.21 に示す、MPS 法による計算結果からも確かめられる。図 5.21 は本ケースの計算において波が鉛直堤防に衝突した直後の流れ場の様子であり、矢印の色は水平方向流速を表す。堤防を越流する粒子がある一方で、堤防に衝突後に上部から戻る流れがあることが示されている。図 5.20 ではこの現象が再現されていたと考えられる。堤防を越流する粒子については負方向の流速を持っていないことから、多層モデルでも計算解像度を上げることで、波高計測位置よりも手前で戻り流れが生じ、得られる波高が実験とより合うようになると思われる。

## 6 多層型非線形分散波モデルの実地への適用性の検証

ここでは 3.3.4 節と同様の 1 次元の木戸川河川モデルに多層モデルを適用した．計算条件は  $\Delta x = 10.0[\text{m}]$  ,  $\Delta t = 0.25[\text{s}]$  とし，多層モデルは層数 1 (後藤の式と等価)，層数 2，層数 3 とし，非線形長波モデル (保存形，非保存形) のグラフも重ねている．計算条件は 3.3.4 節と同一である．

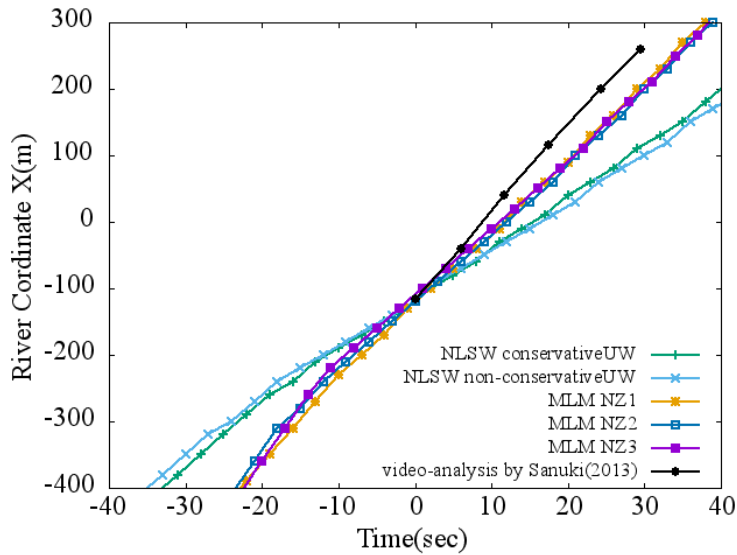


図 6.1 多層モデルによる津波先端線の推移の比較

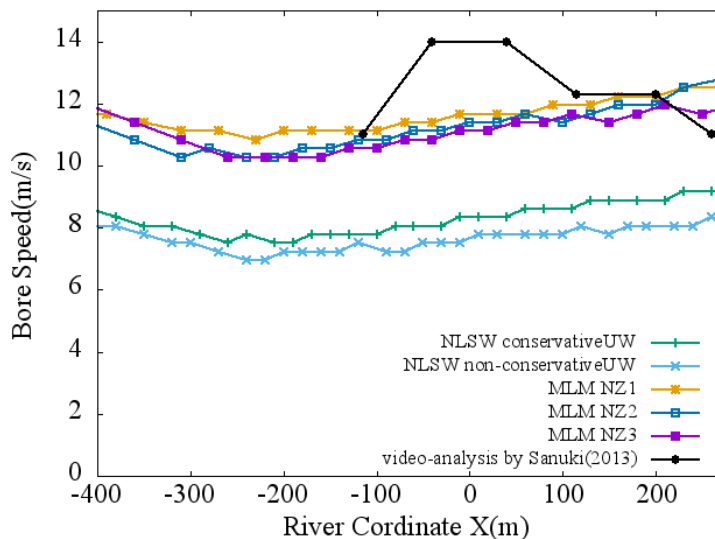


図 6.2 多層モデルによる津波先端線の遡上速度の比較



計算結果を図 6.1 と図 6.2 に示す．図 6.1 は縦軸が津波先端線の位置座標，横軸が時間を表しており，遡上速度はこのグラフの傾きとなる．図 6.2 は遡上速度を縦軸に，河川座標を横軸にとったものである．沿岸域，河川内共に，多層モデルは非線形長波モデルよりも遡上速度の再現性が大きく向上した．津波の遡上のような傾きのある地形における計算においては，長波モデルよりも分散波モデルの方が段波先端速度が速くなることを示しており，これは 5.4 節の実験の再現計算とも同様の傾向である．また，多層モデル内で見ると，層数が多い方が遡上速度が低く算出されていることがわかる．これは，第 1 波の戻り流れの影響が考えられる．

