

複雑形状乱流場解析に適した  
一般座標系差分スキームの構成とその  
ラージエディシミュレーションへの応用

小畑 哲也

学位論文

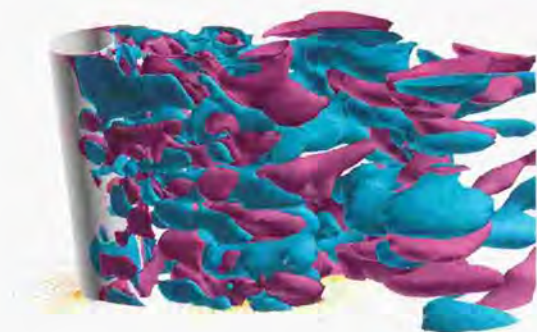
複雑形状乱流場解析に適した  
一般座標系差分スキームの構成とその  
ラージエディシミュレーションへの応用

*Finite Difference Schemes in Generalized Coordinates  
and Their Application to Large Eddy Simulation*

東京大学大学院

工学系研究科 機械工学専攻

57055 小垣 哲也



1999年1月

---

Tetsuya KOGAKI  
The University of Tokyo  
7-22-1 Roppongi, Minato-ku  
Tokyo, 106 Japan

Finite Difference Schemes in Generalized Coordinates and Their Application to Large Eddy Simulation /

Tetsuya KOGAKI.

Thesis for the doctrate, The University of Tokyo.

PRINTED IN JAPAN

TYPESETTING USING ADOBE PAGEMAKER 6.5J (Adobe Systems®)

## 要約

第1章では、研究の背景、目的が述べられるとともに、本研究で取り扱う一般座標系におけるラージエディシミュレーションの現状および円柱周りの流れの概要について再確認される。

第2章では、信頼性の高い一般座標系における有限差分スキームを構成するため、森西(1996a)が正規直交座標系において展開した基礎方程式の解析的保存特性に関する議論が、変数変換に基づく単純な座標変換の概念を導入して一般座標系に拡張され、森西(1996a～b, 1998a～c)により運動量および運動エネルギーの保存特性に関して再検討または新たに適切になるように提案された等間隔正規直交座標系における2次精度および4次精度差分スキームが、比較的簡単に一般座標系に拡張できることが示される。それに基づき、スタガード、レギュラおよびコロケート格子系において、一般座標系差分スキームが構成される。

第3章では、本研究で使用される非圧縮性流れの計算手法について説明される。

第4章では、第2章で構成された一般座標系差分スキームが検証される。まず、一般座標系差分スキームの保存特性を調査するため、運動量と運動エネルギーの総量が時間的に保存されるべき2次元周期的非粘性流の数値実験(森西 1996c)が行われ、不等間隔非直交性である任意の一般座標系格子において運動量のみならず運動エネルギーの保存特性が適切であるのは、第2章で構成された一般座標系における修正コロケート格子系差分スキームであることが証明される。次に、一般座標系差分スキームの実際の非圧縮性乱流場への適用例として、平行平板間内乱流の直接数値シミュレーションが行われ、運動エネルギーを適切に保存する一般座標系における修正コロケート格子系差分スキームは、計算結果が計算格子に依存しない優れた特性を持つことが明らかにされる。

第5章において、ラージエディシミュレーションの基礎方程式およびSGSモデルの定式化が再確認される。さらに、ラージエディシミュレーションを複雑形状乱流に適用可能とするために一般座標系におけるラージエディシミュレーションの定式化について再検討される。また、本研究で採用した一般座標系におけるラージエディシミュレーションの定式化の妥当性を明らかにするため、平行平板間内乱流のラージエディシミュレーションが行われる。

第6章では、第5章で検証された一般座標系におけるラージエディシミュレーション手法を円柱周りの流れに適用し、従来の実験結果との比較から一般座標系におけるラージエディシミュレーションの有効性を検証する。

第7章に、本研究全体の結論が述べられる。

最後に Appendix A では、本研究の主題からは離れるが、複雑乱流場のラージエディシミュレーションの例として、角柱周りの流れのラージエディシミュレーションについて述べられる。また、ラージエディシミュレーションにおける風上差分の適用の影響についても調査され、その問題点が明らかにされる。

## 謝 辞

私は、平成7年度から平成10年度まで、東京大学大学院工学系研究科博士課程に在籍し、小林敏雄教授のご指導のもと、乱流の数値シミュレーションに関する研究に従事してきました。その間、多くの方々からご指導、ご協力を賜りました。ここに記して謝意を表したいと思います。

指導教官として小林敏雄教授は、基本的には私の意志を尊重し自由に研究をさせていただく一方で、私の研究方針について適宜適切なお指示をいただきました。

谷口伸行助教授には、数値計算手法、ラージエディシミュレーション、流体力学全般に関して広くご指導いただきました。谷口先生の知識と理解力には驚くべきものがあり、先生との対話から多くのヒントを頂きました。

私が金沢大学大学院修士課程に在籍中お世話になった金沢大学の岡島厚教授には、東京大学大学院博士課程への進学をご推薦していただくとともに、物体周りの流れの興味深さについてご指導いただきました。また、金沢大学の木綿隆弘助手には、私が金沢大学大学院修士課程を修了後もメール等で何度かご連絡をさせていただきお世話になりました。

生産技術研究所内には、乱流の数値計算に携わる研究者間でNIST (Numerical Simulation of Turbulence)グループが組織されていて、私も参加させていただきました。NISTグループのまの役である吉澤徹教授、小林敏雄教授、村上周三教授、加藤信介助教授、谷口助教授、半場助教授、大同龍三講師(現在、福井大学)、大島まり講師には、有益な討論の場を設けていただいたことに感謝いたします。また、毎月の恒例の月例会の際にはグループの方々からの興味ある研究発表を拝見させていただくとともに、私自身も何度か発表の機会を頂き、非常に有益な経験となりました。

NISTグループの偉大なOBである東京工業大学の坂内潔助教授ならびに名古屋工業大学の森西洋平助教授にも、直接お会いしお話しする機会は少なくとも、先生の研究発表を通じ多大なご指導をお受けしました。特に、本研究のテーマの一つである一般座標系における差分スキームは、森西先生の研究成果が基本となっています。また、森西先生は、不躰なメールでの質問に対して、丁寧にご返答いただきました。

研究室の恒例行事として、毎週月曜日に開催された研究会では、小林敏雄教授、谷口伸行助教授を初めとした研究室のメンバーの方々とは有益な討論をする事ができま

た。特に、佐賀徹雄助手、瀬川茂樹技官からは実験者として現場の豊富な知見に基づいた貴重なご意見を伺うことができました。

計算機能力を必要とする乱流の数値シミュレーションについて研究している私にとって、優れた計算機環境は必要不可欠でありました。小林敏雄教授ならびに谷口伸行助教授は、公募型研究費を積極的に申請するとともに企業との共同研究に努めていただき、研究室の計算機環境の充実に困っていただきました。平成9年度から平成10年度の二年間、科学技術庁航空宇宙技術研究所と共同研究の機会があり、同研究所の松尾裕一氏には、大型計算機の使用に便宜を困っていただきました。小林、谷口研究室の計算機環境の管理者として、大島まり講師、伊藤裕一技官、松田道也氏（現在、アンダーセンコンサルティング）ならびに宮崎博行氏（現在、富士通）は、優れた計算機ネットワーク環境の構築と維持に努めていただきました。

博士課程に在学中、何度か英語での学会発表、論文投稿の機会がありました。大島まり講師は私の未熟な英語原稿を丁寧に添削していただき、ご指導いただきました。

六本木という日本でも有数の歓楽街に位置している生産技術研究所の近くには、洗練されたレストランが数多く存在し、そこでの昼食会は私の研究生生活においてささやかな楽しみの一つでありました。坪倉誠氏、田坂知寛氏（エクセディ）、國尋廉則氏（エクセディ）、伊藤裕一氏、小林克利君、岡田知子さんならびに福田佳代子さんとはよくランチを共にさせていただき、和やかな一時を過ごすことができました。

生産技術研究所には、「六本木大学焼き鳥倶楽部」なる非公式な同好会が存在し、私も茶席に加えさせていただけていました。同倶楽部の創設者であり、現在、名譽顧問であられる坪倉誠氏とは、住まいが近かったこともあり、共に帰宅の際には、研究や私生活についていろいろとご相談にのっていただき、私にとって良き兄のような存在でした。また、同倶楽部の田坂知寛氏（エクセディ）、加地寿志夫氏（現在、ブリジストン）、田中亮成氏（現在、三菱重工業）、小林元氏（現在、富士総合研究所）、伊藤裕一氏、小林克利君、鳥井亮君とは何度か酒宴の席を共にさせていただき、学生生活の中の楽しい思い出となりました。

4年間の在学中、坪倉誠氏、大島 Sang-Chool 氏、Park Nam-seob 氏、弘畑幹鐘君、宮崎博行君、伊藤裕一氏と同室させていただきました。皆さんと机を並べて共に研究に励み、有意義な学生生活を送ることができたことを嬉しく思います。

私が研究および勉学を円滑に行っていく上で、数多くの事務的な手続きが必要でありました。その際、小林研究室の長瀬久子さん、大谷紀代さん、谷口研究室の福田佳代子さん、岡田知子さん、生産技術研究所第2部業務掛および国際産学共同研究掛の方々にお世話になりました。

最後に、8年の長きにわたる大学・大学院生活を精神的・経済的に支えたくれた、父與市、母喜美子に心より深く感謝し、研究成果である本論文を捧げたいと思います。

## 目次

要約	iii
謝辞	v
目次	vii
第1章 序論	1
1.1 本研究の背景および目的	1
1.2 一般座標系における有限差分法について	2
1.3 乱流のラージエディシミュレーションの概要	3
1.3.1 ラージエディシミュレーションの歴史	3
1.3.2 一般座標系におけるラージエディシミュレーション	4
1.4 円柱周りの流れの概要	6
1.4.1 層流状態	7
1.4.2 TrW 状態	8
1.4.3 TrSL 状態	9
1.4.5 TrBL 状態	10
1.4.6 乱流状態	11
第2章 運動エネルギー保存型一般座標系差分スキームの構成	13
2.1 座標変換	14
2.2 正規直交座標系における基礎方程式の解析的保存特性	16
2.3 座標変換を施した基礎方程式系の解析的保存特性	19
2.4 離散オペレータの定義	22
2.5 一般座標系における格子配列系	25
2.5.1 レギュラ格子系	25



2.5.2	コロケート格子系	26
2.5.3	スタガード格子系	26
2.6	適切な一般座標系差分スキームの構成	27
2.6.1	スタガード格子系における一般座標系差分スキーム	27
2.6.2	レギュラ格子系における一般座標系差分スキーム	33
2.6.3	コロケート格子系における一般座標系差分スキーム	37
2.6.4	修正コロケート格子系差分スキームの一般座標系への拡張	39
2.7	本章のまとめ	44
<b>第3章</b>	<b>数値計算方法</b>	<b>45</b>
3.1	基礎方程式	45
3.2	計算アルゴリズム	46
3.3	空間離散化	47
3.4	時間進行法	48
3.4.1	Adams-Bashforth 法および Crank-Nicolson スキームを用いたフラクショナルステップ法	48
3.4.2	低記憶容量3段階部分3次精度半陰解スキーム	48
3.5	圧力方程式解法	49
3.6	計算安定化のためのフィルタリング	51
3.7	乱流統計量の算出	53
3.7.1	LESにおける乱流強度	53
3.7.2	乱流応力の輸送方程式の離散化手法	55
3.8	ヤコビアン, メトリックの計算	57
3.8.1	離散化式の保存形式と非保存形式の恒等関係	57
3.8.2	一様流の保存	61
<b>第4章</b>	<b>運動エネルギー保存型一般座標系差分スキームの検証</b>	<b>63</b>
4.1	座標変換の打ち切り誤差	64
4.1.1	理論的評価	64
4.1.2	数値実験の評価	65
4.2	一般座標系差分スキームの保存特性の検証	68
4.2.1	保存特性検証方法概要	68
4.2.2	スタガード格子系差分スキームの保存特性	70
4.2.3	レギュラ格子系差分スキームの保存特性	76
4.2.4	一般座標系におけるコロケート格子系差分スキームの保存特性	77
4.3	運動エネルギー保存型一般座標系差分スキームのチャンネル内乱流への	80
4.3.1	数値計算方法概要	80
4.3.2	計算結果及び考察	83
4.3.2(a)	格子系の違いの影響	83
4.3.2(b)	計算格子の不等間隔非直交性の影響	87

4.3.3(c) 修正コロケート格子系差分スキームの安定性 .....	96
4.4 本章のまとめ .....	99

## 第5章 一般座標系におけるラージエディシミュレーションの定式化 .....

5.1 ラージエディシミュレーションの基礎方程式 .....	103
5.2 Subgrid-scale モデル .....	109
5.2.1 Smagorinsky モデル .....	109
5.2.2 Scale similarity モデルと mixed モデル .....	110
5.2.3 Dynamic SGS モデル .....	112
5.2.4 Dynamic mixed モデル .....	116
5.2.5 Dynamic multi-parameter mixed モデル .....	118
5.2.6 Lagrangian Dynamic SGS モデル .....	119
5.2.7 非平衡等方型渦粘性モデル .....	122
5.3 差分法による陽的フィルター操作 .....	125
5.4 一般座標系におけるラージエディシミュレーションの基礎方程式 .....	128
5.4.1 Case 1, 座標変換⇒フィルター操作(計算空間) .....	128
5.4.2 Case 2, フィルター操作(計算空間)⇒座標変換 .....	130
5.4.3 Case 3, 座標変換⇒フィルター操作(物理空間) .....	131
5.5 一般座標系における SGS モデル .....	132
5.6 一般座標系におけるラージエディシミュレーション手法の選定 .....	134
5.6.1 解析手法概要 .....	134
5.6.2 各種 SGS モデルの比較 .....	137
5.6.3 計算格子の不等間隔非直交性の影響 .....	139
5.7 本章のまとめ .....	140

## 第6章 円柱周りの流れのラージエディシミュレーション .....

6.1 数値計算方法概要 .....	145
6.2 比較実験の概要 .....	150
6.3 計算結果および考察 .....	151
6.4 本章のまとめ .....	158

## 第7章 結論 .....

## 付録A ラージエディシミュレーションにおける風上差分の影響 .....

A.1 数値計算方法概要 .....	163
A.2 対流項差分スキームの風上化による影響 .....	167
A.3 位相平均操作 .....	169

A.4 計算結果および考察 .....	170
A.4.1 各種流体力の比較 .....	170
A.4.2 後流の3次元性 .....	170
A.4.3 時間・位相平均を施した速度場および乱流統計量 .....	172
A.4.4 対流頂風上化によるGS運動エネルギーの分散・散逸 .....	173
A.5 付録Aのまとめ .....	191
参考文献 .....	193

# 第1章

## 序論

### 1.1 本研究の背景および目的

非圧縮性乱流の支配方程式の離散化手法として、スペクトル法、有限差分法、有限体積法、有限要素法、渦法といった方法があり、流れ場の特性や必要とされる計算精度に応じて計算方法を選択することが重要である。スペクトル法は、流れ場を記述する支配方程式系を打ち切り誤差なしで離散化することができるため、最も高精度である。従って、スペクトル法は一様等方性乱流や平行平板間内流れの直接数値シミュレーション(DNS, Direct Numerical Simulation)やラージエディシミュレーション(LES, Large Eddy Simulation)に適用され、高精度な結果を提供するとともに、乱流の理解に貢献してきた。しかし、スペクトル法は、流れ場の幾何形状の柔軟性に優れた有限要素法を組み合わせたスペクトル有限要素法(Spectral element method)に拡張された例を除いて、基本的には直交座標系の単純な形状の低レイノルズ数流れへの適用に限定される。しかし、自動車周りの流れや各種流体機械内部の流れに代表されるような工業的な流れ場は、一般的に複雑形状であるとともにレイノルズ数が $10^4$ を越える高レイノルズ数流れである場合が大部分を占める。従って、自動車、航空機などといった輸送機関やポンプ、圧縮機といった流体関連機器の性能向上や高効率化を図るためには、複雑形状・高レイノルズ数乱流場に対する信頼性の高い計算手法を開発することが急務である。

