

博士論文(要約)

回轉浮遊液滴のダンベル型大変形および  
分裂挙動の数理解析模型の構築

(Mathematical modeling of deformation and  
breakup of levitated two-lobed droplets in rotation)

石川 晴基

# 目次

第 1 章	序論	1
1.1	研究対象としての浮遊液滴	1
1.2	浮遊液滴変形の研究史	2
1.2.1	回転浮遊液滴大変形の理論史および実験史	2
1.2.2	Brown と Scriven による理論研究 (1980 年発表)[1]	3
1.2.3	実験技術の発展および実液滴のダンベル型変形の概観	5
1.2.4	数理解析モデルの構築の重要性	7
1.3	本論文の構成	8
第 2 章	ダンベル型大変形の数理解析モデル、「カッシーニ液滴モデル」の数学的構成 <sup>1</sup>	10
第 3 章	数理解析モデル「カッシーニ液滴モデル」の支配方程式の理論解析 <sup>2</sup>	11
第 4 章	高粘性液滴の液滴分裂過程への応用 <sup>3</sup>	13
第 5 章	結言 <sup>4</sup>	14

---

<sup>1</sup>本章の内容は投稿中、審査中につき、5 年以内 (2023 年 3 月まで) に全文公開予定

<sup>2</sup>同上

<sup>3</sup>本章は第 2 章、第 3 章の内容と大きく関連するため、同様に 5 年以内 (2023 年 3 月まで) に全文公開予定

<sup>4</sup>本章は、全文の内容から第 4 章までの詳細に関連する部分を省いた物である。全文は同様に 5 年以内 (2023 年 3 月まで) に公開予定

# 第1章 序論

## 1.1 研究対象としての浮遊液滴

国際宇宙ステーションの室内で水をこぼすと、どのように空中に放出されても変形を繰り返しながら次第に球形にまとまり、空中を静かに浮遊するようになる。このように、有限の体積と閉じた界面を持ち、表面張力によって形状が保持された流体を「浮遊液滴」と呼称する。浮遊液滴は外的要因によって容易に運動し伴って形状変形を起こすが、その複雑多様さゆえ、様々な形で工学的に利用されてきたほか (例えば [2])、流体力学の重要な研究対象になってきた [3]。浮遊液滴は、水面への物体の投入時の飛び散り、雨滴の落下、スプレーによる液体噴霧など、日常では極めて短い時間スケール内でしか観測されないが、低軌道上の微小重力環境では極めて長時間浮遊させることが出来る。従って微小重力環境下に長時間保持された浮遊液滴の運動は新たな宇宙環境利用対象として注目され、1980年スペース・シャトルの運用開始に端を発する有人宇宙滞在の長期化に伴い、低軌道上で浮遊液滴を利用した様々な実験が行われてきた (スペース・シャトルでの例 [4, 5]、国際宇宙ステーションでの例 [6])。浮遊液滴の変形と運動の理解は、無容器による非汚染の化学反応の実現 [7] や微小重力下の均一な結晶生成 [8, 9] への応用が期待されていることから、化学工学や創薬の観点からも微小重力下の浮遊液滴が注目されており、宇宙実験が行われてきた。地上においても、浮遊液滴が現れる環境は工業製品をはじめとして多く見られる。インクジェットプリンタは身近な例であり、生成部での液滴形状や噴霧部での液滴速度を理解し最適な液滴を噴霧させることはプリンタの性能向上に大いに貢献することから、当該研究が活発に進められている [10]。浮遊液滴研究の工学対象への応用の他の例としては燃料滴の燃焼が挙げられ、国際宇宙ステーション内での実験も行われている [11]。このように、工学においては浮遊液滴の挙動の理解が性能向上に繋がる対象は数多い。浮遊液滴の変形および運動に関する研究は、流体力学を中心とした学術的観点からの研究が活発に行われてきた一方、工学の諸分野への波及を見すえた応用研究も近年活発に行われ、互いに補完しあいながら発展してきた。

浮遊液滴の変形および運動の理解によって得られる知見は、広い物理分野への応用の可能性が考えられる。代表的な例は、テクタイト、すなわち隕石同士の衝突によって形成される天然ガラス質の形状分類である。隕石同士が方向が異なる速度ベクトルを持って衝突すると、熔融し流体になると同時に角運動量が生じて回転し始めるが、次第に定常回転解に落ち着き一定時間回転した後固化し形状が保存される。固化した隕石の形状は球や回転楕円体形状も含まれるが、本研究の対象であるダンベル型形状のものも存在することが確認されている [12]。次節に詳述するように、浮遊する静止した球状液滴に角運動量を与えると定常回転角速度に応じ、扁平楕円体、カプセル型形状、ダンベル型形状を含む多様な形状を取りながら定常回転することが理論的・数値的に知られているが [1]、テクタイト形状はこの生成過程で得られたと考えられる。Baldwin らは実際に地上の実験室内で固化性のワックスを浮遊させ、上記の研究の手続きに従って回転変形させ、固化するまでワックス液滴の定常回転を維持することで、様々な形状のテクタイトを模造することに成功している [13]。また Butler ら

は流体変形を数値的に解いてテクタイトを再現することにも成功している [14]。物理学の他分野との関連の例として、電荷を持たず角運動量を持つブラックホール (Kerr black holes) の変形形状の解析が挙げられる。一般相対論の重力場方程式はあるアナロジーの元で流体力学と同一視され [15]、回転ブラックホールの事象の地平面の形状が回転液滴の変形に類似した手法で考察されている [16]。

以上で述べたように、浮遊液滴の外的要因による変形の詳細な理解は、流体力学は勿論のこと、工学、物理学、化学、惑星地球科学など様々な学問範囲に波及しうる重要な研究対象である。しかし浮遊液滴の形状変形はその複雑多様さと非線形性により全容の解明は容易でない。従って多くの研究は特定の一つの変形状態に焦点を当て、それを理論・実験・あるいは数値的に解析することを目的としている。本研究でも回転浮遊液滴のダンベル型大変形および分裂挙動に焦点を当て、数理解析モデルの提案を通じて理論的な解析を行ってゆく。

## 1.2 浮遊液滴変形の研究史

### 1.2.1 回転浮遊液滴大変形の理論史および実験史

本節では、浮遊液滴変形の研究の歴史を概観し、本研究の位置づけを示す。回転浮遊液滴の工学的利用のためには回転浮遊液滴の変形挙動や付随して生じる内部流動の理解が必要であり、そのための研究が行われてきた。浮遊液滴は小サイズ、短時間スケールながら日常でも観測される現象であるため、その変形に関する理論研究の歴史も長い。回転浮遊液滴の大変形に関する理論研究の古い例はガス惑星が重力平衡形状を保ちうる自転角速度の限界に関する研究である。ガス惑星の形状を重心軸周りに回転する楕円体と仮定し、等圧面を定義して表面形状と同一視することで、扁平形状と回転角速度の関係が計算されている。楕円体の3軸のうち回転軸に垂直な2軸の軸長が一致する楕円体 (マクローリン楕円体) は18世紀にマクローリンやラプラスらによって、3軸長が全て異なる楕円体 (ヤコビ楕円体) に関しては19世紀前半にヤコビらによって議論され、それぞれの場合について重力により形状を保つための自転速度の限界値が計算されている。以上は Lamb 著 "Hydrodynamics 第6版" [17] や S. Chandrasekhar による概説論文 [18] に纏められている。

