

論文の内容の要旨

論文題目

回転浮遊液滴のダンベル型大変形および分裂挙動の数理解析模型の構築

(Mathematical modeling of deformation and breakup of levitated two-lobed droplets in rotation)

氏 名 石川 晴基

回転浮遊液滴が強い遠心力によってダンベル型形状を取りながら回転し分裂に至る過程は、非接触無容器での液滴の制御や未知の流体物性値測定といった工学的応用の可能性を持っており重要である。本研究では、回転浮遊液滴のダンベル型大変形および分裂挙動を再現する数理解析模型を構築し、ダンベル型液滴の動的変形を簡易かつ精度良く解く解析手法の提案を行った。

微小重力環境下に球形状で安定に浮遊する液滴に角運動量を与えると重心軸周りの回転が誘起され扁平楕円形状に遷移するが、角運動量の総量を徐々に増加させると突如水平方向に伸び始め、次第に円断面のカプセル様形状に変化して安定となる。更に形状遷移後も角運動量を準静的に加え続けると、液滴は回転速度を遅めながら中央部が括れつつ長手方向長さを増す方向に変形してゆき、実液滴の場合は回転角速度が閾値を下回ると角運動量をそれ以上加えずとも長手方向軸半径が増大し分裂に至る。以上の形状遷移後から分裂に至るまでの一連の変形過程を、本論文では「ダンベル型大変形」と呼称する。

ダンベル型大変形および分裂過程は、分裂や形状変形の緩和過程を利用した液滴の物性測定、2個の同サイズの液滴の合体可能性の判定といった工学的な応用が大いに期待される実験対象であるが、応用先の多くはダンベル型液滴の非定常変形過程に関連するため、動的変形を精度良く解くことが求められる。ダンベル型回転浮遊液滴の大変形の定常回転解については、界面分割法による網羅的な数値計算が行われ、変形形状が回転角速度の関数として求まっている。一方で分裂間際の動的挙動については、当該手法がストークス領域に向くこと、低粘性液滴では分裂間際に中央断面付近にしばしば特異的な形状が現れることなどから、ダンベル型大変形の非定常分裂過程に関する知見は定常

回転解に比して多くない。

ダンベル型形状も含めた真の形状解や数値計算の解は、界面分割法により界面分割数と同程度の形状パラメータ数を持つ解で表現される。このようなダンベル型形状の解を用いると、回転による大変形の特徴量である最大伸展距離、中央断面半径、片珠重心位置、回転角速度、角運動量等の変形の特徴量もまた、同数の形状パラメータを用いて間接的に表現される。従って、例えば回転角速度の微小変化に対する回転角速度の応答を考察する際には界面分割数と同次元の連立方程式を解く必要があり、変形特徴量間の関係式を明示的に得ることや、変形特徴量の一つの微小変化に伴う他の特徴量の変化を定量的に追うことは容易でない。このような背景の下、上述の形状の特徴量を直截的に解く、変形の特徴量間の関係を明示的かつ簡潔な形式で得る、変形の特徴量の時間変化を記述する微分方程式を導出して動的変形を解くなどの目的の元、あるひとつの変形過程を近似的ではあるが高精度かつ簡潔に表現する数理解析模型の構築に関する様々な研究が進められてきた。数理解析模型の構築に際し、液滴界面を既知の数学関数で幾何学モデル化を行う必要があるが、界面形状関数の設定に際し液滴体積、液滴界面の平均曲率、慣性モーメント、片珠重心位置の積分等が厳密に計算できる「良い性質」を持つ関数を用いる必要がある。変形初期の偏平楕円形状の場合は回転楕円体を用いて容易に数理解析模型が構築できる一方で、ダンベル型大変形に際し中央断面付近が平らなカプセル様形状、中央部が凹んだダンベル型形状、分裂極限の ∞ 様形状までの多様な形状を取るため、単一のパラメータ付き数学関数でダンベル型大変形を網羅的に模擬できる数学関数が見出されておらず、ダンベル型大変形の数理解析模型の構築に関する知見は少ない。

本研究では、ダンベル型大変形の多様な形状を数学曲線「カッシーニ曲線群」で模擬することで、低粘性の回転浮遊液滴のダンベル型大変形および分裂過程を数理的に再現する単一の液滴模型を構築した。数学関数「カッシーニ曲線」は多項式から成る平面上の閉曲線であり、2個の形状パラメータの値の変化により上述のダンベル型変形形状を全て内包する。カッシーニ曲線を形状境界条件に設定した「カッシーニ液滴」は、前段落の「良い形状関数」の条件を満足している。また、ダンベル型大変形を体積保存により1個の可変形状パラメータのみを含む数学関数で記述することで、形状パラメータによる形状の微分が可能となり、形状変形を連続的かつ直感的に追うことが出来る。

以上を踏まえ、本研究の成果を各章ごとに述べる。第2章では、本研究で対象とするダンベル型大変形液滴を定義し、かつ数理解析模型の構築の際に考慮する形状境界条件と液滴構成流体が満たすべき条件を明確に定め、ダンベル型液滴の数理解析模型「カッシーニ液滴」の定式化を行った。ダンベル型液滴が非圧縮のニュートン流体であること、外力無し、表面のラプラス圧力境界条件、液滴形状と流動構造のダンベル長手軸対称性を前提条件とし、ダンベル型液滴を一般の断面半径分布境界条件で表現したうえで、ナビエ・ストークス方程式の液滴半分の体積積分によりダンベル型液滴長手方向の応力