乱流場中に存在する様々なスケールの渦を観察すると、大スケール渦は流れ場や主流の状態に影響されて大きく異なるのに対して、小スケールの渦は等方的で比較的普遍的性質を持つことがわかる。高波数の小スケール渦に対しては、その性質の普遍性に着目しモデル化を行う一方、計算格子で解像できる低波数の大スケール構造に関しては直接数値計算で解析する手法がラージエディシミュレーションである。ラージエディシミュレーションは直接数値シミュレーションと比較すると、一般的に計算格子の解像度に対する要求が低くなるため計

計算荷が軽減されるとともに高レイノルズ数の乱流にも適用可能であると考えられている。一方、多くの市販コードに組み込まれているレイノルズ平均モデル(RANS, Reynolds Averaged Navier-Stokes equation)と比較すると、ラージエディシミュレーションは計算負荷はかなり大きい、モデル化の際の近似の度合いが小さいため、乱流の非定常性を再現でき、流れ場に関してより汎用性の高い乱流計算法である。従って、ラージエディシミュレーションが近い将来、工業的複雑乱流場の解析手法として標準的手法になると考えられる。しかし、工業的な流れ場は一般的に複雑な形状を有しているのに対し、ラージエディシミュレーションは一様等方性乱流やチャンネル内乱流といった比較的単純な形状の乱流場においてモデル化が提案され検証されている。従って、一般座標系における信頼性の高いラージエディシミュレーションの定式化を明らかにする必要があると考えている。

以上のような背景を元に、本研究では複雑形状・高レイノルズ数乱流場に対する信頼性の高い計算手法を確立することを目指し、一般座標系における有限差分法を用いた信頼性の高いラージエディシミュレーション手法を確立すると事を目的として基礎研究を行う。また、本研究で構成された一般座標系におけるラージエディシミュレーションの応用として、実験結果が豊富な円柱周りの流れのラージエディシミュレーションを行う。

## 1.2 一般座標系における有限差分法について

直接数値シミュレーションやラージエディシミュレーションは、RANSと比較すると乱流モデリングの効果が相対的に小さくなる(あるいは全くない)ため、一般的に計算方法や離散化手法に対する依存性が強く、信頼できる解を得るためには高精度な計算方法や離散化手法が要求される。差分法により乱流の直接数値シミュレーションおよびラージエディシミュレーションの有効性を探る第一段階として、平行平板間乱流における直接数値シミュレーションが行われ、スペクトル法による直接数値シミュレーションの計算結果と比較された結果、流れ方向平均流速、乱流統計量、レイノルズ応力収支がほぼ一致する結果が得られることが示されている(Rai and Moin 1991; 鈴木・河村 1991; 梶島ら 1997; 佐竹 1997)。また、最近、森西(1996a)は、基礎方程式の解析的な保存特性が離散化式においても適切に近似されることが、高精度で安定な解を得るのに必要であることが示し、そのような差分スキームが「適切な(proper)」差分スキームであると提唱した。さらに森西(1996a~b)は、これまでの差分スキームが連続の式を満足しても運動量方程式中、または速度二乗量および運動エネルギーの輸送方程式中で必ずしも保存形とはならないことを指摘し、要求される解析的保存特性を適切に近似する差分スキームを示した。直接数値シミュレーションやラージエディシミュレーションにおいては、数値誤差により生じる運動エネルギーの人工的散逸が、分子粘性やSGSモデルにより付加される乱流粘性による散逸と比較して十分無視しうる程度でなければならぬので、信頼性の高い直接数値シミュレーションやラージエディシミュレーションを行う上で、この森西の議論は非常に重要であると考えられる。しかし、これら森西の保存特性に関する議論および運動量、運動エネルギーを適切に保存する差分スキームの構成は、基本的には等間隔正規直交座標系に限定されていた。従って、任意の幾何形状の流れ場に対して信

顧性の高い直接数値シミュレーションやラージエディシミュレーションを行うためには、森西の議論を一般座標系に拡張することが必要であると考えられる。

### 1.3 乱流のラージエディシミュレーションの概要

#### 1.3.1 ラージエディシミュレーションの歴史

ラージエディシミュレーションは、まずSmagorinsky(1963)により理論的基本概念が示された。ラージエディシミュレーションの工学分野への応用としては、Deardorff(1970)により高レイノルズ数のチャンネル内乱流を $24 \times 20 \times 14$ (計6,720)という非常に粗い格子を用いて解析を試みられたのが最初である。Schmann(1975)は、体積平均化の概念に基づき差分法におけるSGS(Subgrid-scale)モデルを構成し、チャンネル内乱流および同軸二重円管のラージエディシミュレーションを行っている。Moin and Kim(1982)は、当時最速のスーパーコンピュータILLIAC IVを使用して、 $128 \times 63 \times 64$ (計516,096)の計算格子を用いてチャンネル内乱流の解析を行った。その計算においては、離散化手法として、壁方向には差分法、周期境界条件を課することができるの流れ方向およびスパン方向には高精度なスペクトル法が採用され、イジェクション(ejection)やスイープ(sweep)といった乱流の組織構造が再現されている。

しかし、これらの計算に使われたBoussinesqの渦粘性近似に基づくSmagorinskyモデルは、GS成分とSGS成分間のエネルギー輸送は常に散逸的で( $\epsilon_{sgs} > 0$ )あるため、乱流場に間欠的に存在するSGS成分からGS成分へのエネルギーの逆輸送であるbackward cascadeを再現する機構を持たない。さらに、壁付近での渦粘性係数の漸近挙動が再現されないこと、モデル定数であるSmagorinsky定数の最適値が流れ場によって異なるため最適化が必要になること等の問題点が指摘され、このままではより広範な問題に対してラージエディシミュレーションの応用は難しいと考えられていた。これらの問題を解決するモデルとして、Germano *et al.* (1991)は、Smagorinskyモデルのモデル定数値を乱流場の状況に応じて動的に決定されるDynamic SGSモデル(DSM)を提案した。このDynamic SGSモデルは、モデル定数値が負になることもありうるのでBackscatterの機構を備えている。Lilly(1992)は、最小自乗法に基づいて、Germano *et al.* (1991)のDynamic SGSモデルのモデル係数値の計算手法を改良した。Dynamic SGSモデルから計算されるモデル係数値は、空間的に大きく振動するため、通常、流れ場の様な方向に平均される。従って、統計的に様な方向が存在しない乱流場に対するDynamic SGSモデルの適用性はまだ十分ではない。Ghosal *et al.* (1995)は、Fredholmの積分方程式を用いて、モデル定数値を局所化するDynamic localizationモデルを提案している。Yakhot *et al.* (1989)は、Yakhot and Orszag(1986)のRenormalization group(RNG)理論に基づいたSGSモデルを開発し、チャンネル内流れに適用している。また、Chasnov(1991)は、EDQNM(Eddy-Damped Quasi-Normal Markovian)理論を提案し、減衰等方性乱流に適用されている。Yoshizawa(1989)は、TSDIA(Two-Scale Direct Interaction Approximation)近似に基づき、SGSモデルの長さスケールを変化させる代数式を提案し、Morinishi and Kobayashi(1990)および森西・小林(1990, 1991)は、このモデルを一樣等方性乱流およびチャンネル内流

乱流で最適化するとともにバックステップ乱流に適用している。また、これとは別に、Yoshizawa *et al.* (1996)は、SGS乱流エネルギーの生成と散逸が等しいとする局所平衡を仮定しない非平衡SGSモデルを提案し、チャンネル内乱流および壁面衝突噴流に適用されている(坪倉 1996)。

### 1.2.2 一般座標系におけるラージエディシミュレーション

上記のように、ラージエディシミュレーションにおけるSGSモデルの改良はかなり進んでいる。しかし残念ながら、上記のSGSモデルは基本的に等間隔正規直交座標系を仮定して構成され、等間隔直交格子で計算可能な一様等方性減衰乱流や、平行平板間内乱流などの不等間隔直交の場合でも等間隔方向のみにフィルター操作を仮定して検証が行われている。従って、一般座標系に対するラージエディシミュレーションが複雑形状乱流場に適用可能であるかどうかはあまり明確にされていない。

ラージエディシミュレーションを一般座標系へ拡張する際には、以下のような問題点が指摘されている(Ghosal and Moin 1995; Jordan 1997)。

- (i) フィルター操作と微分操作の交換性
- (ii) 不等間隔非直交格子におけるSGSモデルの妥当性

まず(i)に関して、Ghosal and Moin (1995)は、2次精度交換フィルター(Second-order commuting filter, SOCF)を新たに定義し、不等間隔非直交系におけるフィルター操作と微分操作の交換性について数学的に調査している。その結果、不等間隔非直交系におけるフィルター操作と微分操作の交換性の誤差はフィルター幅の2乗のオーダーであり、有限差分法において支配方程式を空間2次精度で離散化した場合、フィルター操作と微分操作の交換性の誤差が離散化の誤差とほぼ同程度となることを明らかにした。さらにGhosal and Moin (1995)は、高次精度のLES計算において交換性の誤差が離散化の誤差のオーダーを越えないように、漸近級数展開を用いて交換性の誤差を任意精度に高次化する修正法を提案している。これとは別に、van der Ven (1995)は、フィルター操作と微分操作の交換性が任意精度で成立する不等間隔非直交系におけるフィルター操作を構成している。これらの業績に基づく、空間離散化の精度が2次精度の場合、不等間隔非直交フィルター操作と微分操作との交換性の誤差は無視して差し支えなく、また、高次精度で離散化する場合、交換性の誤差が離散化の誤差のオーダーを越えないように何らかの修正を施すことによって、一般座標系におけるラージエディシミュレーションが実行可能であると考えられる。

次に、渦粘性タイプのSGSモデルにおいては、フィルター操作を施した影響として長さスケールを指定する必要があるが、アスペクト比の大きい非等方な計算格子の使用を考えた場合、この長さスケールの定義が問題となる。この問題に対して、Scotti *et al.* (1993)は等方性乱流のエネルギー平衡仮説から、格子の非等方性を考慮するGeneralized Smagorinskyモデルを提案している。一方、前述のGermano *et al.* (1991)が提案したDynamic SGSモデルは、長さスケールが流れ場の状況に応じて自動的に決定される手法であると解釈できるので問題

ないと考えられるが、次の段階として、Dynamic SGSモデルが非等方計算格子を使って等方性乱流を正しくシミュレートできるかどうか疑問として生じる。この疑問に対して、Scotti *et al.* (1996)は、従来のSmagorinskyモデル、Generalized Smagorinskyモデル (Scotti *et al.* 1993)およびDynamic SGSモデルが、バンケーキ型(2つの格子アスペクトのうち、1つの格子アスペクト比が1から極端に大きいまたは小さい)およびペンシル型(2つの格子アスペクト比が1から極端に大きいまたは小さい)の非等方格子を用いて等方性乱流を正しくシミュレートできるかどうか検証している。その結果、流れの大きな構造の再現性に関しては、全てのモデルがほぼ満足できる程度であったが、カットオフ周波数に近いスケールにおけるモデルの性能に関しては、バンケーキ型計算格子において従来のSmagorinskyモデルが、またペンシル型計算格子においてDynamic SGSモデルに問題があることが明らかにされた。ペンシル型の非等方計算格子において、Dynamic SGSモデルがうまく作用しない原因として、Dynamic SGSモデルは解像できる最も小さいスケールの情報を用いて未知数であるモデル係数を決定しているが、そのスケールが方向により異なることによって解像される非線形的相互作用が影響され、部分的に流れが2次元的になってしまっていることが考えられている (Scotti *et al.* 1996)。

実際に一般座標系におけるラージエディシミュレーションが試みられた例としては、Kaltenbach (1993)、Beaudan and Moin (1994)、Kaltenbach and Choi (1995)、Mittal (1995, 1996)、Jansen (1996)およびJordan (1996)等が挙げられる。Kaltenbach (1993)は、Choi *et al.* (1993)の一般座標系における計算コードにGermano *et al.* (1991)のdynamic SGSモデルを組み込んで平板ディフューザー内流れの計算を行い、Obi *et al.* (1993)の実験と比較することにより検証を行っている。その中で、一般座標系におけるラージエディシミュレーション法の定式化の際、ヤコビアンや計量テンソルは、その空間的変動がフィルター幅のスケールでは無視しようと仮定しフィルター操作において定数として取り扱われている。Kaltenbach and Choi (1995)は、最大揚力が得られる迎角におけるNACA4412翼型のラージエディシミュレーションを試みている。Jansen (1996)は、離散化手法に有限要素法を用いて、Kaltenbach and Choi (1995)と同様にNACA4412翼型のラージエディシミュレーションを行っている。

本研究の解析対象である円柱周りの流れのラージエディシミュレーションは、Beaudan and Moin (1994)およびMittal (1995, 1996)により行われている。Beaudan and Moin (1994)は、流れの圧縮性の影響が無視できるようにマッハ数 $Ma$ を0.3として圧縮性コードを用いてレイノルズ数が3900の円柱周りの流れのラージエディシミュレーションを行っている。その計算においては、計算の安定化のため対流項に5次精度または7次精度の風上差分が適用されたが、計算格子が粗くなる円柱から少し離れた後流域において、風上差分の数値的人工散逸効果がSGSモデルの効果に重畳して、解を汚染することが確認されている。従って、高次精度であっても風上差分はラージエディシミュレーションには不適切であると結論づけられている。風上差分をラージエディシミュレーションに適用することの問題点は、本研究のAppendixでも論じられる。これに対しMittal (1995, 1996)は、前述のdynamic SGSモデルが組み込まれたChoi *et al.* (1993)の一般座標系における非圧縮性流体計算コードを使用し、Beaudan and Moin (1994)と同じレイノルズ数が3,900の円柱周りの流れのラージエディシミュレーションを行っ



ている。対流項の離散化はその他の項と同じく2次精度中心差分が用いられている。しかし、Beaudan and Moin (1994)の計算と比較すると、計算格子の解像度がほぼ同じであるのに対し、差分スキームの解像度が5次精度から2次精度に落ちているので差分スキームの波数解像力の低下から計算結果は大きく改善はされなかった。Mittal (1994, 1996)が使用したChoi *et al.* (1993)の計算コードは、基礎変数に反変ベクトルを使用しているために高次精度化は容易ではない。

### 1.3 円柱周りの流れの概要

一様な流れの中に、物体が存在する場合(あるいは、これと同義で静止流体中を物体が移動する場合)、物体の存在により、物体周りの流れが影響を受け、速度変動や乱れを伴う領域が物体周りに形成される。このような変動領域を、一様流速との関係から図1.3.1のように区別できる。

円柱に限らず、一般的に、表面で流れがはく離する物体(ブラフボディ、非流線型物体)周りの流れは、レイノルズ数の変化によって劇的にその様相が変化する。ブラフボディ周りの流れの状態は、流れが層流か乱流であるか、また、乱流である場合、流れのどの領域で乱流に遷移するかによって次のように大別できる(Zdravkovich 1997)。

- (i) L : 流れの全域において層流状態,  $Re < (180 \sim 200)$   
(Laminar state)
- (ii) TrW : 後流において乱流遷移,  $(180 \sim 200) < Re < (350 \sim 400)$   
(Transition-in-wake state)
- (iii) TrSL : はく離せん断層において乱流遷移,  $(350 \sim 400) < Re < (10^6 \sim 2 \times 10^6)$   
(Transition-in-shear-layers state)
- (iv) TrBL : 境界層において乱流遷移,  $(10^6 \sim 2 \times 10^6) < Re < (?)$

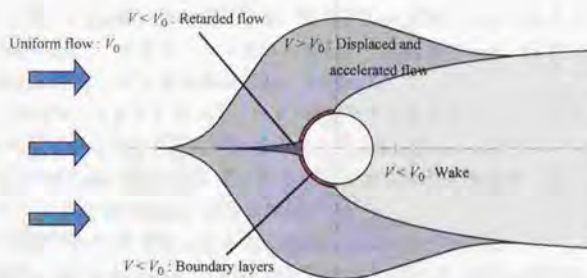


FIGURE 1.3.1 Regions of disturbed flow (extracted from Zdravkovich (1997)).