回転浮遊液滴の変形に係る実験的研究の古い例として J. A. F. Plateau により19世紀中に実施された油滴の水・エタノール溶液への投入実験が挙げられる。左記文献中では、初期に静止した球形状の油滴に実験装置中の回転軸上に保持しシャフトを用いて回転を加えることで、輪のような形状や、2回転対称性を持つダンベルないしアレイ状の形状に変形することが確かめられている [19]。当該研究は外部流体の運動の油滴変形への影響を排除できないなどの問題点もあるが、形状が回転軸対称でない回転浮遊液滴形状を見出した先駆的な研究である。当実験は後年 T. G. Wang によって再現されるとともに、Plateau の実験系で3回-回転対称性や4回-回転対称性を持つ回転変形形状が見出されることも示した [20]。

回転浮遊液滴の形状変形に関して19世紀までに様々な研究が行われていることを上に述べたが、加えて Rayleigh 卿による1879年の研究、H. Poincaré による1885年の研究、S. Chandrasekhar による1965年の研究を挙げたい。Rayleigh 卿は液体の噴流の先端が波打つように変形し液滴が生成する過程を理論的に研究するなかで、球形状の静止した浮遊液滴の界面振動の固有振動数が

$$\omega^2 = n(n-1)(n+2) \frac{\gamma}{\rho R_0^3} \quad (1.1)$$

で与えられることを理論的に示した [21]。ただし  $\gamma$  は流体の表面張力係数、 $\rho$  は流体の密度、 $R_0$  は液滴の初期半径である。 $n$  は球形状液滴に固有振動が誘起する変形に関連する定数であり、 $n$  次振動は  $n$  回-回転対称形状を誘起する。H. Poincaré は回転浮遊液滴の大変形の平衡形状を包括的に解析する先駆的な研究を行った。Poincaré は研究の中で、導出した回転浮遊液滴の大変形の平衡解が 2 種の性質の異なるグループに分類されることを示した。うち一方は以前から既知であった偏平楕円形状解であり、他方は以後の研究で「ダンベル型変形」ないしは "two-lobed" と呼ばれる、2 回-回転対称性を持つ解である [22]。S. Chandrasekhar は回転浮遊液滴の軸対称偏平形状に関して、液滴形状を理論的に求めると共に、形状の安定性をはじめて議論した。論文中で Chandrasekhar はダンベル型形状への遷移点の無次元化回転角速度として知られる  $\omega/(\sqrt{8\gamma/(\rho R_0^3)}) = 0.559$  を導いている [23]。

### 1.2.2 Brown と Scriven による理論研究 (1980 年発表)[1]

19 世紀までに行われた実験研究、理論研究の多くは個別の変形状態を扱っていたが、20 世紀後半には回転浮遊液滴の平衡形状を定常回転角速度の関数として数値計算により包括的に求める研究が行なわれた。中でも非常に重要な物が 1980 年に Brown と Scriven によって発表された、界面の有限要素分割により平衡形状を求めその安定性を判定する研究である (R. A. Brown and L. E. Scriven. *The Shape and Stability of Rotating Liquid Drops. Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 371(1746):331-357, 1980.[1])。以下に当該論文の要旨を記す。

論文中で Brown と Scriven は、回転浮遊液滴の定常回転解を体積保存の元でポテンシャル関数を最小化する形状と定義し、回転角速度を固定した場合と角運動量を固定した場合のそれぞれについて変形形状を回転角速度の関数として求めた。変形形状の求解は、球面座標内で定義された液滴界面を緯度・経度それぞれで有限要素に分割することからはじまる。分割面それぞれで基底関数を定め、これらの線形和で連続かつ至るところ滑らかな波打ちのない界面形状の解を構築する。各重み付けパラメータは未知であり、その値の組は角速度一定の場合はラグランジアンを最小に、角運動量固定の場合はルジャンドル変換した関数を最小化するように決定される。最終的にポテンシャル関数の未知パラメータによる停留条件に帰着するため、未知パラメータの数、すなわち分割数と同程度の本数の連立方程式を解くことになる。Brown と Scriven は上記アルゴリズムによる数値計算を 324 次元で実行し、定常回転する回転浮遊液滴の平衡形状を回転角速度の関数として網羅的に得ることに成功した。図 1.1 左に、Brown と Scriven による原論文の図 6 のグラフを示す。定常回転する浮遊液滴の変形が最大伸展距離、すなわち形状変形を起こした液滴の界面上の各点と回転軸の水平距離の最大値で表現され、定常回転角速度の関数で得られている。同図中の最大伸展距離および回転角速度はそれぞれ無次元化されており、参照定数は初期球液滴の半径  $R_0$  および Rayleigh 卿による球面振動の固有振動数の最小値

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{8\gamma}{\rho R_0^3}} \quad (1.2)$$

である。同図に示したように、Brown と Scriven による定常回転解は 4 本の分枝に分けることが出来、それぞれ回転軸対称形状 (Axisymmetrical shapes) の分枝、回転軸に関して 2 回-回転対称形状 (2-lobed shapes) の分枝、3 回-回転対称形状 (3-lobed shapes)、4 回-回転対称形状 (4-lobed shapes) の分枝である。本研究では特に 2 回-回転対称形状 (2-lobed shapes)

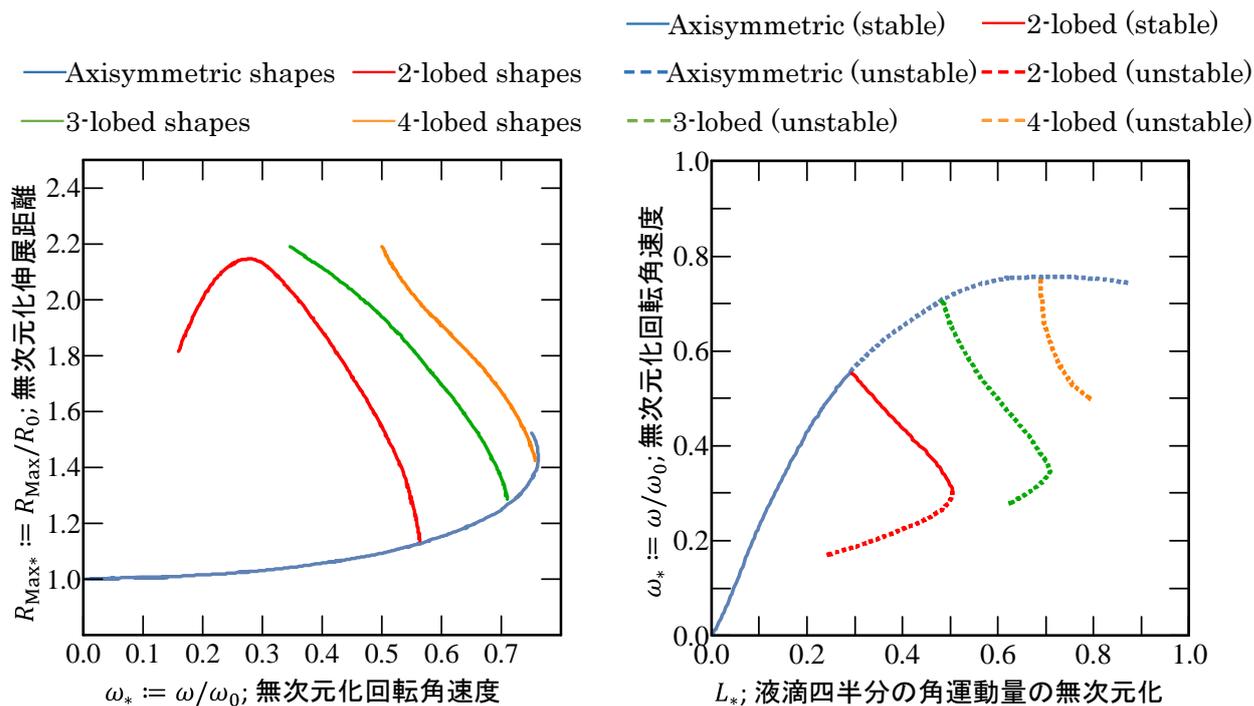


図 1.1: 図左: Brown and Scriven (1980) [1] による、一定角速度で回転する浮遊液滴の水平方向伸展距離の解。文献 [1] の図 6 のグラフから数値を読み取り作成。解の分枝の色分けや分枝名の併記は筆者が行った。図右: Brown and Scriven (1980) 定常解の安定性を分枝ごと、及び分枝内で判定したもの。文献 [1] の図 4 のグラフから数値を読み取り作成。実線は安定な解を表し、点線は不安定な解を表す。解の分枝の色分けや分枝名の併記は筆者が行った。