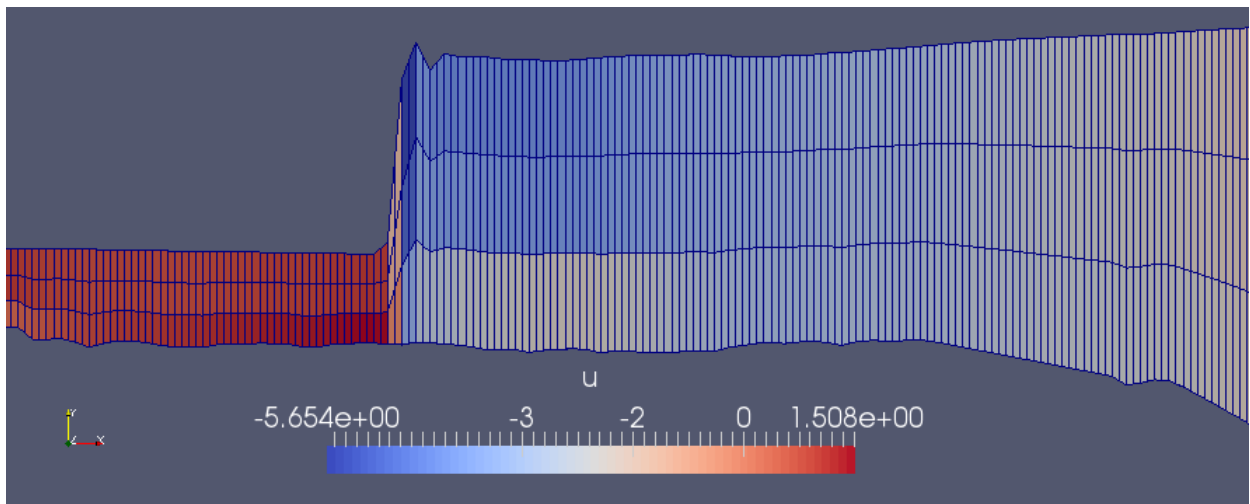


図 6.3 河川遡上時の流況（層数 3）

図 6.3 は層数 3 での多層モデルの計算により得られた，計算開始から 3000 秒後の遡上時の空間波形である． $z$  方向 100 倍のスケールで図化しており，図内左側が河川上流側，右側は海域となっている．図内の色は水平方向の層内断面平均流速を表しており，赤色になるほど沿岸方向の流速が強く，青色になるほど内陸方向の流速が強いことを表す．これを見ると，第 1 波の戻り流れ（赤）と最大波の段波が衝突しており，最大波の下層の流速が，上層の流速よりも遅くなっていることがわかる．

図 6.4 には，図 6.3 と同一の時間ステップにおける空間波形，および断面平均流速を示した．図 6.4 の左上は非線形長波モデル，右上は 1 層の多層モデル，左下は 2 層の多層モデル，右下は 3 層の多層モデルである．この図からも，複数の層で計算した場合，逆向きの流れが津波にも影響を与