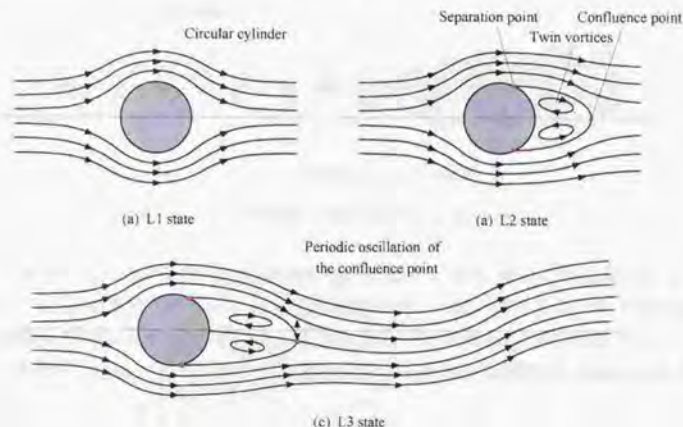


FIGURE 1.3.2 Laminar flow of flow around a circular cylinder.

(Transition-in-boundary-layers state)

(v) T : 変動領域の全域で乱流,  $(?) < Re < \infty$ 

(Fully turbulent state)

## 1.3.1 層流状態

円柱周りの流れの層流状態は、さらに3つの状態に細分できる(Zdravkovich 1997).

L1 : はく離なし流れ,  $0 < Re < (4 \sim 5)$ L2 : 定常はく離流れ,  $(4 \sim 5) < Re < (30 \sim 48)$ L3 : 周期的層流状態,  $(30 \sim 48) < Re < (180 \sim 200)$ 

L1状態は、図1.3.2(a)に示されるように、流れが円柱表面からはく離せず、円柱の前後で流れがほぼ対称に近く、ポテンシャル流れに類似した流れ場である。L1状態は、レイノルズ数が4～5以下の極低レイノルズ数域において現れる。

レイノルズ数が4～5以上になると、図1.3.2(b)で示されるように、円柱側面ではく離し、両側からはく離れた流れが円柱背後の鞍点(Confluence point)で合流することによって、円柱背後に双子渦(Twin vortices)と呼ばれる定常な2つの再循環領域が形成される。双子渦の長さは、レイノルズ数の増加とともに増加する。

レイノルズ数が30～48以上になると、伸張した双子渦が不安定となり、合流点の位置が周期的に振動し、図1.3.2(c)のように後流が正弦波状に波打つ。合流点が振動し始めるレイノルズ数については、流れの含まれる乱れや円柱表面性状の僅かな凹凸に大きく影響されるため、実験において明確な値はまだ決定されていない。さらにレイノルズ数が増加すると、波

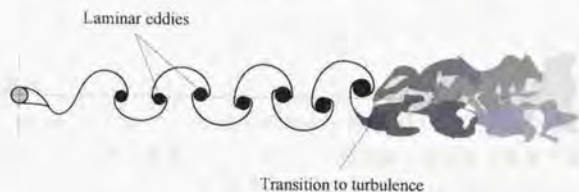


FIGURE 1.3.3 TrW state of flow around a circular cylinder.

状となった後流の山と谷の部分でせん断層が巻き上がり、食い違いに層流渦が形成される。Kármán(1911)は、層流渦列について理論的な解析を行い、食い違い配列をした層流渦の幅 $b$ と渦間の距離 $a$ の比 $b/a$ が0.2806である場合、渦列が安定であることを見出した。このKármánの業績にちなんで、プラフボディ背後に形成される層流渦列は、Kármán渦列と呼ばれる。

### 1.3.2 TrW 状態

TrW 状態は、さらに以下のように2つに細分される(Zdravkovich 1997)。

- TrW1 : 後流中の層流渦が乱流遷移,  $(180 \sim 200) < Re < (220 \sim 250)$
- TrW2 : 渦がその形成中に乱流遷移,  $(220 \sim 250) < Re < (350 \sim 400)$

まず、レイノルズ数が180～200以上になると、後流に3次元性が観察されるようになり、図1.3.3で示されるように、円柱背後に形成された層流渦列が下流において不安定となって乱流に遷移する。乱流に遷移する位置は、レイノルズ数が増加するとともに上流側に移動する。さらにレイノルズ数が220～250以上になると、渦がその形成中に乱流に遷移し、円柱から乱流渦が放出されるようになる。ただし、TrW状態において、はく離自由せん断層は層流状

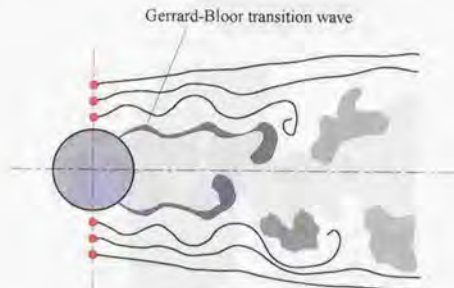


FIGURE 1.3.4 Gerrard-Bloor transition wave.

態である。

### 1.3.3 TrSL 状態

亜臨界状態(Subcritical state)とも呼ばれる TrSL 状態では、円柱表面からはく離れたせん断層内で流れが層流から乱流に遷移する。しかし、円柱表面の境界層は層流状態である。TrSL 状態は、レイノルズ数によってさらに以下のように3つに細分される(Zdravkovich 1997)。

TrSL1 : 2次元遷移波の発達,  $(350 \sim 400) < Re < (10^3 \sim 2 \times 10^3)$

TrSL2 : 遷移渦の形成,  $(10^3 \sim 2 \times 10^3) < Re < (2 \times 10^4 \sim 4 \times 10^4)$

TrSL3 : 乱流に急激に遷移,  $(2 \times 10^4 \sim 4 \times 10^4) < Re < (1 \times 10^5 \sim 2 \times 10^5)$

まず、レイノルズ数が350～400以上になると、層流境界層が乱流境界層に遷移する前に観察される Tollmien-Schlichting 波に類似した Gerrard-Bloor 遷移波がはく離せん断層におい

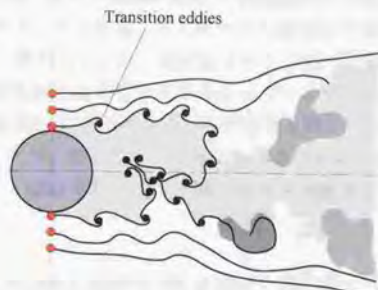


FIGURE 1.3.5 Transition eddies.

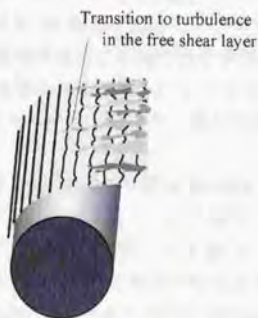


FIGURE 1.3.6 Transition to turbulence in TrSL3 state.

で発生する。図1.3.4に示されるように、Gerrard-Bloor 遷移波は、中心軸に対して対称で同位相であるため、遷移波の発生と発達には、非対称な交互渦の放出のメカニズムとは無関係であり、全く同じ状態で不安定性が励起されていると考えられている。また、Gerrard-Bloor 遷移波は、シリンダー軸に対してほぼ平行であることが実験により確認されている。

レイノルズ数がさらに  $10^3 \sim 2 \times 10^3$  以上になると、図1.3.5で示されるように自由せん断層内に遷移渦(Transition eddies)がチェーン状に形成される。これがTrSL2状態の始まりである。チェーン状の遷移渦は、ついには巻き上がって乱流渦が形成される。レイノルズ数の増加とともに、放出される乱流渦の形成位置が円柱に近くなり、その結果、背圧係数が減少し抗力係数が増加する。

TrSL2状態の上限付近のレイノルズ数域に達すると、まず、自由せん断層内で2次元遷移波が観察されなくなり、その後、放出渦が形成されるまでの距離の減少が止まる。これがTrSL3状態の始まりである。図1.3.6で示されるように、TrSL3状態における乱流遷移は、円柱近傍の自由せん断層においては点状に急激なバーストとして観察される。TrSL1～TrSL2状態においては、レイノルズ数の変化に対して流れの構造が連続的に変化していたのに対して、TrSL3状態では、流れが乱流に遷移する位置がほぼ固定されることによってほとんど流れの構造が変化せず、その結果、ストローハル数や抗力係数等もほぼ一定となる。円柱表面の流れは層流はく離するが、はく離線はスパン方向にうねっている。TrSL3状態は、レイノルズ数が  $2 \times 10^4$  付近から始まることがわかっているが、実験において乱れ強さを0.1%以下まで抑えた場合、 $Re=5 \times 10^4$ まで遅れることが確認されている(Bloor and Gerrard 1966)。機械工学分野に限らず、化学、原子力工学分野における流れ場の多くがこのTrSL3状態である場合が多い。従って、TrSL3状態に関する多くの実験的研究がなされている。

### 1.3.5 TrBL 状態

TrSL3状態においては、自由せん断層内で乱流遷移する位置は、レイノルズ数の変化に依存せず、ほぼ一定であった。これは、レイノルズ数の増加に伴って、乱流遷移が早まって遷移位置がはく離点へ近づこうとする傾向と、はく離した自由せん断層が加速されて遷移位置が下流に押し流される傾向とが釣り合って安定な状態になっているためであると考えられる。しかし、レイノルズ数が  $10^6 \sim 2 \times 10^6$  以上になると、この安定効果が消失し、境界層が円柱表面により長く付着し、はく離点が次第に下流の方に移動する。これは、境界層において乱流遷移が発生し、流れが円柱表面からはく離しにくくなったためである。これがTrBL状態の始まりである。TrBL状態はさらに以下のように細分される(Zdravkovich 1997)。

TrBL0 : 前臨界状態,  $(1 \times 10^5 \sim 2 \times 10^5) < Re < (3 \times 10^5 \sim 3.4 \times 10^5)$

TrBL1 : 1-はく離バブル,  $(3 \times 10^5 \sim 3.4 \times 10^5) < Re < (3.8 \times 10^5 \sim 4 \times 10^5)$

TrBL2 : 2-はく離バブル,  $(3.8 \times 10^5 \sim 4 \times 10^5) < Re < (5 \times 10^5 \sim 1 \times 10^6)$

TrBL3 : 超臨界状態,  $(5 \times 10^5 \sim 1 \times 10^6) < Re < (3.4 \times 10^6 \sim 6 \times 10^6)$

TrBL4 : 後臨界状態,  $(3.4 \times 10^6 \sim 6 \times 10^6) < Re < (?)$

TrBL0状態では、まず、乱流遷移がはく離線に沿って発生し始める。レイノルズ数の増加に伴い、はく離点の位置が次第に下流に移動し、 $-C_{pb}$ 、 $C_{l,RMS}$ 、 $C_d$ が次第に減少する。一方、ストローハル数はTrBL0状態のレイノルズ数上限までほとんど変化しない。

レイノルズ数が $3 \times 10^5 \sim 3.4 \times 10^5$ 以上になると、TrBL0状態から突然にTrBL1状態に変化する。TrBL1状態への変化は、抗力係数の不連続な減少とストローハル数の急激な上昇を伴う。円柱表面では、境界層が乱流遷移する前に、層流はく離して再付着するはく離バブルの形成が片方の側面においてのみ観察される。

レイノルズ数が $3.8 \times 10^5 \sim 4 \times 10^5$ 以上になると、円柱両方の側面において、はく離バブルの形成が観察され、円柱近傍では層流はく離、乱流遷移、再付着および乱流はく離が複雑に入り組んだ状態となる。これがTrBL2状態である。TrBL2状態においては、TrBL1状態に引き続き抗力係数の不連続な減少とストローハル数の急激な上昇を伴う。

さらに、レイノルズ数が $5 \times 10^5 \sim 1 \times 10^6$ 以上になると、はく離バブルがスパン方向に沿って分裂され、不規則に分裂されたはく離線によって周期的な渦放出が抑制される。これがTrBL3状態である。

1960年代までは、TrBL3状態が極限状態であると考えられていたが、Roshko(1961)は、さらにレイノルズ数を増加させると、円柱の全スパンにおいて境界層がはく離する前に乱流に遷移し、周期的な渦放出が再び観察されるようになることを発見した。これがTrBL4状態である。TrBL4状態においては、円柱前面のよどみ点とはく離点の間で乱流遷移が発生する。レイノルズ数の増加に伴い、乱流遷移の位置はよどみ点側に漸近するが、TrBL4状態の上限を明確に定義することは困難である。

TrBL状態に達するレイノルズ数を実験において達成するには、実験装置の流速の限界から円柱直径を大きくする必要があり、アスペクト比が小さくなりブロックエッジ効果が大きくなるた、従って、理想的な状態での計測は困難である。一方、数値シミュレーションの場合、TrBL状態のレイノルズ数域を高精度に計算しうる乱流モデルが確立されていないとともに、また、直接数値シミュレーションを行うことは現在の能力を遙かに超えた計算機が必要とされるため、信頼できる数値シミュレーションを行うことは困難である。

### 1.3.6 乱流状態

さらにレイノルズ数が増加すると、ついには、境界層が全て乱流となり、円柱周囲の境界層、はく離せん断層および後流の全領域において流れが乱流である状態に達する。これが乱流状態である。しかし、空気を用いた実験においては空気の圧縮性の影響、水を用いた実験においてはキャピテーションの影響があるため、実際には理想的な乱流状態の達成は困難である。従って、乱流状態に関しては、現在でもあまりよくわかっていない。

第2章

高田工子ルキ一保存型・経歴型系全分入  
キ一山形編

高田工子ルキ一保存型・経歴型系全分入  
キ一山形編

高田工子ルキ一保存型・経歴型系全分入  
キ一山形編

高田工子ルキ一保存型・経歴型系全分入  
キ一山形編

## 第2章

# 運動エネルギー保存型一般座標系差分スキームの構成

非圧縮性乱流の計算手法として、スペクトル法、有限差分法、有限体積法、有限要素法、渦法といった方法があり、流れ場の特性や必要とされる計算精度に応じて、計算方法を選択することが重要である。有限差分法により高精度な直接数値計算やラージエディシミュレーションを行うには、

- (1) 有限差分法における高精度な離散化手法の確立、
- (2) 流入・流出境界条件の検討、
- (3) 特にLESの場合、SGS(subgrid scale)モデルの定式化やモデル係数の算出方法の一般座標系への拡張、

といった問題がある。DNSやLESは、RANSモデルに基づく乱流計算法と比較するとモデルの効果が小さいため(あるいは全くない)ため、一般的に計算方法や離散化手法に対する依存性が強く、信頼できる解を得るためには高精度な計算方法や離散化手法が要求される。差分法による高精度DNS、LESの有効性を探る第一段階として、平行平板間乱流におけるDNSが行われ、スペクトル法によるDNSの計算結果と比較された結果、流れ方向平均流速、乱流統計量、レイノルズ応力収支がほぼ一致する結果が得られることがわかった(Rai and Moin 1991; 鈴木・河村 1991; 梶島ら 1997; 佐竹 1997)。また最近、森西(1996a)は、基礎方程式の解析的な保存特性が離散化式においても適切に近似されることが、高精度で安定な解を得るのに必要であることが示し、そのような差分スキームが「適切な(proper)」差分スキームであると提唱した。さらに森西(1996a～b)は、これまでの差分スキームが連続の式を満足しても運動量方程式中、または速度二乗量および運動エネルギーの輸送方程式中で必ずしも保存形とはならないことを指摘し、要求される解析的保存特性を適切に近似する差分スキームを示



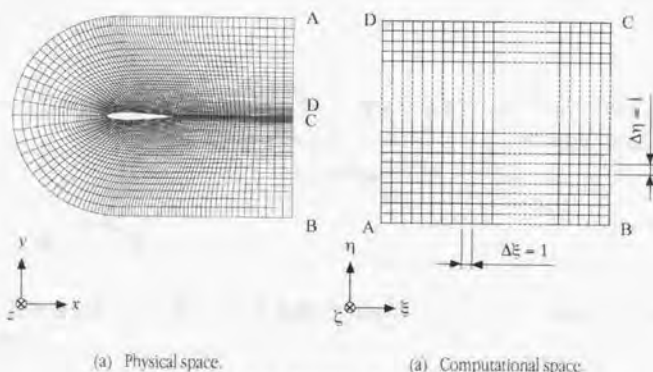


FIGURE 2.1.1 Coordinate Transformation.