の分枝の一部を「ダンベル型大変形」と呼称している。本研究では特に第 2 章以降、断面が円になってからの状態を「ダンベル型液滴」としており、Brown と Scriven による定常回転解の 2 回-回転対称形状 (2-lobed shapes) の分枝でも遷移点直後の形状は円断面ではない [[1] Figure 5 (a)]。

Brown と Scriven による原論文では、各分枝への分岐条件も数値的に求められている。変形の有限要素解析の過程で微小擾乱に対する固有値が各分割点で計算され、液滴の任意の点に加わる擾乱が成長するか否かを判定することが出来る。図 1.1 右に、原論文の図 4、Brown と Scriven による定常解の安定性判定図を示す。図中の曲線は定常解の各分枝を表し、実線が安定な定常解、破線が不安定な定常解を表す。Brown と Scriven により論文中で定義された回転浮遊液滴は図 1.1 右の実線を辿りながら形状が変化するが、実線上には 2 個の安定判定分岐点が存在することが論文中で示されている。第一に回転軸対称形状とダンベル形状の分岐点であり、回転軸対称形状型液滴の回転角振動数が  $\omega/\omega_0 \simeq 0.559$  以降回転軸に垂直な一方方向に液滴を伸ばす微小擾乱に対して不安定になり、以後 2 回-回転対称形状 (2-lobed shapes) の分枝へと移る。ダンベル型大変形の分枝上の定常解は、角速度が減少しつつ最大伸展距離が伸びる傾向を示すため、両者の拮抗により液滴の角運動量が増加から減少に転じる点が存在する。角運動量が最大になる点で固有値が 0 になり不安定に転じることは原論文で示されている。

以上が Brown と Scriven を著者として 1980 年に出版された論文の要約である。手法の

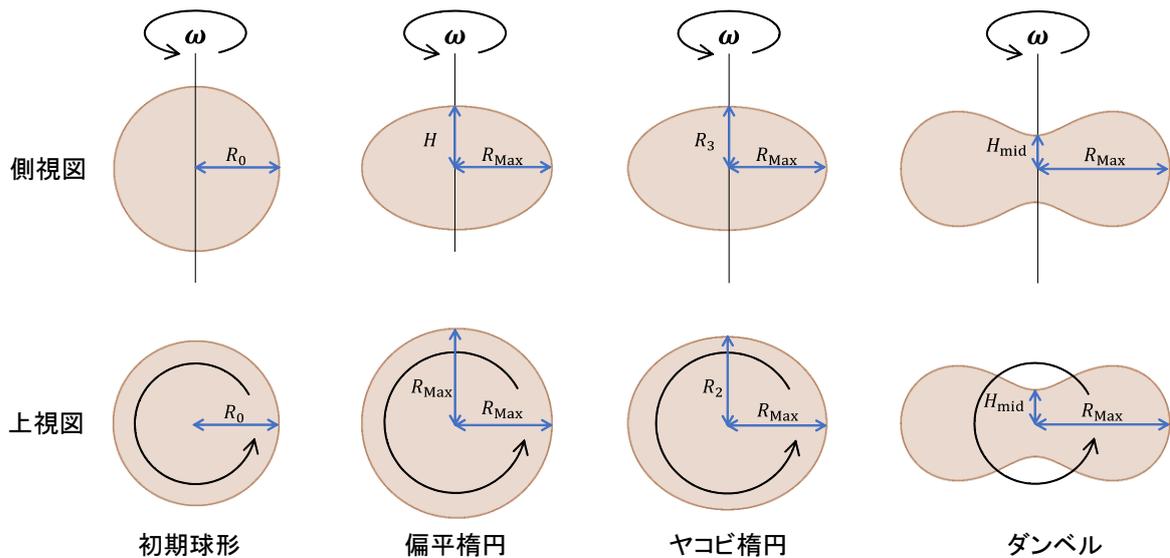


図 1.2: 典型的な回転浮遊液滴の変形挙動。初期に球形状を取る浮遊液滴に外力トルクを加えると、扁平化したまま安定になり、扁平度に応じた回転角速度で回転する(「扁平楕円」)。ダンベル型変形への分岐点  $\omega/\omega_0 \simeq 0.559$  を超えても、実液滴は直ちにダンベル型形状に遷移せず、ヤコビ楕円体型の過渡状態に移る(「ヤコビ楕円」)。ヤコビ楕円型形状は次第に回転軸に垂直な形状軸対称軸を持つダンベル型形状液滴に遷移し、ふたたび安定な定常回転を行う(「ダンベル」)。ダンベル型定常回転解は準静的に回転角速度を減らしながら伸び、最終的に非定常な分裂過程に至る。

詳細や有限要素解析で得られた液滴形状は原論文 (R. A. Brown and L. E. Scriven. The Shape and Stability of Rotating Liquid Drops. *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 371(1746):331-357, 1980.[1]) を参照されたい。本論文は回転浮遊液滴の平衡形状を定常回転角速度の関数として包括的に求めた先駆的研究であり、後続する数値的研究や理論的研究の妥当性の指針になっている。本研究で行うダンベル型大変形および分裂挙動の数理解析モデルの構築でも、妥当性の検証として Brown and Scriven (1980) 図 6 および図 4 の再現を行う。

### 1.2.3 実験技術の発展および実液滴のダンベル型変形の概観

液滴変形の数値計算手法の発展の一方、液滴を浮遊させる実験技術も 20 世紀後半以降著しく発展し、1-10 mm オーダーの大きさの液滴を地上でも安定的に浮遊させることが可能となった ([24] に概説)。代表的な液滴浮遊法として、磁力を利用するもの [25, 26]、静電気力を利用するもの [27]、超音場を利用したもの [28] が挙げられる。浮遊法ごとに特徴があり、超音波浮遊法では定在波の波長に大きさが制限されるものの非常に様々な流体の浮遊が可能であり、静電浮遊法は帯電可能な流体や金属球を浮遊させることが出来 [29]、磁気浮遊法は数 cm サイズの液滴の浮遊 [30] や生体の浮遊 [31] も可能である。以上の浮遊技術を実験対象や目的に応じて適切に選びながら様々な浮遊実験が行われ、浮遊液滴の大変形挙動に関する実験的知見が蓄積してきた。特に回転浮遊液滴の扁平楕円化、ダンベル型大変形へ