バランス式と角運動量変化式を導出した。以上の導出は、中央断面の応力の積分に級数展開の1次近似を含むものの、物理的に厳密であり、断面半径分布を適切に定義することで任意の円断面のダンベル型回転浮遊液滴に適用できる。しかし換言すれば、第2章で導いたダンベル型大変形の回転・変形の支配方程式は液滴界面形状を境界条件として含むということであり、殊に動的変形を解くためには界面形状を適切に設定する必要がある。本章では「カッシーニ曲線」を中央断面半径と最大伸展距離が形状パラメータとなるように定義して液滴界面境界条件に設定し、前述の支配方程式に代入することで中央断面半径、最大伸展距離、回転角速度の時間変化を直截的に解くための支配方程式を導出した。

第3章は、2章で導出したカッシーニ液滴模型の妥当性の確認と、カッシーニ液滴模型による本研究独自の知見から成る。第2章の支配方程式から「カッシーニ液滴」の定常回転状態を長手方向変形距離ごとに計算し、定常回転解の線形安定性解析により角運動量が最大の点で解が不安定化することを示した。カッシーニ液滴の以上の性質は回転浮遊液滴のダンベル型大変形の真の解が持つ基本的な性質であるため、液滴模型は現象を再現する妥当な解析模型であることが示せた。定量的にも、有限要素解析による形状解や先行実験の回転・回転角速度履歴との最小二乗回帰により液滴模型の形状決定定数を定めることで、カッシーニ液滴模型の定常回転解は安定な伸展範囲で一般のダンベル型液滴が辿る伸展軌道を近似的に非常に良く再現することを示した。また非定常分裂過程に関しては、カッシーニ液滴の分裂極限が極低粘性液滴の分裂間際の形状を非常に良く近似することを踏まえ、極低粘性液滴の分裂過程の理論解析を試みた。安定限界以後に角運動量が保存される仮定の元で長手方向変形距離-回転角速度の変化軌道を描き参照実験と整合することを示したほか、同仮定の元で応力バランス式の厳密解を導出し、計算される分裂時間が参照実験の分裂時間スケールと整合することを示した。この理論解を利用すれば、分裂時間の予測、非定常分裂過程における累積回転角度の計算、分裂時の重心速度の計算がその例であり、分裂時の飛翔速度・飛翔角度の予測や分裂小液滴の再捕集といった工学的応用も可能となる。加えて、変形の支配方程式の摂動展開による近似解の構成や分裂過程の慣性レイノルズ数の評価を通じ、「カッシーニ液滴」を用いた分裂挙動の解析に適用可能な粘性範囲を議論した。以上本章で、カッシーニ液滴が非粘性の回転浮遊液滴のダンベル型大変形および分裂過程の理論的再現に適した液滴解析模型であることが示された。

第3章までは極低粘性のダンベル型回転浮遊液滴の非定常分裂挙動の解析を行ったが、粘性液滴の分裂間際には中央断面付近に液糸が形成され、カッシーニ液滴模型の範疇から外れる。第4章では液糸部を双曲線関数により数学的に表現し、カッシーニ液滴と滑らかに結合させることで液糸付き拡張カッシーニ液滴模型を構築した。液糸付きダンベル型形状を収束計算により構成し、応力バランス式を角運動量保存の元で数値的に解いた結果、参照実験論文における液糸付きダンベル型液滴の最大伸展距離-回転角速度の

軌道を定量的に再現したほか、幾つかの粘性で分裂時間が参照論文の時間スケールと整合することを示した。

本研究の液滴解析模型「カッシーニ液滴」は、ダンベル型回転浮遊液滴の形状の真の解ではないものの、僅かな誤差を除いて真の形状を非常に良く近似し、長手方向の変形距離の増大に伴う回転角速度の減少履歴を定量的に誤差少なく再現し、極低粘性液滴の動的分裂挙動の理論解析に成功した。本研究のダンベル型回転浮遊液滴「カッシーニ液滴」の液滴界面形状として設定したカッシーニ曲線は、実際の浮遊液滴のダンベル型変形形状との類似性から定めた数学関数であり、物理的、あるいは流体力学的な根拠を元に導入した関数ではない。しかしながら、以上のごとくの非常に単純な数学曲線からダンベル型回転浮遊液滴の伸展および分裂過程が近似的に非常に高精度に再現されることは非自明な知見である。

以上要するに本研究は、浮遊液滴が遠心力により小滴に分裂する過程全体に関して、変形特徴量の時間発展を直接的かつ直観的に解くことが出来る数理解析模型を提案し、その有効性と妥当性を示したものである。従来の数値計算手法では分裂形状の特異性ゆえ計算が困難であった液滴の分裂過程に関し、これを簡易かつ高精度に解く新たな計算手法の提案を行ったものであり、流体力学分野での様々な応用も期待できる。