した、DNSやLESにおいては、数値誤差により生じる運動エネルギーの人工的散逸が、分子粘性やSGSモデルにより付加される乱流粘性による散逸と比較して十分無視しうる程度でなければならないので、信頼性の高いDNS、LESを行う上で、この森西の議論は非常に重要であると考えられる。しかし、これら森西の保存特性に関する議論および運動量、運動エネルギーを適切に保存する差分スキームの構成は、基本的には等間隔正規直交座標系に限定されている。従って、任意の幾何形状の流れ場に対して高精度なDNSやLESを行うためには、森西の議論を一般座標系に拡張することが望まれる。

そこで第2章では、森西(1996a)が正規直交座標系において展開した基礎方程式の解析的保存特性に関する議論が、変数変換に基づく単純な座標変換の概念を導入して一般座標系に拡張される。そして、森西(1996a～b, 1998a～b)により運動量および運動エネルギーの保存特性に関して再検討または新たに適切になるように提案された等間隔正規直交座標系における2次精度および4次精度差分スキームが、比較的簡単に一般座標系に拡張できることを示す。それに基づき、スタガード、レギュラおよびコロケート格子系において、運動量および運動エネルギーの保存特性が適切な一般座標系差分スキームを構成する。

## 2.1 座標変換

複雑な形状をした流れ場を有限差分法または有限体積法で解析する場合、図2.1.1(a)のように、流れ場の幾何形状に適合した計算格子が生成される。計算格子が等間隔直交格子である場合、支配方程式系は最も容易に離散化することができる。そこで、変数変換を利用して物理座標系  $(x, y, z) = (x_1, x_2, x_3)$  における基礎方程式を、格子間隔  $\Delta\xi = \Delta\eta = \Delta\zeta = 1$  の等間隔正規直交座標系である計算座標系  $(\xi, \eta, \zeta) = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  に座標変換することを考える。

ある変数  $\Phi$  の1階微分は、変数変換により次のように物理座標系から計算座標系へ変換される。

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_m} \quad (2.1.1)$$

以降ことわりのない場合、一つの項の中で同じ指標が2度現れる時はその指標を変えた総和を表す、アインシュタインの和の規約に従うものとする。ここでは保存形の基礎方程式系を導出することを目的としているから、式(2.1.1)の保存形式を導くと、以下ようになる。

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = J \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left( \frac{1}{J} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} \Phi \right) \quad (2.1.2)$$

ここで、 $J$ は物理空間から計算空間への変換で定義されるヤコビアンであり、2次元および3次元の場合、

$$J^{-1} = \det \begin{pmatrix} x_\xi & y_\xi \\ x_\eta & y_\eta \end{pmatrix} = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi \quad (2.1.3)$$

$$J^{-1} = \det \begin{pmatrix} x_\xi & x_\eta & x_\zeta \\ y_\xi & y_\eta & y_\zeta \\ z_\xi & z_\eta & z_\zeta \end{pmatrix} = x_\xi y_\eta z_\zeta + x_\eta y_\zeta z_\xi + x_\zeta y_\xi z_\eta - x_\zeta y_\eta z_\xi - x_\eta y_\zeta z_\zeta - x_\xi y_\zeta z_\eta \quad (2.1.4)$$

で与えられる。 $x_\xi$ は偏微分 $\partial x / \partial \xi$ を表し、その他 $y_\xi$ 等も同様である。1階微分を繰り返すことにより、ある変数 $\Phi$ の2階微分は以下のように導くことができる。

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right) = J \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left( \frac{1}{J} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_n}{\partial x_j} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_n} \right) \quad (2.1.5)$$

$$\Delta \Phi = \nabla^2 \Phi = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right) = J \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left( \frac{1}{J} G^{mm} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_m} \right) \quad (2.1.6)$$

式(2.1.6)中の $G^{mm}$ は、物理空間における計算格子のひずみの度合いを表す格子ひずみテンソル(mesh skewness tensor)であり(Zang *et al.* 1994)次式で与えられる。

$$G^{mm} = \frac{1}{J} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \frac{\partial \xi_n}{\partial x_j} \quad (2.1.7)$$

定義から、格子ひずみテンソルは、対称テンソルであることは明らかである。計算格子が直交で、しかも $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ 軸の方向が $(x_1, x_2, x_3)$ 軸の方向と一致している場合、メトリックおよび格子ひずみテンソルは、

$$\frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} = \delta_{mi} \quad (m=n)$$

$$\frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} = 0, \quad (m \neq n)$$

$$G^{nni} \neq 0, \quad (m = n)$$

$$G^{nni} = 0, \quad (m \neq n)$$

である。さらに等間隔である場合、ヤコビアン、メトリック、格子ひずみテンソルの非ゼロ成分は空間的に一定である。

## 2.2 正規直交座標系における基礎方程式の解析的保存特性

一般座標系における非圧縮性流体の基礎方程式の解析的保存特性を調べる前に、森西(1996a)により展開された、正規直交座標系における非圧縮性流体の基礎方程式の解析的保存特性に関する議論を紹介する。保存形の定義は森西(1996a)に従い、ある変数  $f$  の時間発展方程式

$$\frac{\partial f}{\partial t} + F^1 + F^2 + F^3 \dots = 0 \quad (2.2.1)$$

中の空間微分項  $F$  が次のような発散形で表される場合、その項は保存形であるとする。

$$F^k = \nabla \cdot (G^k) = \frac{\partial}{\partial x_j} (G_j^k) \quad (2.2.2)$$

式(2.2.1)の両辺をコントロールボリュームで積分し、ガウスの発散定理を利用すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V f dV &= - \iiint_V \frac{\partial}{\partial x_j} (G^1 + G^2 + G^3 \dots) dV \\ &= - \iint_S (G^1 + G^2 + G^3 \dots) \cdot dS \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

となり、コントロールボリューム内の  $f$  の時間変化率がコントロールボリューム界面を通して出入りする正味流速  $G^k$  に等しいということの意味する。

非圧縮性流体の支配方程式は、連続の式およびNavier-Stokes方程式であり、正規直交座標系において以下の式で与えられる。

$$(\text{Cont.}) = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.2.4)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + (\text{Conv.})_i + (\text{Pres.})_i + (\text{Visc.})_i = 0 \quad (2.2.5)$$

式(2.2.4)中の記号(Cont.)は連続の式を表している。また、式(2.2.5)中の(Pres.) および(Visc.) はNavier-Stokes方程式中の圧力項および粘性項を表し、次のように定義される。

$$(\text{Pres.})_i = \frac{\partial p}{\partial x_i} \quad (2.2.6)$$

$$(\text{Visc.})_i = -\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad (2.2.7)$$

ここで、 $p$  は(圧力)/(密度)であり、 $\nu$  は動粘性係数 (kinematic viscosity,  $= \mu/\rho$ ,  $\mu$ : 粘性係数,  $\rho$ : 密度)である。さらに式(2.2.5)中の (Conv.) は対流項であり、保存形である発散型 (Div.)、の他に勾配型 (Adv.)、混合型 (Skew.)、および回転型 (Rot.) がある。

$$(\text{Div.})_i = \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j u_i) \quad (2.2.8)$$

$$(\text{Adv.})_i = u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (2.2.9)$$

$$(\text{Skew.})_i = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j u_i) + \frac{1}{2} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (2.2.10)$$

$$(\text{Rot.})_i = u_j \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial u_j u_i}{\partial x_j} \quad (2.2.11)$$

これらの対流項の型間には、以下のような関係式が成り立つ。

$$(\text{Adv.})_i = (\text{Div.})_i - u_i (\text{Cont.}) \quad (2.2.12)$$

$$(\text{Skew.})_i = \frac{1}{2} (\text{Div.})_i + \frac{1}{2} (\text{Adv.})_i \quad (2.2.13)$$

$$(\text{Rot.})_i = (\text{Adv.})_i \quad (2.2.14)$$

$$(\text{Skew.})_i = (\text{Div.})_i - \frac{1}{2} u_i (\text{Cont.}) = (\text{Adv.})_i + \frac{1}{2} u_i (\text{Cont.}) \quad (2.2.15)$$

従って、

- (1) 対流項の型として解析的には2種類の独立な型しか存在しない。
- (2) 発散型が先天的に保存型である。
- (3) 連続の式(2.2.4)が満足される場合に全ての型が等価となる。

ことがわかる(森西 1996a)。次に、式(2.2.5)の  $i=1$  成分に  $u_1$  を乗じることにより速度二乗量  $u_1^2/2$  の輸送方程式を導くと以下ようになる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{u_1^2}{2} \right) + u_1 (\text{Conv.})_1 + u_1 (\text{Pres.})_1 + u_1 (\text{Visc.})_1 = 0 \quad (2.2.16)$$

式(2.2.16)中の左辺第2項の対流項は、Navier-Stokes方程式中の対流項の型に応じて次のように変形される。

$$u_1 (\text{Div.})_1 = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( u_j \frac{u_1^2}{2} \right) + \frac{u_1^2}{2} (\text{Cont.}) \quad (2.2.17)$$

$$u_1 (\text{Adv.})_1 = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( u_j \frac{u_1^2}{2} \right) - \frac{u_1^2}{2} (\text{Cont.}) \quad (2.2.18)$$

$$u_1 (\text{Skew.})_1 = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( u_j \frac{u_1^2}{2} \right) \quad (2.2.19)$$

これらから、速度二乗量の輸送方程式中では混合型が保存形であり、連続式(2.2.4)が満足される場合、全ての型が等価となり保存形となることがわかる。式(2.2.16)中の圧力項および粘性項は、それぞれ以下のように変形される。

$$u_1 (\text{Pres.})_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} (p u_1) - p \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \quad (2.2.20)$$

$$u_1 (\text{Visc.})_1 = - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( u_1 \nu \frac{\partial u_1}{\partial x_j} \right) + \nu \frac{\partial u_1}{\partial x_j} \frac{\partial u_1}{\partial x_j} \quad (2.2.21)$$

これら圧力項および粘性項は、それぞれの式において第2項が発散型で記述されていないので保存形ではない。その他の速度の二乗量成分  $u_2^2/2$  と  $u_3^2/2$  の解析的保存特性についても  $u_1^2/2$  と同様である。さらに、式(2.2.5)の  $i$  成分に  $u_i$  を乗じて縮約を取ることにより、運動エネルギー

Terms in transport eqs.	$u_i$	$u_i^2/2$	$K = u_i^2/2$
(Div.)	⊙	○	○
(Conv.)	(Adv.)	○	○
	(Skew.)	○	⊙
	(Pres.)	⊙	×
(Visc.)	⊙	×	×

TABLE 2. 2. 1 Analytical conservative properties of terms in transport equations of momentum, square values of velocity component and kinetic energy (extracted from Morinishi(1996a)).

ギー  $K(=u_i u_i / 2)$  の輸送方程式を導出できる。

$$\frac{\partial K}{\partial t} + u_i (\text{Conv.})_i + u_i (\text{Pres.})_i + u_i (\text{Visc.})_i = 0 \quad (2.2.22)$$

式(2.2.22)左辺第2項の対流項は、速度二乗量の輸送方程式中の対流項と同様に評価できるので省略する。圧力項及び粘性項は以下のように変形される。

$$u_i (\text{Pres.})_i = \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i) - p (\text{Cont.}) \quad (2.2.23)$$

$$u_i (\text{Visc.})_i = - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( u_i \nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + \nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (2.2.24)$$

圧力項は、連続の式(2.2.5)が満足されると保存形となる。粘性項は、運動エネルギーの粘性散逸を表す式(2.2.24)右辺第2項の存在により保存形ではない。

以上、森西(1996a)が展開した正規直交座標系における Navier-Stokes 方程式および速度二乗量と運動エネルギーの輸送方程式中の各項の保存特性をまとめると、表2.2.1のような結果になる。表2.2.1において、◎は保存形、○は連続の式(Cont.)=0が満足されると保存形、×は非保存形であることを示している。この結果、非粘性で連続の式が満足される場合、非圧縮性流体の運動方程式は、運動量の保存に加えて運動エネルギーの保存も規定していることになるので、対流項と同様に圧力項に関する運動エネルギーの保存特性の重要性も注目されるべきであると森西(1996a)は指摘している。また、速度二乗量は、レイノルズ応力の垂直成分に直接関係するので、速度二乗量の輸送方程式における対流項の保存特性も重要であると森西(1996a)は指摘する。粘性項に関しては、Navier-Stokes方程式中でのみ保存形となる。森西(1996a)に従い、本研究においても表2.1.1の解析的保存特性を満足する差分スキームを「適切な差分スキーム」と呼ぶことにする。

### 2.3 座標変換を施した基礎方程式系の解析的保存特性

次に、座標変換を施した基礎方程式系の解析的保存特性を調べる。まず、連続の式(2.2.4)と Navier-Stokes 方程式(2.2.5)を、式(2.1.1)および式(2.1.6)を用いて座標変換すると以下のようになる。

$$(\text{Cont.}) = \frac{\partial J}{\partial \xi_m} = 0 \quad (2.3.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{u_i}{J} \right) + (\text{Conv.})_i + (\text{Pres.})_i + (\text{Visc.})_i = 0 \quad (2.3.2)$$

$$(\text{Pres.})_i = \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left( \frac{1}{J} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} p \right) = \frac{1}{J} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \frac{\partial p}{\partial \xi_m} \quad (2.3.3)$$

$$(\text{Visc.})_i = - \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left( \nu C_m^{mm} \frac{\partial u_i}{\partial \xi_m} \right) \quad (2.3.4)$$

式(2.3.1)中の  $U_m$  は体積フラックス (または反変速度成分にヤコビアン の逆数を乗じた量) であり, 次式で与えられる,

$$U_m = \frac{1}{J} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} u_j \quad (2.3.5)$$

連続の式(Cont.), Navier-Stokes 方程式中の圧力項(Pres.)<sub>i</sub> および粘性項(Visc.)<sub>i</sub> は, それぞれ式(2.3.1), (2.3.3) および(2.3.4) で示されるように発散型で記述されるので全て保存形である. 式(2.3.2)中の対流項(Conv.)<sub>i</sub> は, 2.2 で紹介した正規直交座標系の場合と同様に, 発散型(Div.)<sub>i</sub>, 勾配型(Adv.)<sub>i</sub> および混合型(Skew.)<sub>i</sub> が定義される,

$$(\text{Div.})_i = \frac{\partial}{\partial \xi_m} (U_m u_i) \quad (2.3.6)$$

$$(\text{Adv.})_i = U_m \frac{\partial u_i}{\partial \xi_m} \quad (2.3.7)$$

$$(\text{Skew.})_i = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi_m} (U_m u_i) + \frac{1}{2} U_m \frac{\partial u_i}{\partial \xi_m} \quad (2.3.8)$$

これらの対流項を座標変換前の対流項(2.2.8)~(2.2.10)と比較すると, 対流成分  $u_i$  が体積フラックス  $U_m$  になっていることを除いて, 形式的に大きな違いがないことがわかる. Navier-Stokes 方程式中の対流項の各型は, 座標変換前と全く同様に次のように関係づけられる,

$$(\text{Adv.})_i = (\text{Div.})_i - u_i (\text{Cont.}) \quad (2.3.9)$$

$$(\text{Skew.})_i = \frac{1}{2} (\text{Div.})_i + \frac{1}{2} (\text{Adv.})_i \quad (2.3.10)$$

$$(\text{Skew.})_i = (\text{Div.})_i - \frac{1}{2} u_i (\text{Cont.}) = (\text{Adv.})_i + \frac{1}{2} u_i (\text{Cont.}) \quad (2.3.11)$$

式(2.3.6)~(2.3.11)から, 発散型が保存形であり, 式(2.3.1)の連続の式が満たされる場合, 勾配型(Adv.)<sub>i</sub> と混合型(Skew.)<sub>i</sub> は発散型(Div.)<sub>i</sub> と等価となり保存形となることがわかる.

次に, 式(2.3.2)の  $i=1$  成分に  $u_1$  を乗じ, 速度二乗量  $u_1^2/2$  の輸送方程式を導くと以下のようになる.