の遷移、ダンベル型液滴の大伸展の実験的挙動に関する知見は多い。ダンベル型大変形の定常形状解への遷移条件やダンベル型大変形の伸展軌道は 1980 年に発表されたが、低軌道上での実験や静電浮遊実験でダンベル型大変形挙動への遷移やダンベル型大変形の伸展が Brown and Scriven の分岐条件に非常に良く適合し、実験上のダンベル型大変形形状の伸展が Brown and Scriven の解軌道 (図 1.1 左、赤線) を辿りながら伸展し、次第に分裂に至ることが確認されている (低軌道上の例 [5]、静電浮遊の例 [32])。ここで注意しておきたいのは、実液滴のダンベル型大変形形状の伸展は Brown and Scriven の解軌道に沿って起こるが、分裂間際には定常解軌道から外れた下に凸な伸展軌道を辿る点である ([5] Figure 7, [32] Figure 11)。また実液滴は分裂時、構成流体が粘性を持つ場合、中央断面付近に細い糸状の流体架橋を形成し、ダンベル型を構成する 2 個の珠が液糸架橋で結合された形状となる ([5] Figure 10 (h)-(j)、[32] Figure 7 G)。液糸架橋の保持性や液滴架橋の伸展速度などは液滴の粘性に依存するため、これを利用した流体の粘性測定も試みられている [2]。

ここで実在の回転浮遊液滴の典型的な変形挙動を概観しておきたい。静止した球形状の典型的な浮遊液滴に角運動量を徐々に加えると扁平回転楕円体に変形し、更に角運動量を増大させると図中の青線を辿りながら回転角速度が増大し扁平度が増してゆく (図 1.2 「扁平楕円」)。更に回転角速度が増大し  $\omega/\omega_0 \simeq 0.559$  を超えると、角運動量の注入具合に応じて扁平楕円を保つ場合があるが、いずれは扁平楕円を一方に伸ばす方向の微小擾乱が成長し、一時的にヤコビ楕円体形状を取る (図 1.2 「ヤコビ楕円」)。ヤコビ楕円体形状は図 1.1 右の不安定な軸対称形状とダンベル型形状の解の中間にある過渡状態であり、次第に円断面のダンベル型変形の初期状態に遷移する。ダンベル型大変形の初期状態は中央部の括れが非常に小さく、しばしば「カプセル形状」と形容される。以後、角運動量の準静的な増大に伴い、定常回転角速度を遅めながら伸展を続け (図 1.2 「ダンベル」)、Brown and Scriven のダンベル型定常回転解の安定限界の角速度の値を下回ると非定常的な進展を見せ有限時間内に分裂に至る。分裂過程における変形時定数は粘性に比例し、高粘性の液滴の場合は分裂時に液糸架橋が形成される。本段落の内容は文献 [2, 5, 13] の図や本文を参考にした。

以上の典型的なダンベル型大変形への遷移および分裂に至る一連の挙動は、スペース・シャトル内の実験や静電浮遊実験の帯電量が少ない場合、すなわち液滴の帯電や磁化が変形に干渉しない実験状態の物を示している。本研究で数理解析モデルを構築し変形挙動の再現を試みるのは上記の場合であるが、一般に浮遊液滴のダンベル型大変形液滴の帯電や磁化の影響を受けることを静電浮遊の一例から確認しておきたい。回転浮遊液滴の変形・分裂挙動の帯電強度依存性は、L. Liao and R. J. A. Hill “Shapes and Fissility of Highly Charged and Rapidly Rotating Levitated Liquid Drops”, *Phys. Rev. Lett.* 119, 114501 (2017) (文献 [33]) に纏まっている。左記文献中では静電エネルギーと表面張力ポテンシャルの比である帯電パラメータの幾つかの値における液滴の回転による変形・分裂の実験挙動が示されている。帯電パラメータ 0.39 程度までは、無帯電液滴と比較した場合に回転角速度が減少するものの、同様のダンベル型変形形状を辿りながら分裂に至ることが示されている。対して帯電パラメータが 1 に近づくと、ダンベル型変形形状は観察されず、涙型形状を取りながら分裂に至る。文献 [33] 中では、回転時のダンベル型大変形形状の出現の有無や分裂時の液滴形状がダンベル型か涙型かの条件が帯電パラメータの値ごとに調べられ、両条件の閾値も実験的、数値的に得られている。本研究で構築するダンベル型大変形および分裂の数理解析モデルでは、遠心力、コリオリ力、オイラー力以外の外力、すなわち重力、静電気力、磁力などは無視するため、前段落までに述べた理想的な状況におけるダンベル型大変形挙動に着目していることになる。従って上記の理想的でない変形状態は本研究の対象外である。

#### 1.2.4 数理解析モデルの構築の重要性

回転浮遊液滴の真の変形形状は無数個のパラメータを用いて記述される数学的に複雑な関数であるため、その変形挙動の解析は、数値的な近似解の構成と液滴の幾何学的解析モデル化に大別される。前者は Brown and Scriven (1980) [1] が、後者は自転するガス惑星の研究 [18] が好例であろう。

数値計算による回転液滴変形形状の計算は主に界面の有限要素分割によって行われる。有限要素解析は非常に有用かつ汎用性が高い計算手法であり、Brown and Scriven (1980) [1] 以後も回転浮遊液滴の形状変形解析が多数行われてきた。例えば Benner ら (1991) は、液滴の回転軸に垂直な断面の形状に焦点を当て、Brown らの論文と類似した手法で断面の平衡形状を解析した結果、ダンベル型の断面が同様に定常解になるほか、中央部が液糸状に細い断面形状解が存在することや断面形状に関する解の新たな小分岐が存在することを示した [34]。以後も界面有限要素分割による平衡形状の数値計算が、流動、変形、界面再分割の計算を工夫しながら様々な問題に対して実行されている。流動および変形の更新部分は、構成流体がストークス流の仮定の元でストークス方程式を解いた結果を利用するものも多く、長い時間スケールで起こる変形が精度良く解かれている [35, 36]。界面分割法は回転浮遊液滴の変形の広い範囲を統一的に扱うことが出来、しばしば未知の定常回転解の発見に資することもある。例えば Heine (2006) [37] では、Brown and Scriven (1980) の解の範囲を超えた様々な変形の分岐が得られている。左右の珠の質量に差のあるダンベル型形状の分岐はその代表例である [37]。

界面分割法は汎用性の高い手法であるが、以下の理由から動的な解析や特異性を持つ形状、例えば低粘性のダンベル型液滴の分裂間際の挙動には適用が難しい。第一に表面のメッシュ分割において、精度を得るためには鋭い括れを見せる中央部付近の近似に必要な分割数が飛躍的に増大し、計算コストが高くなる。第二に、界面分割法は変形の更新の際にストークス方程式の求解を行っている場合も多く、非定常分裂挙動は流動のストークス領域から外れ、計算スキーム上適用が難しくなると考えられる。他のスキームでも、定常回転解の伸展や遅い形状伸展、すなわち時定数が長い変形の扱いに特化した物が多く、実際に参考文献 [13, 14] では、オイラー・ラグランジュの手法で界面分割を行うためか、数値計算は回転形状が安定な範囲に留まり、非定常な分裂過程に入ると数値計算に失敗することが報告されている。

一方で液滴の幾何学モデル化による数理解析モデルの構築は、液滴形状を幾つかの形状パラメータを含む既知の数学関数で近似し、液滴変形を形状パラメータ変化の支配方程式の解析に落とし込む方法である。支配方程式の導出の過程で液滴体積、慣性モーメント、表面積、平均曲率等の諸量を計算するため、これらが形状曲線から数学的に厳密に計算できることが「良い」液滴モデルかどうかの指標となる。液滴のモデル化に関する先行研究は、回転軸対称偏平形状に関しては、数多く存在する。回転軸対称偏平形状の浮遊液滴は回転楕円体  $(x/b)^2 + (y/b)^2 + (z/a)^2 = 1, ab^2 = R_0^3$  ( $z$  軸が回転軸の場合) でモデル化され、慣性モーメントや表面積が数学的に厳密に求まるため、例えば解析力学の手法により軸半径  $a$  の微分方程式を導出することが出来る (例えば [38])。以上の例のように、様々な手法で導出される「変形」の支配方程式は、形状の再定義や流動が支配方程式に組み込まれるため、時定数が小さい動的挙動の計算も破綻なく行えるほか、モデル化の工夫次第で変形の厳密解を理論的に扱うことも出来る。文献 [38] では、微小振動近似の元で軸半径  $a$  の微分方程式の非線型波動解析を行い、回転する偏平楕円形状液滴の界面微小振動の周波数が回転角速度と微小振動の振幅に応じて変動することが示された。