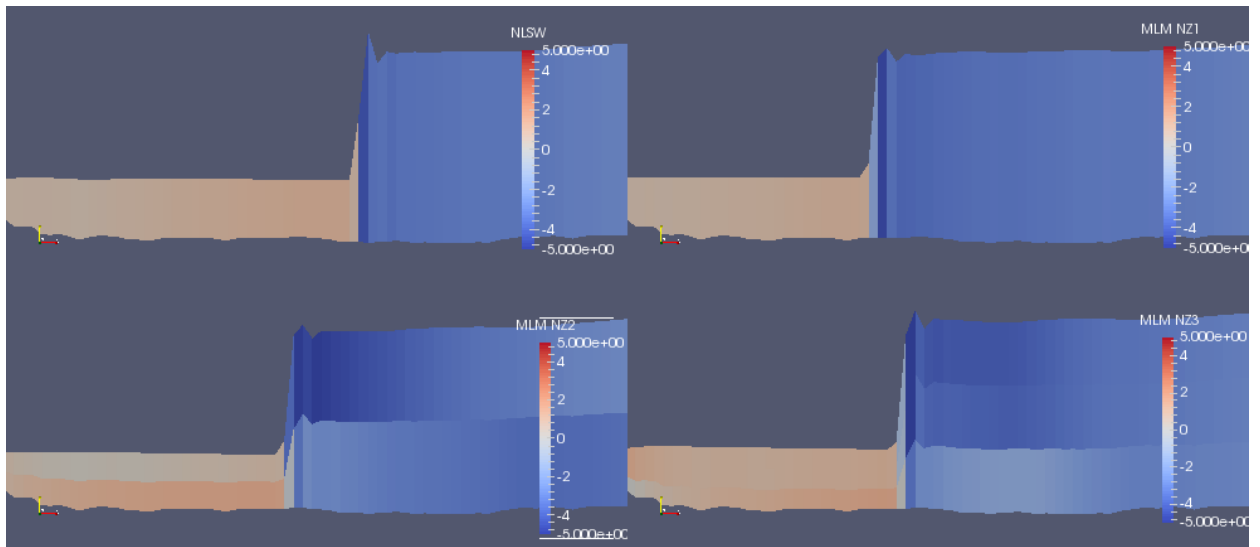


図 6.4 河川遡上時の流況比較

えることが示唆されている。

## 7 結論

本研究では、甚大な被害をもたらす災害である津波の被害予測の精度の向上に資するべく、既存モデルを用いた津波氾濫の再現性の検証、および鉛直加速度や非線形分散性を考慮した多層型モデルの構築・開発とその適用性の検証を行った。具体的な研究内容と成果は以下のようにまとめられる。

まず、広く津波氾濫の解析に用いられている非線形長波モデルを、東日本大震災における木戸川の津波遡上に適用し、その再現性を分析した。最終的な浸水域が現地調査結果に合うように調節した計算を行ったところ、平野部での再現性は高かった一方で、河道内の遡上速度が 50% ほどに過小評価される傾向にあった。そのため、遡上速度の再現性の向上を目指して各種パラメータおよび離散化手法について検討を行った結果、入射波や河道地形の調整、および移流項の離散化手法を保存形にすることで、有意に遡上速度が改善されたが、ビデオ映像により得られた遡上速度を再現することはできなかった。

非線形長波モデルでは表せない因子が上記の過小評価の原因であると考え、鉛直加速度による分散性を考慮した、多層型のモデルを構築することとした。アーセル数の大きい場合に適用可能な後藤の式と同様の仮定の下で、多層型の強非線形分散波式を導出した。今後の展開のため、粘性項も導入できるようにモデル化を行った。そして導出した方程式を解くシミュレータを開発し、実際に計算が可能となるような条件式を提案した。そして開発したモデルを、4 種類の既往実験および木戸川の 1 次元モデルの再現計算へ適用し、実験結果や非線形長波モデル、3 次元モデルによる解析結果との比較検討を行った。

まず、分散波モデル以上の近似精度を持つモデルを用いて得られる段波到達時刻は沿岸域、遡上域共に実験とよく一致する一方で、非線形長波モデルは底面勾配のある場合に実験よりも遅れる傾向が見られた。また、分散波モデル以上の近似精度であれば、伝播に伴う波の分裂を再現できた。これらは、鉛直加速度に起因する分散項の効果である。木戸川のケースでも同様に分散波モデルによる段波先端速度は非線形長波モデルによるそれよりも速く、よりビデオ解析結果に近い値を得られた。

多層モデルを用いた場合にブシネスクモデルよりも再現性が上がったものとして、まず圧力の評価が挙げられる。堤防を越流する流れがある場合、天端や裏法尻にて圧力が静水圧分布から大きく外れる。既存モデルではその傾向をつかめているのみであったが、多層モデルで層数を増やすにつれて、実験結果に近づいた。次に、分散第1波高について、3層モデルによる計算結果と実験値とのずれは、ブシネスクモデルによる計算結果と実験値のずれと比べて、半分程度になった。また、水平流速の鉛直分布についても、層数を増やすにつれて3次元モデルから得られた分布に近づいた。そして、鉛直堤防の非定常越流実験においては、多層モデルで層数を増やすにつれ、堤防越流量の再現性が大きく向上した。さらに、単層モデルでは表現し得ない鉛直堤防への衝突直後の複雑な流れ場についても、その特徴をつかんだ妥当な解析が可能であった。また、津波と逆向きの流れが津波にも影響を与え、遡上速度が減速する傾向があることも示唆された。