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{J} \frac{u_1^2}{2} \right) + u_1 (\text{Conv.})_1 + u_1 (\text{Pres.})_1 + u_1 (\text{Visc.})_1 = 0 \quad (2.3.12)$$

式(2.3.12)左辺第2項は, Navier-Stokes 方程式中の対流項の型に応じて, 次のように変形できる.

$$u_i(\text{Div.})_1 = \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left( U_m \frac{u_1^2}{2} \right) + \frac{u_1^2}{2} (\text{Cont.}) \quad (2.3.13)$$

$$u_i(\text{Adv.})_1 = \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left( U_m \frac{u_1^2}{2} \right) - \frac{u_1^2}{2} (\text{Cont.}) \quad (2.3.14)$$

$$u_i(\text{Skew.})_1 = \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left( U_m \frac{u_1^2}{2} \right) \quad (2.3.15)$$

速度二乗量の輸送方程式中では、混合型のみが保存形であり、式(2.3.1)の連続の式が満足されると、勾配型および発散型が混合型と等価となり保存形となる。圧力項および粘性項は、以下のように変形できる。

$$u_i(\text{Pres.})_1 = \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left( p \frac{1}{J} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_1} u_1 \right) - p \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left( \frac{1}{J} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_1} u_1 \right) \quad (2.3.16)$$

$$u_i(\text{Visc.})_1 = - \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left( u_1 \nu G^{mm} \frac{\partial u_1}{\partial \xi_n} \right) + \nu G^{mm} \frac{\partial u_1}{\partial \xi_m} \frac{\partial u_1}{\partial \xi_n} \quad (2.3.17)$$

これらは発散型に変形できないため、保存形とはならない。その他の速度二乗量成分  $u_2^2/2$ 、 $u_3^2/2$  の輸送方程式の場合も、 $u_1^2/2$  の輸送方程式と同様な保存特性が得られる。

式(2.3.2)の  $i$  成分に  $u_i$  を乗じて縮約を取り、運動エネルギー  $K$  の輸送方程式を導出すると以下ようになる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{K}{J} \right) + u_i(\text{Conv.})_i + u_i(\text{Pres.})_i + u_i(\text{Visc.})_i = 0 \quad (2.3.18)$$

対流項の保存特性は、速度二乗量の輸送方程式の場合とはほぼ同様に評価できるため省略する。圧力項および粘性項は、次のように変形できる。

$$u_i(\text{Pres.})_i = \frac{\partial}{\partial \xi_m} (p U_m) - p(\text{Cont.}) \quad (2.3.19)$$

$$u_i(\text{Visc.})_i = - \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left( u_i \nu G^{mm} \frac{\partial u_i}{\partial \xi_n} \right) + \nu G^{mm} \frac{\partial u_i}{\partial \xi_m} \frac{\partial u_i}{\partial \xi_n} \quad (2.3.20)$$

圧力項は、式(2.3.1)の連続の式が満足されると保存形となる。粘性項は発散型に変形できないため、保存形とはならない。式(2.3.20)中の右辺第2項は、粘性による運動エネルギー  $K$  の散逸を表している。

以上をまとめると、座標変換した基礎方程式(連続の式、Navier-Stokes方程式、速度二乗量および運動エネルギー  $K$  の輸送方程式)の解析的保存特性は、表2.2.1で示される座標変換前の基礎方程式の解析保存特性(森西 1996a)と全く等しいことがわかる。



## 2.4 離散オペレータの定義

前節では、座標変換された基礎方程式中の速度、圧力といった基礎変数の微分は、全て等間隔直交座標系である  $(x_1, x_2, x_3)$  空間上における微分に変換された。従って、基本的な差分および補間スキームは、等間隔直交座標系で定義されていればよい。任意の変数  $\Phi$  の間隔  $nh_1$  の  $x_1$  方向の差分、補間および任意の2つの変数  $\Phi, \Psi$  の積に対する補間(森西 1996a)は、次のように定義される。

$$\begin{aligned} \left. \frac{\delta_x \Phi}{\delta_x \xi_1} \right|_{\xi_1, \xi_2, \xi_3} &= \frac{\Phi\left(\xi_1 + \frac{nh_1}{2}, \xi_2, \xi_3\right) - \Phi\left(\xi_1 - \frac{nh_1}{2}, \xi_2, \xi_3\right)}{nh_1} \\ &= \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_1} + \frac{n^2}{24} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \xi_1^3} h_1^2 + \frac{n^4}{1920} \frac{\partial^5 \Phi}{\partial \xi_1^5} h_1^4 + \frac{n^6}{322560} \frac{\partial^7 \Phi}{\partial \xi_1^7} h_1^6 + \dots \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

$$\begin{aligned} \left. \bar{\Phi}^{(e)} \right|_{\xi_1, \xi_2, \xi_3} &= \frac{\Phi\left(\xi_1 + \frac{nh_1}{2}, \xi_2, \xi_3\right) + \Phi\left(\xi_1 - \frac{nh_1}{2}, \xi_2, \xi_3\right)}{2} \\ &= \Phi + \frac{n^2}{8} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi_1^2} h_1^2 + \frac{n^4}{384} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi_1^4} h_1^4 + \frac{n^6}{46080} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial \xi_1^6} h_1^6 \end{aligned} \quad (2.4.2)$$

$$\begin{aligned} \left. \bar{\Phi} \bar{\Psi}^{(e)} \right|_{\xi_1, \xi_2, \xi_3} &= \frac{1}{2} \Phi\left(\xi_1 + \frac{nh_1}{2}, \xi_2, \xi_3\right) \Psi\left(\xi_1 - \frac{nh_1}{2}, \xi_2, \xi_3\right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \Psi\left(\xi_1 + \frac{nh_1}{2}, \xi_2, \xi_3\right) \Phi\left(\xi_1 - \frac{nh_1}{2}, \xi_2, \xi_3\right) \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

式(2.4.1)と式(2.4.2)は、それぞれ計算空間上で2次精度の差分近似および補間である。ただし、その打ち切り誤差の主要項のオーダーは、あくまでも計算空間上のものである。ここで、以降、離散式の表記において、補間の方向を表す上付き添字は、アインシュタインの和の規約の適用外であることに注意する。

4次精度の差分近似は、異なる間隔の2次精度差分オペレータの組み合わせにより、次のように表される(森西 1996a)。

$$\frac{4}{3} \frac{\delta_1 \Phi}{\delta_1 \xi_1} - \frac{1}{3} \frac{\delta_2 \Phi}{\delta_2 \xi_1} = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_1} - \frac{1}{480} \frac{\partial^5 \Phi}{\partial \xi_1^5} h_1^4 + \dots \quad (2.4.4)$$

$$\frac{9}{8} \frac{\delta_1 \Phi}{\delta_1 \xi_1} - \frac{1}{8} \frac{\delta_3 \Phi}{\delta_3 \xi_1} = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_1} - \frac{1}{640} \frac{\partial^5 \Phi}{\partial \xi_1^5} h_1^4 + \dots \quad (2.4.5)$$

$$\frac{4}{3} \frac{\delta_2 \Phi}{\delta_2 \xi_1} - \frac{1}{3} \frac{\delta_4 \Phi}{\delta_4 \xi_1} = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_1} - \frac{1}{30} \frac{\partial^5 \Phi}{\partial \xi_1^5} h_1^4 + \dots \quad (2.4.6)$$

同様に、4次精度補間も2次精度の補間オペレータを組み合わせてして構成される。

$$\frac{4}{3} \Phi^{1\xi_1} - \frac{1}{3} \Phi^{2\xi_1} = \Phi - \frac{1}{96} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi_1^4} h_1^4 + \dots \quad (2.4.7)$$

$$\frac{9}{8} \Phi^{1\xi_1} - \frac{1}{8} \Phi^{2\xi_1} = \Phi - \frac{3}{128} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi_1^4} h_1^4 + \dots \quad (2.4.8)$$

差分による離散化式の保存形の定義は、式(2.2.1)で表されるように、ある変数 $f$ の時間発展方程式の空間離散化式を考え、その式が、次式のように差分オペレータでまとめられる場合、局所保存形であるとする(森西 1996a)。

$$F^k = \frac{\delta_1}{\delta_1 x_j} (G_j^k) + \frac{\delta_2}{\delta_2 x_j} (G_j^k) + \frac{\delta_3}{\delta_3 x_j} (G_j^k) \dots = \frac{\delta_n}{\delta_n x_j} (G_j^k), \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (2.4.9)$$

これは、解析的保存形の式(2.2.2)に対応する。さらに、周期的な場において、 $F^k$ を各方向1周期の総和が次式を満足する場合に大域的保存形であるとする。

$$\sum_{\xi_1} \sum_{\xi_2} \sum_{\xi_3} F^k \Delta V = 0 \quad (2.4.10)$$

ここで、 $\Delta V = h_1 h_2 h_3$ である。

離散化式の保存形の定義を座標変換された方程式系に拡張すると、以下ようになる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{f}{J} \right) + F^1 + F^2 + F^3 \dots = 0 \quad (2.4.11)$$

$$\begin{aligned} F^k &= \frac{\delta_1}{\delta_1 \xi_m} \left( \frac{1}{J} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} G_j^k \right) + \frac{\delta_2}{\delta_2 \xi_m} \left( \frac{1}{J} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} G_j^k \right) + \frac{\delta_3}{\delta_3 \xi_m} \left( \frac{1}{J} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} G_j^k \right) \dots \\ &= \frac{\delta_n}{\delta_n \xi_m} \left( \frac{1}{J} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} G_j^k \right), \quad (n=1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \quad (2.4.12)$$

次節における離散化式の解析において、いくつかの関係式を導くために次のような離散的等式(森西 1996a)を必要とする。

$$\frac{\delta_n \Phi \tilde{\Psi}^{\xi_m}}{\delta_n \xi_j} = \Phi \frac{\delta_{2n} \Psi}{\delta_{2n} \xi_j} + \Psi \frac{\delta_{2n} \Phi}{\delta_{2n} \xi_j} \quad (2.4.13)$$

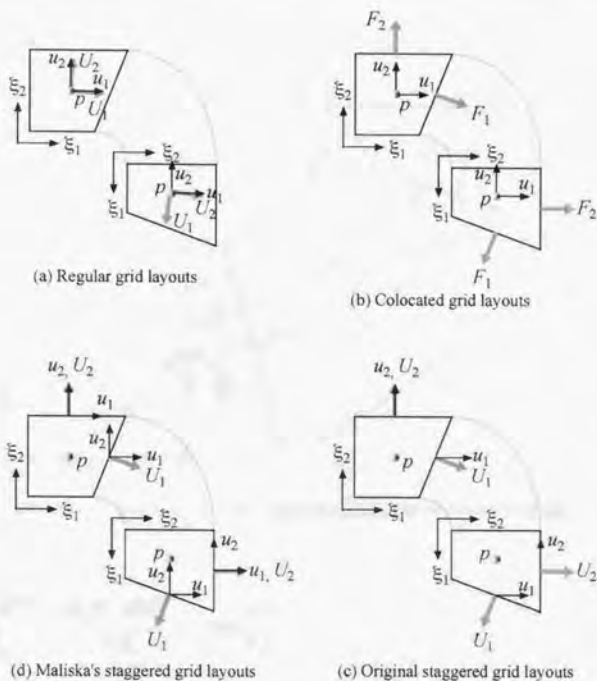


FIGURE 2.5.1 Various grid layouts in generalized curvilinear coordinate system.

$$[(\Phi\Psi) \cdot \Psi]^{n\bar{\xi}} = \bar{\Phi}^{n\bar{\xi}} \bar{\Psi}^{n\bar{\xi}} \quad (2.4.14)$$

$$\bar{\Phi}^{n\bar{\xi}} \bar{\Psi}^{n\bar{\xi}} = \frac{1}{2} \bar{\Phi} \bar{\Psi}^{n\bar{\xi}} + \frac{1}{2} \bar{\Phi} \bar{\Psi}^{n\bar{\xi}} \quad (2.4.15)$$

$$\frac{\delta_n \bar{\Phi}^{n\bar{\xi}}}{\delta_n \bar{\xi}_j} = \frac{\delta_n \Phi}{\delta_{2n} \bar{\xi}_j} \quad (2.4.16)$$

$$\frac{\delta_n \bar{\Phi}^{n\bar{\xi}}}{\delta_n \bar{\xi}_j} = \frac{\delta_n \Phi^{n\bar{\xi}}}{\delta_n \bar{\xi}_j} \quad (2.4.17)$$

$$\bar{\Psi} \frac{\delta_n \bar{\Phi}^{n\bar{\xi}}}{\delta_n \bar{\xi}_j} = \frac{\delta_n \Psi \cdot \bar{\Phi}^{n\bar{\xi}}}{\delta_n \bar{\xi}_j} - \Phi \frac{\delta_n \Psi}{\delta_n \bar{\xi}_j} \quad (2.4.18)$$

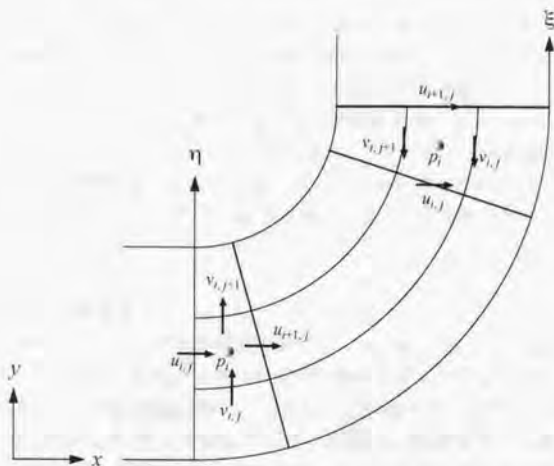


FIGURE 2.5.2 Drawback of original staggered grid layout in curvilinear coordinates.

$$\Phi \frac{\delta_n \Psi \cdot \bar{\Phi}^{n\epsilon}}{\delta_n \xi_j} = \frac{1}{2} \frac{\delta_n \Psi \cdot \bar{\Phi}^{n\epsilon}}{\delta_n \xi_j} + \frac{1}{2} \Phi \frac{\delta_n \Psi}{\delta_n \xi_j} \quad (2.4.19)$$

## 2.5 一般座標系における格子配列系

2.3において導出された一般座標系における非圧縮性流れの支配方程式は、直交速度成分を基礎変数としていたが、これとは別に反変あるいは共変速度成分を基礎変数とする方法もある(越塚ら 1988; 井小萩ら 1989; 石川 1989; Karki and Patankar 1989)。しかし、後者の場合、座標変換した基礎方程式中にソース項が現れ強保存形とはならず、離散化も前者と比較して煩雑である。従って、ここでは、基礎変数が直交速度成分である場合を考える。

### 2.5.1 レギュラ格子系

これまで、一般座標系における格子配列系として、図2.5.1に示すものが使用されている。図2.5.1(a)に示されるレギュラ格子系では、直交速度成分、反変速度成分、圧力が同位置に定義されている。従来から、この格子系は圧力場および速度場にチェス盤状の振動(Wiggle)が生じることで知られている。こうした振動の原因は、主に速度と圧力勾配との間のカップリングの低さから生じている。

### 2.5.2 コロケート格子系

レギュラ格子系の圧力振動の問題を解決するため、定常流問題において、Rhie *et al.* (1983)

は、セル界面における速度を求めるために特別な補間を導入したコロケート(Colocated)格子系(図2.5.1(b))を提案した。これは、セル界面に速度を補間するとき、速度の離散化式を構成し直して、圧力の差分ステンシルを小さくすることによって速度と圧力とのカップリングを改善したものであり、このような特別な補間は、運動量補間(momentum interpolation)とも呼ばれている(Majumdar: 1988)。コロケート格子系は、さらに非定常流問題に拡張され(Zang *et al.* 1994)、さらには空間離散化を高次精度化しチャンネル内乱流のDNSに適用され、スペクトル法によるDNS計算とほぼ一致する結果が得られることが報告されている(佐竹 1997; 梶島ら: 1997)。

### 2.5.3 スタガード格子系

速度と圧力のデカップリングを防ぐ別の方法として、図2.5.1(c)に示されるように、速度成分の定義点が圧力の定義点からそれぞれの方向に半格子ずれた位置に定義されるスタガード格子系がある(Harlow and Welsh 1965)。しかし、この従来のスタガード格子系は、図2.5.2のように流れ場の流れ方向が90度回転するような場合、90度曲がった部分における直交速度が計算格子界面に対して平行になって本来のスタガード格子系の利点が失われてしまうことがわかる(Shyy and Vu 1991)。ここで、流れ方向速度  $u$  の Navier-Stokes 方程式中の圧力項を、簡単のため2次元で座標変換することを考えると次のようになる。

$$\frac{\partial p}{\partial x} = y_{\eta} \frac{\partial p}{\partial \xi} - y_{\xi} \frac{\partial p}{\partial \eta} \quad (2.5.1)$$