幾何学モデル化による数理解析モデルの構築は、形状を非常に良く近似する数学関数が判っている場合に非常に有効であり、多くの場合形状パラメータ値変化の支配方程式を解くことで回転浮遊液滴の動的挙動を高精度に近似できる。形状パラメータは多くの場合最大伸展距離等の変形特徴量であるため、変形特徴量や回転角速度の時間発展を直接的に解ける。数値計算で得られる解が無数個のパラメータの時間変化に帰着されるのに対し、数理解析モデルは形状モデル化の工夫次第で少ない個数の形状パラメータで変形が精緻に記述できる。形状関数により計算された体積等の保存量により形状パラメータ同士が関連付けられるため、変形特徴量や回転角速度の幾つかが微小変化した際の他の量の応答を容易に計算できる。またこれに関連し、実験挙動等を再現する妥当な液滴模型を用いれば、回転角速度の変化に伴う液滴全体の変化が非常に直観的に理解できる。数理解析モデルを利用した動的解析では少数の変形変数の時間発展を解いてゆき、液滴形状は数学関数で明示的に与えられるため変形時間発展の解析における形状の再定義は行われぬ。ゆえに計算コストが低いほか、液滴模型の範疇では形状特異性ゆえの計算エラーは発生しない。加えて、模型構築の工夫次第で支配方程式の動的挙動の理論解析が行いやすいのも大きな特徴である。

本研究ではダンベル型大変形液滴の定常伸展および非定常分裂挙動を理論的に解くことを目標に、ダンベル型大変形を非常に精度良く近似する液滴の数理解析モデルの構築を試みる。扁平楕円形状の場合は形状の幾何学的設定が容易であり、数理解析モデルの構築により様々な動的解析が行われてきたが、対照的にダンベル型の場合は形状関数の設定が非常に困難であり、単一モデル化による動的な解析の例はない。ダンベル型大変形のモデル化には、変形初期のカプセル様形状から分裂間際の中央部括れが著しい形状までを網羅的に表現する単一の数学関数が必要であるが、現在までそのような数学関数は見出されていなかった。先行研究では、ダンベル型大変形を2個の楕円体と円柱様架橋構造の滑らかな結合でモデル化した例があるが、Brown and Scriven のダンベル型定常解 (図 1.1 左) の上に凸性が再現されない、中伸展と大伸展のダンベル形状が独立にモデル化されておりその境界が曖昧であるなど、当該モデルには改善の余地が残る ([39] Figure 7, Figure 8, Figure 20 および関連する記述)。本研究では様々な数学的な陰関数を探索し [40]、ダンベル型形状を内包する単一かつ扱いやすい数学関数、4次多項式で表された平面曲線「カッシーニ卵形線」を見出した。当該関数によりダンベル型液滴を模擬した結果、本研究ではダンベル型大変形の支配方程式を扱いやすい形で導出することが出来た。換言すれば、本研究ではダンベル型変形液滴の数理解析モデル化に成功しており、本研究は以上の現状を打破することが期待される。本研究の液滴模型は前段落の条件を満たす「良い」液滴模型であり、「カッシーニ卵形線」が自然に内包する特異形状は分裂間際の液滴形状の模擬に適している。従って本研究の「カッシーニ液滴模型」は回転浮遊液滴のダンベル型大変形および分裂挙動の非定常挙動に関し、分裂間際までの伸展挙動を低計算コストかつ精密に破綻無く模擬することが出来る。これは本項前半で参照した数値計算に無い特徴であり、従って本研究は特に、ダンベル型液滴の分裂間際の伸展挙動の新たな計算手法の提案に通ずる。

### 1.3 本論文の構成

本論文の構成を述べる。本論文は5章から成る。第2章「ダンベル型大変形の数理解析模型、「カッシーニ液滴模型」の数学的構成」では、回転浮遊液滴のダンベル型大変形および分裂挙動の数理解析モデルの定式化を行う。第2章は3節から成り、第1節および第2節で形状が軸対称なダンベル型回転浮遊液滴の応力均衡式および角運動量変化式を断面半径分布を

具体的に定めずに導出し、第3節でダンベル型形状の生成関数である「カッシーニ曲線」を導入して提案模型「カッシーニ液滴」の詳細を示す。第3章「数理解析模型「カッシーニ液滴模型」の支配方程式の理論解析」では、第2章で構築した数理解析模型である「カッシーニ液滴」の妥当性を検証し、模型の範疇での理論計算を行う。第3章は4節から成り、第1節で定常回転解の導出とその安定性解析を行い、第2節で Brown and Scriven (1980) を含む複数の既報研究と比較し提案模型の再現性と物理的妥当性を示す。第3節では「カッシーニ液滴」の変形の支配方程式の厳密解を導出し、低粘性液滴の分裂時間の理論的予測を行う。4節および5節ではカッシーニ液滴模型の粘性適用範囲、エネルギー計算、コリオリ力の概算等の補助計算を行ってゆく。3章第6節では長大さゆえ本論中に載せなかった数式の全体を表示し、論旨の再現性の補強を行う。第4章「高粘性液滴の液滴分裂過程への応用」では、液滴の構成流体を低粘性に限定せず、高粘性液滴の分裂挙動を考察する。ダンベル型液滴の分裂間際に形成される液糸架橋を組み込んでモデルの拡張を行い、分裂間際に実験的に観測される回転角速度と最大伸展距離の関係を再現する。第4章の末尾では提案モデルの数値計算を行い、微小重力環境かつ浮遊力の干渉を受けない理想的な状況下での伸展時間や飛翔速度の予測を行ってゆく。第5章「結言」で各章を総括した後、本研究の結論を述べる。

## 第2章 ダンベル型大変形の数理解析模型、 「カッシーニ液滴模型」の数学的構成

本章<sup>1</sup>では液滴モデルの具体的な構成を行う。まずはじめに、ダンベル型液滴の界面形状を数学的な境界条件として定める。次に、液滴界面の境界条件の内部領域でナビエ・ストークス式の各項の積分を行い、ダンベル型液滴の変形の支配方程式、すなわち長手方向の応力バランス方程式と角運動量方程式を導出し、両方程式が界面形状全体を用いて表現されることを示してゆく。ダンベル型液滴の数理解析模型「カッシーニ液滴」の定式化を行った。ダンベル型液滴が非圧縮のニュートン流体であること、外力無し、表面のラプラス圧力境界条件、液滴形状と流動構造のダンベル長手軸対称性を前提条件とし、ダンベル型液滴を一般の断面半径分布境界条件で表現したうえで、ナビエ・ストークス方程式の液滴半分の体積積分によりダンベル型液滴長手方向の応力バランス式と角運動量変化式を導出した。以上の導出は、中央断面の応力の積分に級数展開の1次近似を含むものの、物理的に厳密であり、断面半径分布を適切に定義することで任意の円断面のダンベル型回転浮遊液滴に適用できる。しかし換言すれば、第2章で導いたダンベル型大変形の回転・変形の支配方程式は液滴界面形状を境界条件として含むということであり、殊に動的変形を解くためには界面形状を適切に設定する必要がある。ダンベル型液滴の真の形状は無限個のパラメータを持つ級数解で表現されるため [1]、両方程式に代入してパラメータを時間発展させ変形を論じることは難しい。そこで本論文では、ダンベル型大変形状の初期のカプセル様形状から終期の $\infty$ 様形状までを全て内包する数学関数「カッシーニ曲線」を境界条件関数に設定することで、ダンベル形状液滴の数理解析模型「カッシーニ液滴」を構築する。「カッシーニ曲線」は2個の変な形状パラメータを内包する数学関数であり、上記の2本の支配方程式と液滴体積保存により液滴の変形と回転を同時に扱うことが可能となる。本章では最終的にカッシーニ液滴の支配方程式を最大伸展距離と中央断面半径を従属変数とした形式で示すことを目的とし、具体的な解析は第3章で行ってゆく。