今後の展望として、まずはモデルの2次元への拡張が挙げられる。本研究で開発した多層型シミュレータは、3次元型のモデルよりも計算量が少ないことがメリットである。既存3次元型モデルではスパコンを用いなければ解析が難しい広範囲の計算を、既存2次元型モデルよりも高精度に解けることが本モデルの長所であるため、次元拡張をする必要がある。次元拡張の後に、木戸川のケーススタディを平面計算で行い、河川遡上速度の再現性の検討を進めたい。

次にモデルの高精度化が挙げられる。波浪変形の実験の計算では精度が落ちてしまったが、遡上計算を行う場合でも沿岸域での波浪変形は非常に重要であり、改善の必要がある。

また、砕波や乱流など項については今回は与えていないが、複雑な流れ場の解析に重要な役割を果たすため、これらの導入が課題として挙げられる。粘性項の導出は済んでいるため、本モデルに適した動粘性項のモデル化が必要である。

そして本論文では層の分割を水深に応じて位置ごとに変化させたが、没水平板型境界のような境界条件を取り扱うには、層の分割位置を固定化すると良いと考えられる。また、戻り流れに関しても戻っている高さで層を切ることができれば、均等に分割するよりも再現性が向上すると考えられる。層の分割数をみだりに増やすことは計算量の増加につながってしまうため、今後は効率よく精度を担保できるような層の分割アルゴリズムについての検討も進めていきたい。

## 謝辞

本論文は東京大学大学院工学系研究科社会基盤学専攻の博士論文としてまとめられたものです。執筆にあたり、非常に多くの方のご協力を賜りました。指導教員であり、本論文の主査である、社会基盤学専攻海岸・沿岸環境研究室の田島芳満教授には、著者が同研究室に配属される以前から丁寧にご指導いただいております。マイペースな著者の研究に対して様々な視点から鋭い指摘と適切な助言を賜りました。副査である同研究室の佐藤慎司教授には、モデル一辺倒になりがちな著者に対して、工学的、現実的なご意見をいただきました。同じく副査である同研究室の下園武範准教授には、モデル開発の細やかな部分に関しての多くの助言をいただきました。同じく副査である登坂博行東京大学名誉教授、有川太郎中央大学教授、芳村圭東京大学准教授には、学位審査会で鋭いご指摘、ご指導、叱咤激励をいただきました。本論文は審査委員会の先生方のご指導によりまとめることができました。深く感謝いたします。

審査委員会の先生方以外の方からも、研究に関するご意見をいただきました。本論文の前半部は五洋建設株式会社技術研究所海岸海洋チームの佐貫宏氏との共著の研究内容を含んでおります。著者の関わる COI-S プロジェクトの所眞理雄プロジェクトリーダー、高橋桂子研究リーダーには特に気にかけていただき、ご意見をいただけて研究を進めることができました。また、海岸・沿岸環境研究室の山中悠資助教には研究内容および研究室生活において数多くのご教授を賜りました。研究室秘書の長田伸子氏には各種の手続きで大変お世話になりました。同研究室には毎年多くの学生、留学生が配属され、彼ら彼女らとの議論も自身の研究、学びに非常に有意義でした。合わせてここに感謝の意を記します。

本研究は JSPS 科研費 JP16J06386 の助成を受けたものです。また、本論文の 5 章 2 節においてモデルの検証に用いた実験データは、国土技術政策総合研究所河川研究部海岸研究室の加藤史訓氏より提供頂いたものです。ここに記して謝意を表します。