90度曲がった部分においては、 $\eta = \text{一定の線}$  と  $y = \text{一定の線}$  がほぼ直交するので、ほぼ  $y_{\eta} = 0$  であるから、圧力勾配は、次のような離散化式から計算される。

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= y_{\xi} \left( \frac{p_{i,j} + p_{i-1,j} + p_{i-1,j-1} + p_{i,j-1}}{4} - \frac{p_{i,j} + p_{i-1,j} + p_{i-1,j+1} + p_{i,j+1}}{4} \right) \\ &= y_{\xi} \left( \frac{p_{i-1,j-1} + p_{i,j-1} - p_{i-1,j+1} - p_{i,j+1}}{4} \right) \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

上式から、90度曲がった部分では、圧力勾配が基本的にステンシル2の差分で近似されることになり、これはレギュラ格子系における速度と圧力のデカップリングの問題と類似している。これに対して、Maliska *et al.* (1984) は、図2.5.1(d)のような、それぞれのセル界面において全ての直交速度成分が定義されるスタガード格子系を提案した。この配列系の場合、3次元計算を想定すると、9個の運動量方程式を解く必要があり、離散化式が複雑になりメトリック、ヤコビアンが補間が多くなるが、前述の問題は回避される。従って、ここでは、この Maliska のスタガード格子系を一般座標系におけるスタガード格子系として取り扱う。

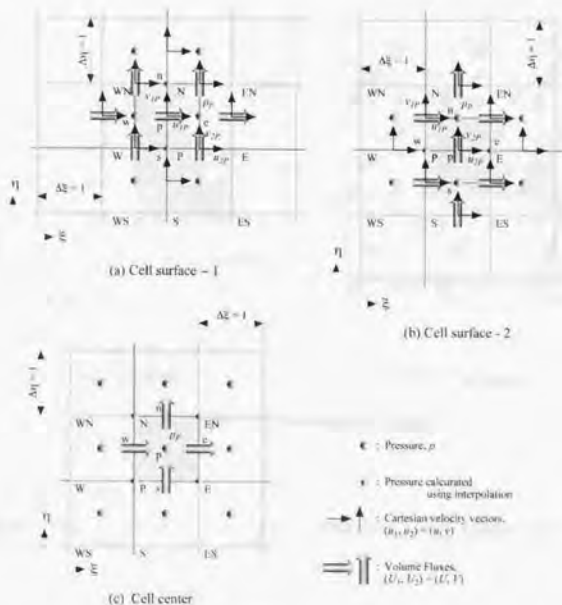


FIGURE 2.6.1 Staggered grid layout.

## 2.6 適切な一般座標系差分スキームの構成

### 2.6.1 スタガード格子系における一般座標系差分スキーム

Maliskaのスタガード格子系における直交速度成分、圧力および体積フラックスの定義位置を図2.6.1に示す。スタガード格子系差分スキームの連続の式と圧力項の2次精度の離散化は、正規直交座標系における差分スキーム(森西1996b)を拡張し、次のように与えられる。

$$(\text{Cont. - M2}) = \frac{\delta_1 U_m}{\delta_1 \xi_m} = 0 \quad (2.6.1)$$

$$(\text{Pres. - M2}) = \frac{\delta_1}{\delta_1 \xi_m} \left( \frac{1}{J} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} p^s \right) = \frac{1}{J} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} \frac{\delta_1 p^s}{\delta_1 \xi_m} \quad (2.6.2)$$

上式のカッコ内、-M2はMaliskaのスタガード格子系(Maliska's Staggered grid layout)における2次精度差分スキームであることを示している。上付添え字#は、その量は、明示されないが、補間を必要とする事を示している。この補間を導入することによる影響については3.2.2において考察される。式(2.6.2)において、圧力項の保存形式と非保存形式は、離散的に

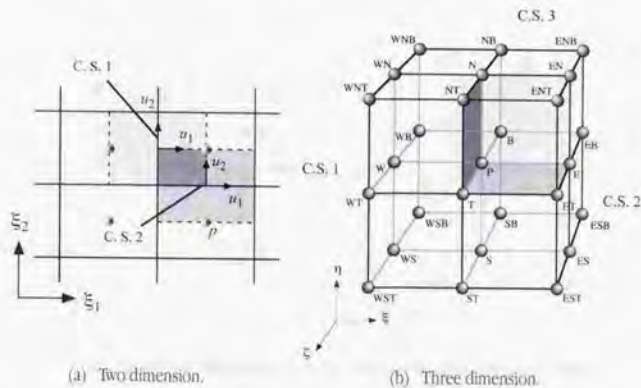


FIGURE 2.6.2 Numbering of cell surfaces.

は厳密に等しくないが近似的に等しいと見なす。

運動エネルギーの輸送方程式中の圧力項の保存特性は、森西(1996b)に従い、大域的に取り扱い、

$$\sum_{\xi_1} \sum_{\xi_2} \sum_{\xi_3} u_i (\text{Pres.-M2})_i = \sum_{\xi_1} \sum_{\xi_2} \sum_{\xi_3} \overline{U_m \frac{\delta_i p}{\delta_i \xi_m}} \quad (2.6.3)$$

$$\overline{U_m \frac{\delta_i p}{\delta_i \xi_m}} = \frac{\overline{\delta_i p}}{\delta_i \xi_m} U_m = p (\text{Cont.-M2}) \quad (2.6.4)$$

となる。従って、連続の式の離散式(2.6.1)が満足される場合、圧力項の離散式(2.6.2)は、運動エネルギーの輸送方程式中でも大域的保存形となることがわかる。ただし、式(2.6.3)、(2.6.4)の導出には、圧力項を実際に離散化するとき用いられる式(2.6.2)中の保存形式ではなく非保存形式を用いているので、圧力項の運動エネルギー $K$ の保存特性は厳密性が失われている。この影響については、第3章において検証される。

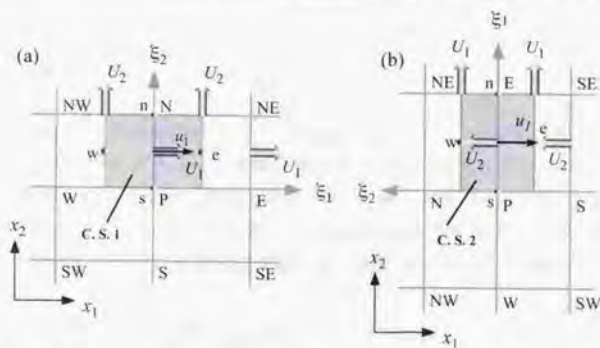
圧力と連続の式のカップリングアルゴリズムとして、フラクショナルステップ法を考える。

$$u_i^* = u_i^{n-1} - J \Delta t \left[ (\text{Conv. - M2})_i + (\text{Visc. - M2})_i \right] \quad (2.6.5)$$

$$(\text{Cont. - M2})^n = 0 \quad (2.6.6)$$

$$u_i^n = u_i^* - J \Delta t (\text{Pres. - M2})_i^n \quad (2.6.7)$$

ここで、 $\Delta t$ は時間間隔、上付き添字 $n$ は時間ステップ数、上付き添字 $*$ は時間ステップ $n-1$ と $n$ との間の中間的な時間ステップを示している。式(2.6.7)を式(2.6.6)に代入して、次式で

FIGURE 2.6.3 Discretization of the convection term of the Cartesian velocity component,  $u_1$ .

表される2次精度の圧力方程式が得られる。

$$\frac{\delta_1}{\delta_1 \xi_m} \left( G^{mn} \frac{\delta_1 P^{n0}}{\delta_1 \xi_n} \right) = \frac{1}{\Delta t} (\text{Cont. - M2})' \quad (2.6.8)$$

上式の導出の過程でも、圧力項の離散化式(2.6.2)の非保存形式が用いられている。2次精度の対流項差分スキームは、正規直交座標系における差分スキーム(森西1996b)を拡張し、次のように定義する。

$$(\text{Div. - M2})_i = \frac{\delta_1 \overline{U_m^{1c}} u_i}{\delta_1 \xi_m} \quad (2.6.9)$$

$$(\text{Adv. - M2})_i = \overline{U_m^{1c}} \frac{\delta_1 u_i}{\delta_1 \xi_m} \quad (2.6.10)$$

$$(\text{Skew. - M2})_i = \frac{1}{2} (\text{Div. - M2})_i + \frac{1}{2} (\text{Adv. - M2})_i \quad (2.6.11)$$

ここで、対流項中の体積フラックスの補間の方向を表す上付き添字 $\xi_c$ 中の下付き添字 $C$ は、計算セル界面の番号を示す。セル界面の番号は、本来のスタガード格子系(図2.5.1(c))の場合を考えて、 $u_1$ が定義されているセル界面が1番(C.S.1と略記、以下同様)、 $u_2$ が定義されているセル界面が2番、 $u_3$ が定義されているセル界面を3番とそれぞれ定義する。2次元および3次元におけるセル界面の番号付けを図2.6.2に示す。

次に、体積フラックスの補間がなぜこのように取り扱われるかを説明する。ここで、簡単のため2次元を想定し、C.S.1における直交速度成分 $u_1$ を計算する離散化式中の対流項を、式(2.6.9)の発散型で離散化することを考える。式(2.6.9)を $i=1, C=1$ で展開すると、



$$(\text{Div.} - M2)_1 = \frac{\delta_1 \overline{U_1^{1E_1} u_1^{1E_1}}}{\delta_1 \xi_1} + \frac{\delta_1 \overline{U_2^{1E_1} u_1^{1E_1}}}{\delta_1 \xi_2} \quad (2.6.12)$$

となる。式(2.6.12)の実際の離散化を図2.6.3(a)で考えると、右辺第1項の中の体積フラックス  $U_1$  は、コントロールボリューム界面を横切る方向で、体積フラックス  $U_2$  はコントロールボリューム界面に沿った方向で補間される。次に、格子が反時計方向に90度回転した場合を図2.6.3(b)で考える。図2.6.3(a)中のC.S. 1における直交速度成分  $u_1$  と同じ位置関係にある、図2.6.3(b)中のC.S. 2における直交速度成分  $u_1$  を離散化することを考え、式(2.6.9)を  $i=1, C=2$  で展開する。

$$(\text{Div.} - M2)_1 = \frac{\delta_1 \overline{U_1^{1E_2} u_1^{1E_2}}}{\delta_1 \xi_1} + \frac{\delta_1 \overline{U_2^{1E_2} u_1^{1E_2}}}{\delta_1 \xi_2} \quad (2.6.13)$$

右辺第1項の中の体積フラックス  $U_1$  は、コントロールボリューム界面に沿った方向で、体積フラックス  $U_2$  はコントロールボリューム界面を横切る方向で補間される。ここで、格子が回転すると、直交速度成分の方向は変わらないのに対して、体積フラックスの方向は回転するという点に注意して、図2.6.3(a)と図2.6.3(b)を比較すると、補間の方向に対応がとれていることがわかる。つまり、補間される体積フラックスの位置関係に普遍性が保たれている。

式(2.6.9)~(2.6.11)のMaliskaのスタガード格子系における対流項差分スキームの各型は、離散のおよび厳密に次式で関係づけられる。

$$(\text{Adv.} - M2)_i = (\text{Div.} - M2)_i - u_i (\text{Cont.} - M2)^{1E_i} \quad (2.6.14)$$

$$u_i (\text{Div.} - M2)_i = \frac{\delta_1}{\delta_1 \xi_m} \left( \frac{\overline{U_m^{1E_i} u_i^{1E_i}}}{2} \right) + \frac{u_i u_i}{2} (\text{Cont.} - M2)^{1E_i} \quad (2.6.15)$$

$$u_i (\text{Adv.} - M2)_i = \frac{\delta_1}{\delta_1 \xi_m} \left( \frac{\overline{U_m^{1E_i} u_i^{1E_i}}}{2} \right) - \frac{u_i u_i}{2} (\text{Cont.} - M2)^{1E_i} \quad (2.6.16)$$

$$u_i (\text{Skew.} - M2)_i = \frac{\delta_1}{\delta_1 \xi_m} \left( \frac{\overline{U_m^{1E_i} u_i^{1E_i}}}{2} \right) \quad (2.6.17)$$

式(2.6.14)は解析的関係式(2.3.9)を、式(2.6.15)~(2.6.17)は解析的関係式(2.3.13)~(2.3.15)を適切に近似している。式(2.6.9)~(2.6.11)および(2.6.14)~(2.6.17)から、

- (1) Navier-Stokes 方程式中では、 $(\text{Div.} - M2)_i$  が保存形であり、連続の式(2.6.1)が満たされた場合、 $(\text{Adv.} - M2)_i$  と  $(\text{Skew.} - M2)_i$  は  $(\text{Div.} - M2)_i$  と等しくなり保存形となる。
- (2) 速度二乗量および運動エネルギー  $K$  の輸送方程式中では、混合型が保存形となり、連続の式(2.6.1)が満たされた場合、勾配型と発散型は混合型に等しくなり保存形となる。

ことがわかる。従って、式(2.6.9)~(2.6.11)で構成される Maliska のスタガード格子系における対流項差分スキームは、運動量、速度二乗量および運動エネルギーを保存し解析的要求事項を満足する適切な離散式であることがわかる。

拡散項差分スキームは、Navier-Stokes 方程式中でのみ保存形であればいいので、次式で定義する。

$$(\text{Visc. - M2})_i = -\frac{\delta_1}{\delta_1 \xi_m} \left( \nu G^{mm} \frac{\delta_1 u_i}{\delta_1 \xi_m} \right) \quad (2.6.18)$$

4次精度の場合も2次精度の場合と同様に、正規直交座標系における適切な差分スキーム(1996b)を一般座標系に拡張できる。その結果のみを示すと、以下ようになる。

#### ●フラクショナルステップ法に基づく計算アルゴリズム

$$u_i^* = u_i^{n-1} - J \Delta t \left[ (\text{Conv. - M4})_i + (\text{Visc. - M4})_i \right] \quad (2.6.19)$$

$$(\text{Cont. - M4})^n = 0 \quad (2.6.20)$$

$$u_i^n = u_i^* - J \Delta t (\text{Pres. - M4})_i^n \quad (2.6.21)$$

#### ●連続の式の離散化式

$$(\text{Cont. - M4}) = \frac{9 \delta_1 U_m}{8 \delta_1 \xi_m} - \frac{1 \delta_3 U_m}{8 \delta_3 \xi_m} = 0 \quad (2.6.22)$$

#### ●Navier-Stokes 方程式の各項の離散化式

圧力項

$$(\text{Pres. - M4})_i = \frac{9 \delta_1}{8 \delta_1 \xi_m} \left( \frac{1}{J} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} p \right) - \frac{1 \delta_3}{8 \delta_3 \xi_m} \left( \frac{1}{J} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} p \right) \quad (2.6.23)$$

対流項

$$(\text{Div. - M4})_i = \frac{9 \delta_1}{8 \delta_1 \xi_m} \left[ \left( \frac{9}{8} \frac{1}{U_m^{1 \xi_m}} - \frac{1}{8} \frac{1}{U_m^{3 \xi_m}} \right) u_i \right] - \frac{1 \delta_3}{8 \delta_3 \xi_m} \left[ \left( \frac{9}{8} \frac{1}{U_m^{1 \xi_m}} - \frac{1}{8} \frac{1}{U_m^{3 \xi_m}} \right) u_i \right] \quad (2.6.24)$$

$$(\text{Adv. - M4})_i = \frac{9}{8} \left( \frac{9}{8} \frac{1}{U_m^{1 \xi_m}} - \frac{1}{8} \frac{1}{U_m^{3 \xi_m}} \right) \frac{\delta_1 u_i}{\delta_1 \xi_m} - \frac{1}{8} \left( \frac{9}{8} \frac{1}{U_m^{1 \xi_m}} - \frac{1}{8} \frac{1}{U_m^{3 \xi_m}} \right) \frac{\delta_3 u_i}{\delta_3 \xi_m} \quad (2.6.25)$$

$$(\text{Skew. - M4})_i = \frac{1}{2} (\text{Div. - M4})_i + \frac{1}{2} (\text{Adv. - M4})_i \quad (2.6.26)$$