---

<sup>1</sup>本章の内容は投稿中、審査中につき、5年以内(2023年3月まで)に全文公開予定

## 第3章 数理解析模型「カッシーニ液滴模型」 の支配方程式の理論解析

本章<sup>1</sup>では、前章の末尾に示した「カッシーニ液滴」の支配方程式の理論解析を行ってゆく。本章は定常回転解の導出とその線形安定性解析により「カッシーニ液滴」が先行研究の理論解や実液滴のダンベル大変形を再現する妥当な解析模型であることを示す部分と、支配方程式の厳密解を求めることによる本研究独自の理論解析から成る。

本章の前半では、支配方程式の定常回転解に関する解析を行う。まず「カッシーニ液滴」の定常回転解について、形状決定変数  $k := R_{\text{Max}}/H_{\text{mid}}$ 、すなわちダンベル長軸距離と中央断面半径の比を媒介変数として、定常回転解におけるダンベル長軸距離を回転角速度の関数として求めた。次に定常回転解の線形安定性解析を行い、定常解が液滴の物性値によらずダンベル長軸半径の値が閾値を超えると不安定化すること、その閾値で定常回転解の角運動量が増加から減少に転じることを示した。以上の3点は Brown and Scriven (1980) の定常回転解 [1] が持つ基本的な性質であり、これを再現する「カッシーニ液滴」模型はダンベル型回転浮遊液滴の大変形および分裂挙動の「良い」模型であることを示している。

本章の中盤では、形状パラメータ  $A$  の真の値を決定し、カッシーニ液滴が一般の粘性のダンベル型液滴の安定な定常回転変形と低粘性液滴の非定常分裂過程を非常に良く再現することを示してゆく。カッシーニ液滴の真の形状パラメータ値  $A_{\text{opt}}$  を同定するため、カッシーニ液滴模型の計算結果による最小二乗回帰を Brown and Scriven (1980) の数値計算解 [1] と先行実験研究 [2] の両方で行った。前述の内容を踏まえ「実液滴では分裂に至るまで角運動量が減少しない」と仮定して回帰関数を定義した結果、Brown and Scriven (1980) の数値計算解 [1] から形状パラメータの最適値  $A_{\text{opt}} = 0.821$  が得られ(決定係数の大きいほうを採用)、一般の粘性のダンベル型液滴の安定な定常回転変形を最も良く模擬するカッシーニ液滴を定めることが出来た。 $A_{\text{opt}} = 0.821$  のカッシーニ液滴を用い、定常回転解道を不安定化以降は角運動量が保存される仮定のもとで描いた結果、低粘性液滴の分裂直前の伸展挙動と非常に良く一致することが確かめられた。典型的な低粘性液滴の分裂間際のダンベル型形状をカッシーニ液滴と比較した結果、僅かな差異を除いて非常に良く一致することも確かめられた。

また非定常分裂過程に関しては、カッシーニ液滴の分裂極限が極低粘性液滴の分裂間際の形状を非常に良く近似することから、極低粘性液滴の分裂過程の理論解析を試みた。安定限界以後に角運動量が保存される仮定のもとで長手方向変形距離-回転角速度の変化軌道を描き参照実験 [2] と整合することを示したほか、同仮定のもとで応力バランス式の厳密解を導出し、計算される分裂時間が参照実験の分裂時間スケールと整合することを示した。非粘性液滴の理論解の存在により、非粘性液滴の分裂に関する幾つかの理論解析が可能となる。分裂時間の予測、非定常分裂過程における累積回転角度の計算、分裂時の重心速度の計算がその例であり、分裂時の飛翔速度・飛翔角度の予測や分裂小液滴の再捕集といった工学的応用も

<sup>1</sup>本章の内容は投稿中、審査中につき、5年以内(2023年3月まで)に全文公開予定

可能となる。加えて、変形の支配方程式の摂動展開による近似解の構成や分裂過程の慣性レイノルズ数の評価を通じ、「カッシーニ液滴」を用いた分裂挙動の解析に適用可能な粘性範囲を議論した。第3章を総括すると、本研究のカッシーニ液滴は非粘性の回転浮遊液滴のダンベル型大変形および分裂過程の理論的再現に適した液滴解析モデルであることを示したことになる。

## 第4章 高粘性液滴の液滴分裂過程への応用

本研究では、回転浮遊液滴のダンベル型大変形を提案する「カッシーニ模型」を提案し、第2章で定式化を行い、第3章で極低粘性の液滴の分裂の動的解析が可能であることを示した。本章<sup>1</sup>では「カッシーニ模型」が粘性液滴の分裂挙動への拡張が可能かを論じてゆく。

第3章までは極低粘性のダンベル型回転浮遊液滴の非定常分裂挙動の解析を行ったが、粘性液滴の分裂間際には中央断面付近に液糸が形成され、カッシーニ液滴模型の範疇から外れる。第4章では液糸部を双曲線関数により数学的に表現し、カッシーニ液滴と滑らかに結合させることで液糸付き拡張カッシーニ液滴模型を構築した。液糸付きダンベル型形状を収束計算により構成し、応力バランス式を角運動量保存の元で数値的に解いた結果、参照実験論文における液糸付きダンベル型液滴の最大伸展距離-回転角速度の軌道を定量的に再現したほか、幾つかの粘性で分裂時間が参照論文の時間スケールと整合することを示した。

---

<sup>1</sup>本章は第2章、第3章の内容と大きく関連するため、同様に5年以内(2023年3月まで)に全文公開予定

## 第5章 結言

本研究では、回転浮遊液滴が安定なダンベル型を取りながら回転角速度を遅めつつ伸び、ある伸展半径を超えると非定常的な分裂に至る一連の過程の定量的な再現に取り組んだ。回転浮遊液滴のダンベル型大変形は、分裂過程や形状変形を利用した液滴の物性測定や非接触的な液滴サイズ制御といった工学的な応用が期待される実験対象であるものの、応用可能性の多くは非定常過程であるため、ダンベル型大変形の動的挙動を定量的に精度良く解くことが求められる。ダンベル型回転浮遊液滴の大変形においては、定常回転解については界面分割法による網羅的な数値計算が行われ、変形形状が回転角速度の関数として求まっている一方で、ダンベル型大変形の動的解析に関する知見は十分ではない。回転浮遊液滴の大変形の界面分割法に則った数値計算において、ダンベル型大変形の動的な変形、殊に分裂過程の再現は困難であり、分裂過程でしばしば数値計算が破綻することも報告されている。