最後に、大学で研究する道を支え、応援してくれた家族に、心より感謝いたします。ありがとうございました。

## 参考文献

- [1] 油屋貴子・今村文彦：合成等価祖度モデルを用いた津波氾濫シミュレーションの提案，海岸工学論文集，第 49 巻，pp.276-280,2002.
- [2] 池澤広貴・下園武範・佐藤慎司：非静水圧を考慮した鉛直積分型堤防越流モデルの開発，土木学会論文集 B2 (海岸工学)，第 71 巻，pp.L7-L12,2015.
- [3] 今村文彦・松富英夫・都司嘉宣・松山昌史・河田恵昭・高橋智幸：1992 年インドネシア・フローレス島津波の現地調査とその解析，海岸工学論文集，第 40 巻，pp.181-185,1993.
- [4] 沿岸技術センター：「数値波動水路プログラム (CADMAS-SURF)」の公開のご案内，<http://www.cdit.or.jp/program/cadmas.html>，2014.
- [5] 大山巧・喜岡渉・多田彰秀：非線形分散波動場に対する数値モデルの適用性について，海岸工学論文集，第 40 巻，pp.11-15,1993 .
- [6] 大山巧・灘岡和夫：非線形不規則波動場を対象とした数値波動水槽の開発，土木学会論文集，第 429 号，pp.77-86，1991 .
- [7] 加藤史訓・諏訪義雄・鳩貝聡・藤田光一：津波の越流に対して粘り強く減災効果を発揮する海岸堤防の構造検討，土木学会論文集 B2 (海岸工学)，第 70 巻，pp.31-49,2014.
- [8] 金山進：強分散性非線形平面波浪場に対する多層モデルの提案，海岸工学論文集，第 44 巻，pp.41-45，1997 .
- [9] 木村一郎・細田尚：開水路せん断混合層の流れ構造に対する水深積分型修正ゼロ方程式モデルの適用性，水工学論文集，第 48 巻，pp.673-678，2004 .
- [10] 後藤智明: アーセル数が大きい場合の非線形分散波の方程式，土木学会論文集，第 351 号 II-2，pp.193-201, 1984 .
- [11] 後藤智明: 津波の線形，非線形および波数分散現象，水工学に関する夏期研修会講義集，35-B 巻，pp.B.9.1-20, 1999 .
- [12] 後藤浩・有馬勇人・石野和男・竹澤三雄・玉井信行：東北地方太平洋沖地震津波における海岸保安林の効果および被災に関する現地調査，土木学会論文集 B2 (海岸工学)，第 68 巻，No.2,

- pp.I.1366-I.1370,2012.
- [13] 港湾空港技術研究所：釜石港における津波による被災過程を検証，  
<http://www.pari.go.jp/info/tohoku-eq/20110401.html>，2011．
  - [14] 小谷美佐・今村文彦・首藤伸夫：GIS を利用した津波遡上計算と被害推定法，海岸工学論文集，第 45 巻，pp.356-360,1998.
  - [15] 佐貫宏・竹森涼・田島芳満・佐藤慎司：ビデオ映像と数値シミュレーションに基づく河川津波の氾濫解析，土木学会論文集 B2 (海岸工学)，第 69 巻，pp.196-200,2013.
  - [16] 島田正志：水理学 流れ学の基礎と応用，東京大学出版会，2008．
  - [17] 首藤伸夫・今村文彦・越村俊一・佐竹健治・松富英夫：津波の事典，朝倉書店，2007.
  - [18] 諏訪多聞・今村文彦・菅原大助：非線形長波モデルと流体粒子法による津波シミュレータの開発，土木学会論文集 B2 (海岸工学)，第 70 巻，No.2,pp.I.016-I.020,2014.
  - [19] 瀬戸正太：海岸堤防に対する津波越流メカニズムの解明と越流公式の提案，東京大学修士論文，2016．
  - [20] 張馳：洪水氾濫・土砂崩壊シミュレーションの安定性・信頼性改善手法の開発，東京大学博士論文，2006.
  - [21] 登坂博行：地圏水循環の数理 流域水環境の解析法，東京大学出版会，2006.
  - [22] 土木学会：海岸波動一 波・構造物・地盤の相互作用の解析法一，土木学会，海岸工学委員会，研究現況レビュー小委員会，1994．
  - [23] 内閣府防災担当：平成 24 年度予算概算要求・税制改正要望，2011.
  - [24] 林里美・Bruno Adriano・Erick Mas，越村俊一：建物破壊を考慮した陸域遡上モデルの構築による津波数値計算手法の高精度化，土木学会論文集 B2 (海岸工学)，第 70 巻，No.2,pp.I.346-I.350,2014.
  - [25] 林里美・越村俊一：映像解析による 2011 年東北地方太平洋沖地震津波の流速測定，土木学会論文集 B2 (海岸工学)，第 68 巻，No.2, pp.I.366-I.370,2012.
  - [26] 日野幹雄：流体力学，朝倉書店，1992．
  - [27] 平山克也：非線形不規則波浪を用いた数値計算と模型実験の港湾設計への活用に関する研究，