粘性項

$$(\text{Visc.-M4})_i = -\frac{9}{8} \frac{\delta_i}{\delta_1 \xi_m} \left[ v G^{mn} \left( \frac{9 \delta_1 u_i^{n*}}{8 \delta_1 \xi_n} - \frac{1 \delta_3 u_i^{n*}}{8 \delta_3 \xi_n} \right) \right] + \frac{1}{8} \frac{\delta_3}{\delta_3 \xi_m} \left[ v G^{mn} \left( \frac{9 \delta_1 u_i^{n*}}{8 \delta_1 \xi_n} - \frac{1 \delta_3 u_i^{n*}}{8 \delta_3 \xi_n} \right) \right] \quad (2.6.27)$$

## ●圧力方程式

$$\frac{9}{8} \frac{\delta_1}{\delta_1 \xi_m} \left[ G^{mn} \left( \frac{9 \delta_1 p^{n*}}{8 \delta_1 \xi_n} - \frac{1 \delta_3 p^{n*}}{8 \delta_3 \xi_n} \right) \right] - \frac{1}{8} \frac{\delta_3}{\delta_3 \xi_m} \left[ G^{mn} \left( \frac{9 \delta_1 p^{n*}}{8 \delta_1 \xi_n} - \frac{1 \delta_3 p^{n*}}{8 \delta_3 \xi_n} \right) \right] \\ = \frac{1}{\Delta t} (\text{Cont. - M4})^* \quad (2.6.28)$$

式(2.6.19)～(2.6.28)で構成されたMaliskaのスタガード格子系における4次精度一般座標系差分スキームは、以下のような離散的関係式を満足する。

## ●運動エネルギーの輸送方程式中の圧力項

$$\sum_{\xi_1} \sum_{\xi_2} \sum_{\xi_3} u_i (\text{Pres. - M4})_i = \sum_{\xi_1} \sum_{\xi_2} \sum_{\xi_3} \left\{ \frac{9 \delta_1 \overline{p^{1\xi_2}} U_m}{8 \delta_1 \xi_m} - \frac{1 \delta_3 \overline{p^{3\xi_2}} U_m}{8 \delta_3 \xi_m} - p (\text{Cont. - M4}) \right\} \quad (2.5.29)$$

## ●Navier-Stokes 方程式中の対流項の勾配型と発散型との間の関係式

$$(\text{Adv. - M4})_i = (\text{Div. - M4})_i - u_i \left[ \frac{9}{8} \overline{(\text{Cont. - M4})^{1\xi_2}} - \frac{1}{8} \overline{(\text{Cont. - M4})^{3\xi_2}} \right] \quad (2.6.30)$$

## ●速度二乗量の輸送方程式中の対流項の各型 (運動エネルギーの輸送方程式も同様)

$$u_i (\text{Div. - M4})_i = \frac{9}{8} \frac{\delta_1}{\delta_1 \xi_m} \left[ \left( \frac{9}{8} \overline{U_m^{1\xi_2}} - \frac{1}{8} \overline{U_m^{3\xi_2}} \right) \frac{\tilde{u}_i u_i^{1\xi_2}}{2} \right] - \frac{1}{8} \frac{\delta_3}{\delta_3 \xi_m} \left[ \left( \frac{9}{8} \overline{U_m^{1\xi_2}} - \frac{1}{8} \overline{U_m^{3\xi_2}} \right) \frac{\tilde{u}_i u_i^{3\xi_2}}{2} \right] \\ + \frac{u_i u_i}{2} \left[ \frac{9}{8} \overline{(\text{Cont. - M4})^{1\xi_2}} - \frac{1}{8} \overline{(\text{Cont. - M4})^{3\xi_2}} \right] \quad (2.6.31)$$

$$u_i (\text{Adv. - M4})_i = \frac{9}{8} \frac{\delta_1}{\delta_1 \xi_m} \left[ \left( \frac{9}{8} \overline{U_m^{1\xi_2}} - \frac{1}{8} \overline{U_m^{3\xi_2}} \right) \frac{\tilde{u}_i u_i^{1\xi_2}}{2} \right] - \frac{1}{8} \frac{\delta_3}{\delta_3 \xi_m} \left[ \left( \frac{9}{8} \overline{U_m^{1\xi_2}} - \frac{1}{8} \overline{U_m^{3\xi_2}} \right) \frac{\tilde{u}_i u_i^{3\xi_2}}{2} \right]$$

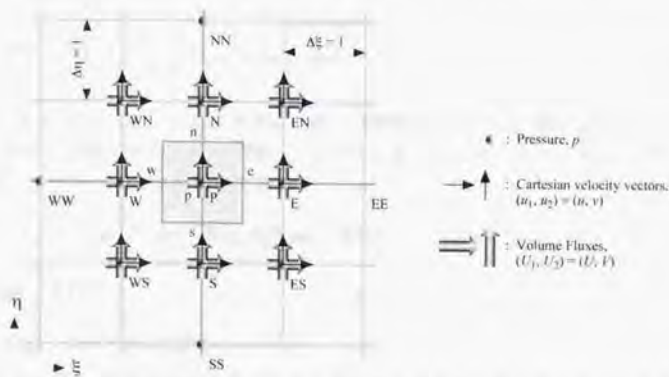


FIGURE 2.6.4 Regular grid layouts.

$$= \frac{u_1 u_1}{2} \left[ \frac{9}{8} \overline{(\text{Cont.} - \text{M4})}^{\xi_1} - \frac{1}{8} \overline{(\text{Cont.} - \text{M4})}^{\xi_2} \right] \quad (2.6.32)$$

$$u_1 (\text{Skew.} - \text{M4})_1 = \frac{9}{8} \frac{\delta_1}{\delta_1 \xi_m} \left[ \left( \frac{9}{8} \overline{U}^{\xi_1} - \frac{1}{8} \overline{U}^{\xi_2} \right) \frac{u_1 u_1}{2} \right] - \frac{1}{8} \frac{\delta_1}{\delta_1 \xi_m} \left[ \left( \frac{9}{8} \overline{U}^{\xi_1} - \frac{1}{8} \overline{U}^{\xi_2} \right) \frac{u_1 u_1}{2} \right] \quad (2.6.33)$$

従って、Maliskaらのスタガード格子系における4次精度差分スキームは、2次精度の場合と同様に、運動量、速度二乗量および運動エネルギー保存特性が形式上適切である。

### 2.6.2 レギュラ格子系における一般座標系差分スキーム

図2.6.4に示されるレギュラ格子系における一般座標系差分スキームは、正規直交座標系における適切な差分スキームを拡張して容易に構成できる。まず、連続の式とNavier-Stokes方程式中の圧力項の2次精度の離散化は次のようになる。

$$(\text{Cont.} - \text{R2}) = \frac{\delta_2 U_m}{\delta_2 \xi_m} = 0 \quad (2.6.34)$$

$$(\text{Pres.} - \text{R2})_i = \frac{\delta_2}{\delta_2 \xi_m} \left( \frac{1}{J} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} p \right) = \frac{1}{J} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} \frac{\delta_2 p}{\delta_2 \xi_m} \quad (2.6.35)$$

式(2.6.34)中のカッコ内、-R2はレギュラ格子系(Regular grid layout)における2次精度差分スキームであることを示している。式(2.6.35)から、運動エネルギーの輸送方程式中の圧力項の保存特性は、

$$u_i(\text{Pres.} - \text{R2})_i = \frac{\delta_1 p \tilde{U}_m^{1\bar{2}}}{\delta_1 x_i} - p(\text{Cont.} - \text{R2}) \quad (2.6.36)$$

となり、(2.6.36)式は、(2.6.19)式を適切に近似し、連続の式(2.5.34)が満足される時保存形となる。スタガード格子系の場合と同様に、圧力と連続の式のカップリングアルゴリズムとしてフラクショナルステップ法を考える。

$$u_i^* = u_i^{n-1} - J\Delta t \left[ (\text{Conv.} - \text{R2})_i + (\text{Visc.} - \text{R2})_i \right] \quad (2.6.37)$$

$$(\text{Cont.} - \text{R2})^n = 0 \quad (2.6.38)$$

$$u_i^n = u_i^* - J\Delta t (\text{Pres.} - \text{R2})_i^n \quad (2.6.39)$$

式(2.6.39)を式(2.6.38)に代入すると、次式で表されるレギュラ格子系における2次精度圧力方程式が得られる。

$$\frac{\delta_2}{\delta_2 \xi_m} \left( G^{mm} \frac{\delta_2 p}{\delta_2 \xi_m} \right) = \frac{1}{\Delta t} (\text{Cont.} - \text{R2})^* \quad (2.6.40)$$

対流項差分スキームは次のように拡張される。

$$(\text{Div.} - \text{R2})_i = \frac{\delta_1 \overline{U}_m^{1\bar{2}} \tilde{u}_i^{1\bar{2}}}{\delta_1 \xi_m} \quad (2.6.41)$$

$$(\text{Adv.} - \text{R2})_i = \frac{\overline{U}_m^{1\bar{2}} \delta_1 u_i^{1\bar{2}}}{\delta_1 \xi_m} \quad (2.6.42)$$

$$(\text{Skew.} - \text{R2})_i = \frac{1}{2} (\text{Div.} - \text{R2})_i + \frac{1}{2} (\text{Adv.} - \text{R2})_i \quad (2.6.43)$$

これらの対流項スキームは、離散的に次式を満足する。

$$(\text{Adv.} - \text{R2})_i = (\text{Div.} - \text{R2})_i - u_i (\text{Cont.} - \text{R2}) \quad (2.6.44)$$

$$u_i (\text{Div.} - \text{R2})_i = u_i (\text{Skew.} - \text{R2})_i + \frac{u_i u_i}{2} (\text{Cont.} - \text{R2}) \quad (2.6.45)$$

$$u_i (\text{Adv.} - \text{R2})_i = u_i (\text{Skew.} - \text{R2})_i + \frac{u_i u_i}{2} (\text{Cont.} - \text{R2}) \quad (2.6.46)$$

$$u_i (\text{Skew.} - \text{R2})_i = \frac{\delta_1}{\delta_1 \xi_m} \left( \frac{\overline{U}_m^{1\bar{2}} u_i u_i}{2} \right) \quad (2.6.47)$$

式(2.6.44)は式(2.3.9)を、式(2.6.45)～(2.6.47)は式(2.3.13)～(2.3.15)を適切に近似している。

従って、これらの対流項スキームは、運動量、速度の2乗量および運動エネルギーの保存特性に関して適切な離散式となっている。

拡散項差分スキームは、Navier-Stokes方程式中においてのみ保存形であればよいので、次式で定義する。

$$(\text{Visc. - R2})_i = - \frac{\delta_2}{\delta_2 \xi_m} \left( v G^{mm} \frac{\delta_2 u_i}{\delta_2 \xi_m} \right) \quad (2.6.48)$$

4次精度も同様に拡張できる。結果のみを示すと、以下のようになる。

### ●フラクショナルステップ法に基づく計算アルゴリズム

$$u_i^* = u_i^{n-1} - J \Delta t \left[ (\text{Conv. - R4})_i + (\text{Visc. - R4})_i \right] \quad (2.6.49)$$

$$(\text{Cont. - R4})^n = 0 \quad (2.6.50)$$

$$u_i^n = u_i^* - J \Delta t (\text{Pres. - R4})_i^n \quad (2.6.51)$$

### ●連続の式の離散化式

$$(\text{Cont. - R4}) = \frac{4}{3} \frac{\delta_2 U_m}{\delta_2 \xi_m} - \frac{1}{3} \frac{\delta_4 U_m}{\delta_4 \xi_m} = 0 \quad (2.6.52)$$

### ●Navier-Stokes 方程式の各項の離散化式

圧力項

$$(\text{Pres. - R4})_i = \frac{4}{3} \frac{\delta_2}{\delta_2 \xi_m} \left( \frac{1}{J} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} p \right) - \frac{1}{3} \frac{\delta_4}{\delta_4 \xi_m} \left( \frac{1}{J} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} p \right) \quad (2.6.53)$$

対流項

$$(\text{Div. - R4})_i = \frac{4}{3} \frac{\delta_1 \overline{U_m^{1\xi_m} u_i^{1\xi_m}}}{\delta_1 \xi_m} - \frac{1}{3} \frac{\delta_2 \overline{U_m^{2\xi_m} u_i^{2\xi_m}}}{\delta_2 \xi_m} \quad (2.6.54)$$

$$(\text{Adv. - R4})_i = \frac{4}{3} \frac{\overline{U_m^{1\xi_m} \delta_1 u_i^{1\xi_m}}}{\delta_1 \xi_m} - \frac{1}{3} \frac{\overline{U_m^{2\xi_m} \delta_2 u_i^{2\xi_m}}}{\delta_2 \xi_m} \quad (2.6.55)$$

$$(\text{Skew. - R4})_i = \frac{1}{2} (\text{Div. - R4})_i + \frac{1}{2} (\text{Adv. - R4})_i \quad (2.6.56)$$

粘性項

$$(\text{Visc. - R4})_i = - \frac{4}{3} \frac{\delta_2}{\delta_2 \xi_m} \left[ G^{mm} \left( \frac{4}{3} \frac{\delta_2 u_i}{\delta_2 \xi_m} - \frac{1}{3} \frac{\delta_4 u_i}{\delta_4 \xi_m} \right) \right] + \frac{1}{3} \frac{\delta_4}{\delta_4 \xi_m} \left[ G^{mm} \left( \frac{4}{3} \frac{\delta_2 u_i}{\delta_2 \xi_m} - \frac{1}{3} \frac{\delta_4 u_i}{\delta_4 \xi_m} \right) \right] \quad (2.6.57)$$

## ●圧力方程式

$$\frac{4}{3} \frac{\delta_2}{\delta_2 \xi_m} \left[ G^{mn} \left( \frac{4}{3} \frac{\delta_2 p}{\delta_2 \xi_n} - \frac{1}{3} \frac{\delta_2 p}{\delta_4 \xi_n} \right) \right] - \frac{1}{3} \frac{\delta_4}{\delta_4 \xi_m} \left[ G^{mn} \left( \frac{4}{3} \frac{\delta_2 p}{\delta_2 \xi_n} - \frac{1}{3} \frac{\delta_2 p}{\delta_4 \xi_n} \right) \right] = \frac{1}{\Delta t} (\text{Cont.} - R4)^* \quad (2.6.58)$$

式(2.6.49)~(2.6.58)で構成されたレギュラ格子系における4次精度一般座標系差分スキームは、以下のような離散の関係式を満足する。

## ●運動エネルギーの輸送方程式中の圧力項

$$u_i (\text{Pres.} - R4)_i = \frac{4}{3} \frac{\delta_1 p}{\delta_1 \xi_m} \frac{\tilde{U}_m^{1E}}{2} - \frac{1}{3} \frac{\delta_2 p}{\delta_2 \xi_m} \frac{\tilde{U}_m^{2E}}{2} - p (\text{Cont.} - R4) \quad (2.6.59)$$

## ●Navier-Stokes 方程式中の対流項の勾配型と発散型との間の関係式

$$(\text{Adv.} - R4)_i = (\text{Div.} - R4)_i - u_i (\text{Cont.} - R4) \quad (2.6.60)$$

## ●速度二乗量の輸送方程式中の対流項の各型(運動エネルギーの輸送方程式も同様)

$$u_i (\text{Div.} - R4)_i = \frac{4}{3} \frac{\delta_1}{\delta_1 \xi_m} \left( \frac{\tilde{U}_m^{1E} u_i u_i}{2} \right) - \frac{1}{3} \frac{\delta_2}{\delta_2 \xi_m} \left( \frac{\tilde{U}_m^{2E} u_i u_i}{2} \right) - \frac{u_i u_i}{2} (\text{Cont.} - R4) \quad (2.6.61)$$

$$u_i (\text{Adv.} - R4)_i = \frac{4}{3} \frac{\delta_1}{\delta_1 \xi_m} \left( \frac{\tilde{U}_m^{1E} u_i u_i}{2} \right) - \frac{1}{3} \frac{\delta_2}{\delta_2 \xi_m} \left( \frac{\tilde{U}_m^{2E} u_i u_i}{2} \right)$$