数値計算で網羅的に解かれている定常回転解においては形状の解は界面分割数と同程度のオーダーの形状パラメータを用いて表現され、非定常回転解の場合や、界面分割法を利用した数値計算による形状の解も同様の性質を持つと考えられる。真の解を高精度に再現するには界面分割を非常に細かくする必要があるが、分割点増大と同時に数値解の形状パラメータ数が飛躍的に増大し、非常に多数の形状変数を持つ級数になる。このような非常に多数の変形変数の時間発展に帰着されるダンベル型形状の変形の解を用いると、変形の特徴量である最大伸展距離や中央断面半径、片珠重心位置や回転角速度もまた同数の形状パラメータで表現されるため、変形特徴量間の関係式を明示的に得ることや、変形特徴量の一つの微小変化に伴う他の特徴量の変化を定量的に追うことは容易でない(例えば形状パラメータ数と同程度の次数の連立方程式を解くなどの煩雑な手続きを要する)。一方で液滴の数理解析モデルの構築による変形の解析では、ひとつの変形過程に着目したうえで、先ず既知の数学関数を液滴形状の解と仮定し、当該関数を用いて液滴を幾何学モデル化する。形状関数としてごく少数の形状表現パラメータを内包するような関数を選び、パラメータの時間変化をもって液滴形状や回転角速度の時間発展を計算してゆく。形状パラメータの時間発展方程式は物理的に演繹するが、その仮定で形状関数を液滴界面の境界条件として用いるため、形状関数は体積、液滴界面の平均曲率、慣性モーメント、片珠重心位置の積分が初等的に厳密に求まる関数を設定する必要がある。以上の前提の下で解いた液滴の変形を実験や数値計算における液滴変形履歴と比較することで、液滴モデルの妥当性を検証すると共に、設定した形状関数が液滴形状の非常に良い近似解になっていることを示す。以上の背景の下で構築される液滴モデルは、数値計算に比して以下の優位性を持つ。第一に、形状パラメータは多くの場合最大伸展距離等の変形特徴量であるため、変形特徴量や回転角速度の時間発展を直接的に解ける。第二に、形状関数により計算された体積等の保存量により形状パラメータ同士が関連付けられるため、変形特徴量や回転角速度の幾つかが微小変化した際の他の量の応答を容易に計算できる。またこれに関連し、実験挙動等を再現する妥当な液滴モデルを用いれば、回転角速度の変化に伴う液滴全体の変化が非常に直観的に理解できる。第三に、液滴形状は数学関数で明示的に与えられるため変形時間発展の解析における形状の再定義は行われず、液滴モデルの範

嚙では形状特異性ゆえの計算エラーは発生しない。以上の背景の元で液滴解析模型の構築に関して様々な研究が行われてきたが、その多くは回転軸に関して形状軸対称な偏平楕円形状の模型である。ダンベル型大変形状の数理解析模型に関しては、単一の数学関数で形状を表現する困難さゆえ有用な液滴模型はほとんど存在しなかった。

そこで本研究では、ダンベル型液滴の形状を表現する初等数学関数「カッシーニ曲線」を見出し、低粘性の回転浮遊液滴のダンベル型大変形および分裂過程を数理的に再現する単一の液滴模型を構築した。数学関数「カッシーニ曲線」は多項式から成る平面上の閉曲線であり、2個の形状パラメータの値の変化により、至るところ凸な楕円様形状、中央断面付近が平らなカプセル様形状、中央部が凹んだダンベル型形状、分裂極限の $\infty$ 様形状までを連続的に取ることができる。加えて、カッシーニ曲線から構成した軸対称体を形状境界条件に設定した「カッシーニ液滴」は、液滴体積、液滴界面の平均曲率、慣性モーメント、片珠重心位置の積分が近似無しに厳密に計算出来る。「カッシーニ液滴模型」ではダンベル型大変形を体積保存により最終的に1個の可変パラメータのみに還元出来るため、ダンベル型液滴の形状変形が視覚的に分かりやすくなった他、形状パラメータによる形状の微分が可能となり、形状変形を連続的かつ直感的に追うことが可能になった。以上から、本研究のダンベル液滴模型は、ダンベル型液滴の変形が特微量の時間変化の常微分方程式に帰着される「良い」液滴模型の条件を満たすため、前段落の現状を打破しようと期待される。

本章では、本論文を総括し、第3章までの結果の応用可能性、本研究の液滴模型の拡張可能性(第4章はその一例)、未導入の効果を導入するための考察を述べている。第2章で示した液滴変形の時間発展方程式は、カッシーニ型形状以外にも同様に形状軸対称軸が回転軸に直交する液滴に対して適用可能であると考えられるため、本研究の液滴模型を拡張し様々な解析が行えると期待される。数学関数カッシーニ曲線を用いて構築した本研究の液滴解析模型「カッシーニ液滴」はダンベル型回転浮遊液滴の形状の真の解ではないものの、僅かな誤差を除いて真の解形状を非常に良く近似し、長手方向の変形距離の増大に伴う回転角速度の減少履歴を定量的に誤差少なく再現し、極低粘性液滴の動的分裂挙動の理論的解析に成功した。本研究で示したダンベル型回転浮遊液滴の数理解析模型の構築に際し、液滴界面形状の境界条件としてカッシーニ曲線を設定したが、カッシーニ曲線は実際の浮遊液滴のダンベル型変形状との類似性に着目した数学関数であり、物理的、あるいは流体力学的な根拠を元に導入した関数ではない。しかしながら、このような単純な形状近似曲線から極低粘性のダンベル型回転浮遊液滴の変形の伸展および分裂の一連の過程が非常に良く近似的に再現されるのは非自明な知見である。本章に示した形状再現性、進展に伴う回転角速度の変化の再現性、定常回転解の不安定境界の回転状態の整合性、非粘性液滴の分裂挙動の再現性から総合的に判断すると、カッシーニ曲線を液滴長手方向の軸に対して回転させた軸対称形状は、回転浮遊液滴のダンベル型大変形および分裂過程と本質的な関係があると推察される。カッシーニ液滴様の界面形状は回転による変形以外にも、例えば懸垂流体からの液滴の分離や飛翔速度ベクトルが平行な2個の液滴の衝突・合体が考えられる。回転液滴のダンベル型大変形も含めたこれらの状況に共通するのは、液滴形状が長手方向の1軸に対して軸対称であり、変形の駆動力の合力が形状軸対称軸方向の成分のみを持つ点であり、上記の状況もまたカッシーニ曲線を用いたモデル化が可能であると考えられる。以上纏めると、数学関数カッシーニ曲線は液滴のダンベル型大変形および分裂過程の形状の真の解の主要部になりうる数学関数である。ダンベル型形状が表れる変形現象を理解し、カッシーニ関数に適切な拡張を施すことで、上記に代表されるより複雑な変形挙動の非定常解析が可能になると考えられる。

液滴のダンベル型大変形および分裂は界面形状を表現する扱いやすく簡潔な単一の数学関

数が見出されておらず、変形挙動を明確に可視化しつつ動的変形を直截的に解く液滴モデルの構築は殆ど行われていなかった。本研究はこの状況を打破することが期待される。本研究の液滴解析モデルをもとに、液滴変形の様々な非線形挙動を精密に模擬する解析モデルが考案されることを期待したい。

