論 文 の 内 容 の 要 旨

論文題目　Applications of max-plus algebra to scheduling problems
（マックスプラス代数のスケジューリング問題への応用）

氏　　名　久保　奨

本論文の目的は，マックスプラス代数をスケジューリング問題に応用することで，生産ラインの効率化のための基礎理論を構築することである．

スケジューリング問題とは，広い概念であるが，本論文では，機械を用いてジョブを効率的に処理していくために，各機械をいつどのジョブに割り当てるかを決定する問題とする．このスケジューリング問題は，製造業だけでなく，航空機の空港ゲートへの割当など，現実社会のあらゆる場面で見られる問題であることから，極めて重要である．しかし，1970年代以降，多くのスケジューリング問題は NP 困難である（計算上，手に負えない）ことが判明した．現在のところ，これらの問題に対して多項式時間で最適解が求まるアルゴリズムは見つかっていない．最近では最適解を求める研究よりも（メタ）ヒューリスティクスによって近似解を求める研究が盛んに行われている．

一方，マックスプラス代数とは，実数に負の無限大を付加した集合において，和（⊕）を max，積（⊙）を（普通の代数における）和にした代数のことであり，1960年代から盛んに研究されている．マックスプラス代数は，超離散化・トロピカル化を通じて，普通の代数（実数）における非負で減法がない部分に対応している．こうした対応関係があることから，マックスプラス代数においては，線形代数と同様に行列に固有値や固有ベクトルが存在したり，また，多項式や代数方程式の類似物が存在したりするなど，様々な性質が知られている．

本論文では，生産ラインによく見られる①フローショップ問題や②同一並列２機械問題について，マックスプラス代数に基づく新たなアプローチを提案する．

①　フローショップ問題に対する新たな定式化

基本的なフローショップ問題は，m 台の異なる機械，n 個のジョブ，mn 個の非負値 p_{ij}（ジョブ j が機械 i で処理されるのに要する時間）から構成される．全てのジョブは，最初の機械から m 番目の機械に順に処理されていく．ここでは，主に，処理開

始から全てのジョブが終わるまでの時間（メイクスパン）を最小にすること，また，全機械においてジョブを処理する順序が同じである順列フローショップを扱う．

Bouquard et al.（2006）は，ジョブを行列に関係付ける定式化を行った．今回，フローショップ問題において，機械を行列に関係付ける定式化も行えることが判明した．ジョブ及び機械に対応する行列は同様の形の行列となっており，両者には双対的な関係がある．この定式化により，マックスプラス代数の性質を用いて見通し良く計算ができ，新たに多項式時間で最適解が求まる条件を発見することができた．当該条件を使えば，より複雑な生産ラインにおいても最適解が容易に得られることとなる．また，no-waitと呼ばれる機械（工程）間にジョブの待ち時間がない条件とno-idleと呼ばれる機械が連続稼働する条件の双対性や，メイクスパン最小のno-waitフローショップ問題の巡回セールスマン問題への帰着など，いくつかの既存結果に対して，簡潔かつ代数的な別証明を与えることができた．

なお，新たな定式化は，各機械に対応する行列において他の機械とは独立にジョブの順序を設定することができるため，非順列フローショップ問題も扱える．これは，マックスプラス代数を用いた定式化では初めてのものである．

さらに，線形代数における命題のマックスプラス代数におけるアナロジーを考えることで，有名なジョンソンのルールの拡張に対して新たな十分条件を与えるとともに，各種フローショップ問題に対応する線形代数における問題を提示した．

今後，２つの行列を用いた定式化がフローショップ，特に非順列フローショップの理論の発展に寄与することが期待される．さらに，線形代数においては多くの結果が存在することから，それらのフローショップへの適用について精査することも興味深い課題である．

② 同一並列２機械問題の理論的分析

代数方程式（n 次方程式）を超離散化・トロピカル化した方程式（マックスプラス代数方程式）が n 個の解を持つ十分条件，解の公式等が既に知られている．

メイクスパン最小の同一並列２機械問題は，２台の同一機械，n 個のジョブ，n 個の正値 p_j（ジョブ j が機械で処理されるのに要する時間）から構成される．ジョブはどちらかの機械で処理される．メイクスパンの理論的な最小値は，明らかに（$p_1 + p_2 + \cdots + p_n$）/2 であり，問題は，この最小値に一致するようなジョブの機械への割振りがあるかどうかである．

なお，この問題は，分割問題（n 個の自然数を２つのグループに分け，各グループ内の数の和が等しくなるようにできるかどうかを判定する問題）と一致し，NP 完全（NP 困難なNP問題）であることが知られている．

今回，このNP完全な問題が，マックスプラス代数方程式を解くことに帰着することを発見した．具体的には，与えられた整数の１つが，他の整数からなる係数のマックスプ

ラス代数方程式の解となるかどうかを判定する問題に等しいことが判明した．この方程式は（計算量は膨大であるものの）機械的に導出でき，その解も機械的に求まる．最大の p_1（$p_1 \geqq p_2 \geqq \cdots \geqq p_n$ とする）が一致すべき解のリストを作成でき，n が６までについて具体的に解を示した．n が７以上でも同様の計算はでき，解の個数は $O(2^n)$ と考えられるが，降順に並んでいるため，その一致の判定には非常に効率的な二分探索が利用可能である．よって，この手法は，P 対 NP 問題に新たな視点を与えるものと考える．

このように，フローショップ問題と同一並列機械問題に対して，マックスプラス代数を用いて，新たな定式化を提案するとともに，それを使って実用上も有用と考えられるいくつかの結果を導いた．本研究の手法・成果は理論的にも実用上も重要である．この手法を更に発展させることで新たな結果が見つかり，生産ラインの一層の効率化に資することが期待される．