- 京都大学博士論文，2002.
- [28] 平山克也・平石哲也：ブシネスクモデルに適した砕波減衰モデル導入のための一考察，海洋開発論文集，第 20 巻，pp851-856，2004 .
- [29] 深沢壮騎・佐貫宏・田島芳満：木戸川河口部における津波映像分析と数値モデルに基づく津波の河川遡上の特性分析，土木学会論文集 B2 ( 海岸工学 )，第 70 巻，No.2, I.146-I.150,2014.
- [30] 深沢壮騎・田島芳満：非線形項の離散化手法の違いが河川津波の遡上速度に与える影響，土木学会論文集 B2 ( 海岸工学 )，第 71 巻，No.2, I.151-I.156,2015.
- [31] 藤間功司・後藤智明・首藤伸夫：非線形分散波式の精度の検討，土木学会論文集，第 369 号，II-5，pp.223-232,1986.
- [32] 松富英夫：移動跳水（波状段波非）発生条件の検討，水理講演会論文集，第 33 回，pp.271-276,1989.
- [33] 森智弘・下園武範：修正ブシネスク方程式による堤防越流モデルの構築，土木学会論文集，Vol.73，No.2，pp.I.13-I.18，2017.
- [34] 矢部孝・内海隆行・尾形陽一：CIP 法 原子から宇宙までを解くマルチスケール解法，森北出版，2003.
- [35] 米山望・森信人・三輪真揮：2011 年東北地方太平洋沖地震津波の釜石湾における挙動の数値解析，土木学会論文集 B2 ( 海岸工学 )，第 68 巻，No.2,pp.I.161-I.165,2012.
- [36] Baba,T., Takahashi, N. , Kaneda, Y. , Ando, K., Matsuoka, D., and Kato, T.:Parallel Implementation of Dispersive Tsunami Wave Modeling with a Nesting Algorithm for the 2011 Tohoku Tsunami, Pure and Applied Geophysics, 172,pp.3455-3472,2015.
- [37] Boussinesq, J. : Th ´ eorie des ondes et des remous qui se propagent le long d ’ un canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond. J. Math.Pures Appl., Vol.17, pp.55-pp.108,1872.
- [38] Fukazawa, S. and Tajima, Y.:Numerical Investigation of Tsunami Run-up along the Kido River Caused by The 2011 Tohoku Earthquakes, Asian and Pacific Coasts 2017, pp.280-



291, 2017.

- [39] Leonard, B.P. : A Stable and Accurate Convective Modelling Procedure Based on Quadratic Upstream Interpolation, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, No.19, pp.59-98,1979.
- [40] Madsen, P.A., R. Murray and O.R. Sørensen(1991) : A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics, *Coastal Engineering*, Vol.15, pp.371-388.
- [41] Mellor, G. L. : Users guide for a three- dimensional, primitive equation, numerical ocean model, in *Prog. in Atmos. And Ocean. Sci.* 53pp, Princeton University, 2003.
- [42] Nwogu, O. : Alternative Form of Boussinesq Equations for Nearshore Wave Propagation, *J. Waterway, Port, Coastal, Ocean Eng.*, 119(6), pp.618-638, 1993.
- [43] Peregrine, D.H. : Long waves on a beach, *J. Fluid. Mech.*, Vol.27, Part4, pp.815-827, 1967.
- [44] Shchepetkin, A. F. and McWilliams, J. C. : The regional oceanic modeling system(ROMS): a split-explicit, free-surface, topography-following-coordinate oceanic model, *Ocean Modelling*, Vol.9, pp.347-404, 2005.
- [45] Stoker, J. J. : *Water Waves*, Interscience Pub. Inc., p.567, 1957.
- [46] UNESCO:IUCG/IOC TIME PROJECT NUMERICAL METHOD OF TSUNAMI SIMULATION WITH THE LEAP-FROG SCHEME,1997.
- [47] Yabe, T. and Aoki, T.:A Universal Solver for Hyperbolic Equations by Cubic-Polynomial Interpolation. I. One-Dimensional Solver, *Comput.Phys.Commun.*,66,219,1991.