## 参考文献

- [1] R. A. Brown and L. E. Scriven. The shape and stability of rotating liquid drops. *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 371(1746):331–357, 1980.
- [2] R. Tanaka, S. Matsumoto, A. Kaneko, and Y. Abe. Viscosity measurement using breakup of a levitated droplet by rotation. *Interfacial Phenomena and Heat Transfer*, 1(2):181–194, 2013.
- [3] A. Frohn and N. Roth. *Dynamics of droplets*. Springer Science & Business Media, 2000.
- [4] T. G. Wang, E. H. Trinh, A. P. Croonquist, and D. D. Elleman. Shapes of rotating free drops: Spacelab experimental results. *Physical Review Letters*, 56:452–455, Feb 1986.
- [5] T. G. Wang, A. V. Anilkumar, C. P. Lee, and K. C. Lin. Bifurcation of rotating liquid drops: results from usml-1 experiments in space. *Journal of Fluid Mechanics*, 276:389–403, 1994.
- [6] C. A. Evans, J. A. Robinson, J. Tate-Brown, T. Thumm, J. Crespo-Richey, D. Baumann, and J. Rhatigan. International space station science research accomplishments during the assembly years: an analysis of results from 2000-2008. *NASA Technical Report Server*, 2009.
- [7] Z. Chen, D. Zang, L. Zhao, M. Qu, X. Li, X. Li, L. Li, and X. Geng. Liquid marble coalescence and triggered microreaction driven by acoustic levitation. *Langmuir*, 2017.
- [8] C. E. Kundrot, R. A. Judge, M. L. Pusey, and E. H. Snell. Microgravity and macromolecular crystallography. *Crystal Growth and Design*, 1(1):87–99, 2001.
- [9] S. E. Wolf, J. Leiterer, M. Kappl, F. Emmerling, and W. Tremel. Early homogenous amorphous precursor stages of calcium carbonate and subsequent crystal growth in levitated droplets. *Journal of the American Chemical Society*, 130(37):12342–12347, 2008.
- [10] A. van der Bos, M.-J. van der Meulen, T. Driessen, M. van den Berg, H. Reinten, H. Wijshoff, M. Versluis, and D. Lohse. Velocity profile inside piezoacoustic inkjet droplets in flight: comparison between experiment and numerical simulation. *Physical review applied*, 1(1):014004, 2014.

- [11] D. L. Dietrich, V. Nayagam, M. C. Hicks, P. V. Ferkul, F. L. Dryer, T. Farouk, B. D. Shaw, H. K. Suh, M. Y. Choi, Y. C. Liu, et al. Droplet combustion experiments aboard the international space station. *Microgravity Science and Technology*, 26(2):65–76, 2014.
- [12] L. T. Elkins-Tanton, P. Aussillous, J. Bico, D. Quere, and J. W. M. Bush. A laboratory model of splash-form tektites. *Meteoritics & Planetary Science*, 38(9):1331–1340, 2003.
- [13] K. A. Baldwin, S. L. Butler, and R. J. A. Hill. Artificial tektites: an experimental technique for capturing the shapes of spinning drops. *Scientific reports*, 5:7660, 2015.
- [14] S. L. Butler, M. R. Stauffer, G. Sinha, A. Lilly, and R. J. Spiteri. The shape distribution of splash-form tektites predicted by numerical simulations of rotating fluid drops. *Journal of Fluid Mechanics*, 667:358–368, 2011.
- [15] 宮本雲平. 流体としてのブラックホール: 重力物理と流体力学の接点 (非線形波動現象の数理と応用). 2014.
- [16] V. Cardoso and O. J. C. Dias. Bifurcation of plasma balls and black holes to lobed configurations. *Journal of High Energy Physics*, 2009(04):125, 2009.
- [17] 橋本英典 今井功. ラム流体力学 3 (*H. Lamb, Hydrodynamics 6th edition. Cambridge University Press, 1932*). 東京図書, 1988 翻訳 (12月20日 初版第1刷発行).
- [18] S. Chandrasekhar. Ellipsoidal figures of equilibrium—an historical account. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 20(2):251–265, 1967.
- [19] J. A. F. Plateau. *Experimental and theoretical researches on the figures of equilibrium of a liquid mass withdrawn from the action of gravity, etc.* Smithsonian Institution, 1843, originally published in French, and 1863, translated into English.
- [20] T. G. Wang. Equilibrium shapes of rotating spheroids and drop shape oscillations. *Advances in applied mechanics*, 26:1–62, 1988.
- [21] Lord Rayleigh. On the capillary phenomena of jets. In *Proc. R. Soc. London*, volume 29, pages 71–97, 1879.
- [22] H. Poincaré. Sur l’équilibre d’une masse fluide animée d’un mouvement de rotation (in french). *Acta Mathematica*, 7(1):259–380, 1885.
- [23] S. Chandrasekhar. The stability of a rotating liquid drop. In *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, volume 286, pages 1–26. The Royal Society, 1965.
- [24] E. H. Brandt. Levitation in physics. *Science*, 243(4889):349–355, 1989.
- [25] E. Beaunon and R. Tournier. Levitation of water and organic substances in high static magnetic fields. *Journal de Physique III*, 1(8):1423–1428, 1991.

- [26] E. Beaunon, D. Fabregue, D. Billy, J. Nappa, and R. Tournier. Dynamics of magnetically levitated droplets. *Physica B: Condensed Matter*, 294:715–720, 2001.
- [27] W.-K. Rhim, M. Collender, M. T. Hyson, W. T. Simms, and D. D. Elleman. Development of an electrostatic positioner for space material processing. *Review of scientific instruments*, 56(2):307–317, 1985.
- [28] E. H. Trinh. Compact acoustic levitation device for studies in fluid dynamics and material science in the laboratory and microgravity. *Review of scientific instruments*, 56(11):2059–2065, 1985.
- [29] W.-K. Rhim, K. Ohsaka, P.-F. Paradis, and R. E. Spjut. Noncontact technique for measuring surface tension and viscosity of molten materials using high temperature electrostatic levitation. *Review of scientific instruments*, 70(6):2796–2801, 1999.
- [30] R. J. A. Hill and L. Eaves. Vibrations of a diamagnetically levitated water droplet. *Phys. Rev. E*, 81:056312, May 2010.
- [31] M. D. Simon and A. K. Geim. Diamagnetic levitation: flying frogs and floating magnets. *Journal of Applied Physics*, 87(9):6200–6204, 2000.
- [32] W.-K. Rhim, S. K. Chung, and D. D. Elleman. Experiments on rotating charged liquid drops. *AIP Conference Proceedings*, 197(1):91–105, 1990.
- [33] L. Liao and R. J. A. Hill. Shapes and fission of highly charged and rapidly rotating levitated liquid drops. *Physical Review Letters*, 119(11):114501, 2017.
- [34] R. E. Benner, O. A. Basaran, and L. E. Scriven. Equilibria, stability and bifurcations of rotating columns of fluid subjected to planar disturbances. In *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, volume 433, pages 81–99. The Royal Society, 1991.
- [35] V. J. García-Garrido, M. A. Fontelos, and U. Kindelán. Evolution, stability and equilibrium shapes of rotating drops which are charged or subject to electric fields. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 66(4):489–516, 2013.
- [36] M. A. Walkley, P. H. Gaskell, P. K. Jimack, M. A. Kelmanson, and J. L. Summers. Finite element simulation of three-dimensional free-surface flow problems. *Journal of Scientific Computing*, 24(2):147–162, 2005.
- [37] C.-J. Heine. Computations of form and stability of rotating drops with finite elements. *IMA journal of numerical analysis*, 26(4):723–751, 2006.
- [38] H. Kitahata, R. Tanaka, Y. Koyano, S. Matsumoto, K. Nishinari, T. Watanabe, K. Hasegawa, T. Kanagawa, A. Kaneko, and Y. Abe. Oscillation of a rotating levitated droplet: Analysis with a mechanical model. *Physical Review E*, 92(6):062904, 2015.
- [39] P. Aussillous and D. Quéré. Shapes of rolling liquid drops. *Journal of Fluid Mechanics*, 512:133–151, 2004.

- [40] A. B. Basset. *An Elementary Treatise on Cubic and Quartic Curves*. Deighton, Bell, 1901.