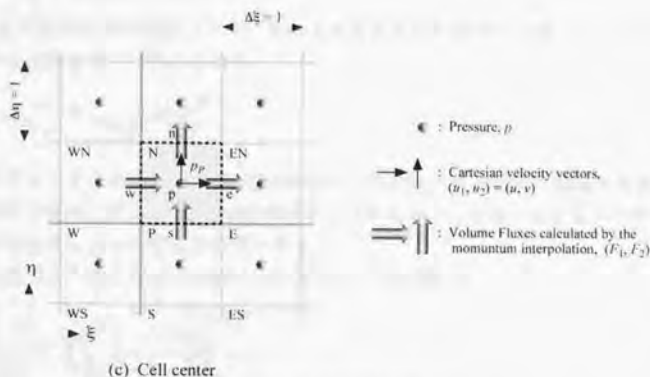


FIGURE 2.6.5 Colocated grid layout.

$$-\frac{u_1 \bar{u}_1}{2} (\text{Cont.} - R4) \quad (2.6.62)$$

$$u_1 (\text{Skew.} - R4)_1 = \frac{4}{3} \frac{\delta_1}{\delta_1 \xi_m} \left( \overline{U_m^{1\xi_m} u_1 \bar{u}_1} \right) - \frac{1}{3} \frac{\delta_2}{\delta_2 \xi_m} \left( \overline{U_m^{2\xi_m} u_1 \bar{u}_1} \right) \quad (2.6.63)$$

従って、レギュラ格子系における4次精度一般座標系差分スキームは、2時精度の場合と同様に、運動量、速度二乗量および運動エネルギー保存特性が適切である。

### 2.6.3 コロケート格子系における一般座標系差分スキーム

コロケート格子系(Rhie and Chow 1983; Peric 1988)は、図2.6.5に示されるように、直交速度成分 $u_i$ と圧力 $p$ がセル中心に、特別な補間(運動量補間, Momentum interpolation)により計算される体積フラックス $F_m$ がセル界面中心に定義される。連続の式と圧力項の2次精度の離散化は、次のようになる。

$$(\text{Cont.} - C2) = \frac{\delta_1 F_m}{\delta_1 \xi_m} = 0 \quad (2.6.64)$$

上式のカッコ内、-C2はコロケート格子系(Colocated grid layout)における2次精度差分近似であることを示している。Navier-Stokes方程式中の圧力項は、レギュラ格子系で定義された(Pres.-R2)<sub>i</sub>を用いる(森西 1996b)。圧力と連続の式のカップリングアルゴリズムとして、フラクショナルステップ法を考える。

$$u_i^* = u_i^{n-1} - J \Delta t \left[ (\text{Conv.} - C2)_i + (\text{Visc.} - C2)_i \right] \quad (2.6.65)$$

$$(\text{Cont.} - C2)^n = 0 \quad (2.6.66)$$

$$u_j^n = u_j^* - J \Delta t (\text{Pres.} - R2)_j^n \quad (2.6.67)$$

ここで、直交速度成分が定義されていないセル界面中心における体積フラックス $F_m$ は、次式で表される補間を用いて計算される。

$$F_m^n = \overline{U_m^{1\xi_m}} - \Delta t G^{mn} \frac{\delta_1 p^n}{\delta_1 \xi_n} \quad (2.6.68)$$

この体積フラックス $F_m^n$ は、セル中心の体積フラックスをセル界面に補間するとき、速度の離散化式を構成し直して、圧力の差分ステンシルを小さくすることによって圧力とのカップリングを改善したものとして解釈できる。

圧力方程式は、式(2.5.68)を式(2.5.67)に代入して得られる。

$$\frac{\delta_1}{\delta_1 \xi_m} \left( G^{mn} \frac{\delta_1 p^n}{\delta_1 \xi_n} \right) = \frac{1}{\Delta t} \frac{\delta_1 \overline{U_m^{1\xi_m}}}{\delta_1 \xi_m} \quad (2.6.69)$$



コロケート格子系における2次精度の対流項差分スキームは、以下のように構成される。

$$\left(\text{Div.} - \text{C2}\right)_i = \frac{\delta_1 F_m^{-1} u_i}{\delta_1 \xi_m} \quad (2.6.70)$$

$$\left(\text{Adv.} - \text{C2}\right)_i = F_m \frac{\overline{\delta_1 u_i}}{\delta_1 \xi_m} \quad (2.6.71)$$

$$\left(\text{Skew.} - \text{C2}\right)_i = \frac{1}{2} \left(\text{Div.} - \text{C2}\right)_i + \frac{1}{2} \left(\text{Adv.} - \text{C2}\right)_i \quad (2.6.72)$$

これらの対流項スキームは、厳密に次のような離散関係を満足する。

$$\left(\text{Adv.} - \text{C2}\right)_i = \left(\text{Div.} - \text{C2}\right)_i - u_i \left(\text{Cont.} - \text{C2}\right) \quad (2.6.73)$$

$$u_i \left(\text{Div.} - \text{C2}\right)_i = \frac{\delta_1}{\delta_1 \xi_m} \left( F_m \frac{\tilde{u}_i u_i}{2} \right) + \frac{u_i u_i}{2} \left(\text{Cont.} - \text{C2}\right) \quad (2.6.74)$$

$$u_i \left(\text{Adv.} - \text{C2}\right)_i = \frac{\delta_1}{\delta_1 \xi_m} \left( F_m \frac{\tilde{u}_i u_i}{2} \right) - \frac{u_i u_i}{2} \left(\text{Cont.} - \text{C2}\right) \quad (2.6.75)$$

$$u_i \left(\text{Skew.} - \text{C2}\right)_i = \frac{\delta_1}{\delta_1 \xi_m} \left( F_m \frac{\tilde{u}_i u_i}{2} \right) \quad (2.6.76)$$

式(2.6.70)は式(2.3.9)を、式(2.6.71)～(2.6.73)は式(2.3.13)～(2.3.15)を適切に近似している。従って、これらの対流項差分スキームは、運動量、速度二乗量および運動エネルギー $K$ の保存特性に関して適切な離散式となっている。

拡散項差分スキームは、Navier-Stokes方程式中でのみ保存形であればいいので、次式で定義する。

$$\left(\text{Visc.} - \text{C2}\right)_i = - \frac{\delta_1}{\delta_1 \xi_m} \left( \nu G^{mn} \frac{\delta_1 u_i}{\delta_1 \xi_n} \right) \quad (2.6.77)$$

以上で構成したコロケート格子系における差分スキームにおいて、圧力項の運動エネルギーの保存特性には注意を要する。圧力項は、レギュラ格子系における離散化式と同じ式を使用するので、式(2.6.34)で表される(Cont.-R2)が満たされなければ、圧力項スキームの運動エネルギーの保存特性が適切でないことがわかる。式(2.6.64), (2.6.66), (2.6.68)から、時間ステップ $k$ における(Cont.-R2)は、テイラー展開を用いて次のように評価できる。

$$\frac{\delta_2 U_m^n}{\delta_2 \xi_m} = \Delta t \left[ \frac{\delta_1}{\delta_1 \xi_m} \left( G^{mn} \frac{\delta_1 P^{n*}}{\delta_1 \xi_n} - \overline{G^{mn} \frac{\delta_2 P^n}{\delta_2 \xi_n}} \right) \right]$$

$$\begin{aligned}
 &= \Delta t \left| -\frac{1}{8} \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left( G^{mn} \frac{\partial^3 p^{ns}}{\partial \xi_n^3} \right) h_n^2 - \frac{1}{8} \frac{\partial^3}{\partial \xi_m^3} \left( G^{mn} \frac{\partial p^{ns}}{\partial \xi_n} \right) h_m^2 + O(h^4) \right| \\
 &= O(\Delta t \cdot h^2) \quad (2.6.78)
 \end{aligned}$$

従って、コロケート格子系における運動エネルギー $K$ の輸送方程式中の圧力項の保存特性には、時間1次精度かつ空間2次精度の誤差が含まれる。梶島ら(1997)は、空間4次精度化によって圧力項の運動エネルギーの保存特性の誤差を抑制し、一様等方性乱流および平行平板間内乱流のDNS計算から、この誤差の影響が致命的ではないと報告している。しかし、時間間隔が大きく計算格子の解像度が比較的粗い場合、この誤差が解に影響を及ぼす事が懸念される。

ここで構成された一般座標系におけるコロケート格子系差分スキームは、Zang(1984) *et al.* による差分スキームと一致する。

#### 2.6.4 修正コロケート格子系差分スキームの一般座標系への拡張

2.6.3において構成されたコロケート格子系における差分スキームでは、運動エネルギー $K$ の輸送方程式中の圧力項の保存特性に時間1次精度かつ空間精度の誤差が含まれていた。この影響を小さくするために、森西(1998a)は、Van Kan修正(Van Kan, 1993)を導入して、コロケート格子系差分スキームの圧力項の運動エネルギーの保存特性を改善した修正コロケート格子系差分スキームを提案した。当初、この修正コロケート格子系差分スキームは、一般座標系に拡張できないと考えられていたが、調査の結果、座標変換を導入することにより一般座標系に拡張できることがわかった。修正コロケート格子系差分スキームを一般座標系に拡張すると、SMAC法に類似した以下のような計算アルゴリズムが構成される。

$$u_i^n = u_i^{n-1} - J\Delta t \left[ (\text{Conv.} - \text{MC2})_i + (\text{Pres.} - \text{R2})_i + (\text{Visc.} - \text{MC2})_i \right] \quad (2.6.79)$$

$$\frac{\delta_i}{\delta_1 \xi_m} \left( G^{mn} \frac{\delta_1 \Delta p^{ns}}{\delta_1 \xi_n} \right) = \frac{1}{\Delta t} \frac{\delta_1 \overline{U_m^{*1} \xi_m}}{\delta_1 \xi_m} \quad (2.6.80)$$

$$u_i^n = u_i^* - J\Delta t \frac{\delta_2}{\delta_2 \xi_m} \left( \frac{1}{J} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} \Delta p^n \right) \quad (2.6.81)$$

$$F_m^n = \overline{U_m^{*1} \xi_m} - \Delta t G^{mn} \frac{\delta_1 \Delta p^{ns}}{\delta_1 \xi_n} \quad (2.6.82)$$

$$p^n = p^{n-1} + \Delta p \quad (2.6.83)$$

ここで、式(2.6.79)中の-MC2は修正コロケート格子系(Modified Collocated grid layout)における2次精度差分スキームであることを示している。コロケート格子系における圧力項の保

存特性の誤差は、レギュラ格子系における連続の式(Cont.-R2)が精度良く満足されないことに起因していた。しかし、ここで構成された一般座標系における修正コロケート格子系差分スキームでは、レギュラ格子系における連続の式が、以下の精度で満足される。

$$\begin{aligned} \frac{\delta_2 U_m^n}{\delta_2 \xi_m} &= \Delta t \left| \frac{\delta_1}{\delta_1 \xi_m} \left( G^{mn} \frac{\delta_1 \Delta p^{n\theta}}{\delta_1 \xi_n} - \overline{G^{mn} \frac{\delta_2 \Delta p^{n\theta}}{\delta_2 \xi_n}} \right) \right| \\ &= \Delta t \left| -\frac{1}{8} \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left( G^{mn} \frac{\partial^3 \Delta p^{n\theta}}{\partial \xi_n^3} \right) h_n^2 - \frac{1}{8} \frac{\partial^3}{\partial \xi_m^3} \left( G^{mn} \frac{\partial \Delta p^{n\theta}}{\partial \xi_n} \right) h_m^2 + O(h^4) \right| \\ &= O(\Delta t^2 \cdot h^2) \end{aligned} \quad (2.6.84)$$

従って、等間隔直交座標系において定式化された森西(1998a)の修正コロケート格子系差分スキームと同様に、運動エネルギー $K$ の輸送方程式中の圧力項の保存特性が時間2次精度かつ空間2次精度となり改善される。

2.6.3において構成された通常のコロケート格子系における対流項差分スキーム(Conv.-C2)、および粘性項差分スキーム(Visc.-M2)は、運動量、速度二乗量および運動エネルギーの保存特性に関して問題がなかった。従って、修正コロケート格子系においても、対流項差分スキーム(Conv.-MC2)および粘性項差分スキーム(Visc.-MC2)は、コロケート格子系と同じものを使用する。

$$(\text{Div. - MC2})_i = \frac{\delta_1 F_m U_i}{\delta_1 \xi_m} \quad (2.6.85)$$

$$(\text{Adv. - MC2})_i = F_m \frac{\delta_1 U_i}{\delta_1 \xi_m} \quad (2.6.86)$$

$$(\text{Skew. - MC2})_i = \frac{1}{2} (\text{Div. - MC2})_i + \frac{1}{2} (\text{Adv. - MC2})_i \quad (2.6.87)$$

$$(\text{Visc. - MC2})_i = -\frac{\delta_1}{\delta_1 \xi_m} \left( \nu G^{mn} \frac{\delta_1 U_i}{\delta_1 \xi_n} \right) \quad (2.6.88)$$

修正コロケート格子系差分スキームの空間4次精度化は、直感的な方法では、運動エネルギー保存特性がVan Kan修正によって改善されない。森西(1996b)は、レギュラ格子系における差分スキームと同様な補間および差分を用いてVan Kan修正を導入する空間4次精度修正コロケート格子系差分スキームを提案した。この空間4次精度修正コロケート格子系差分スキームも、2次精度と同様に一般座標系に拡張可能である。

SMAC法に類似した以下のような計算アルゴリズムが構成される。

$$u_i^* = u_i^{n-1} - J\Delta t \left[ (\text{Conv.} - \text{MC4})_i + (\text{Pres.} - \text{R4})_i + (\text{Visc.} - \text{MC4})_i \right] \quad (2.6.89)$$

$$(\text{Cont.} - \text{MC4})^n = 0 \quad (2.6.90)$$

$$u_i^n = u_i^* - J\Delta t \left[ \frac{4}{3} \frac{\delta_2}{\delta_2 \xi_m} \left( \frac{1}{J} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} \Delta p^n \right) - \frac{1}{3} \frac{\delta_4}{\delta_4 \xi_m} \left( \frac{1}{J} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} \Delta p^n \right) \right] \quad (2.6.91)$$

$${}^1F_m^n = \overline{U_m^{*2} \xi_m} - \Delta t G^{mn} \frac{\delta_1 \Delta p^n}{\delta_1 \xi_n} \quad (2.6.92)$$

$$p^n = p^{n-1} + \Delta p \quad (2.6.93)$$

ここで、式(2.6.89)中の-MC4は修正コロケート格子系(Modified Colocated grid system)における4次精度差分スキームであることを示している。図2.6.6に4次精度修正コロケート格子系差分スキームにおける直交速度成分、体積フラックスおよび圧力の定義位置を示す。4次精度の修正コロケート格子系差分スキームにおいては、新たにセル中心で定義される体積フラックス ${}^2F_m^n$ が導入されている。連続の式の離散化は次のように定義される。

$$(\text{Cont.} - \text{MC4}) \equiv \frac{4}{3} \frac{\delta_1}{\delta_1 \xi_m} {}^1F_m^n - \frac{1}{3} \frac{\delta_2}{\delta_2 \xi_m} {}^2F_m^n = 0 \quad (2.6.94)$$

式(2.6.92)を式(2.6.90)に代入して、以下のような圧力方程式が得られる。

$$\frac{4}{3} \frac{\delta_1}{\delta_1 \xi_m} \left[ G^{mn} \frac{\delta_1 \Delta p^n}{\delta_1 \xi_n} \right] - \frac{1}{3} \frac{\delta_2}{\delta_2 \xi_m} \left[ G^{mn} \frac{\delta_2 \Delta p^n}{\delta_2 \xi_n} \right] = \frac{1}{\Delta t} \left[ \frac{4}{3} \frac{\delta_1 \overline{U_m^{*2} \xi_m}}{\delta_1 \xi_m} - \frac{1}{3} \frac{\delta_2 \overline{U_m^{*2} \xi_m}}{\delta_2 \xi_m} \right] \quad (2.6.95)$$

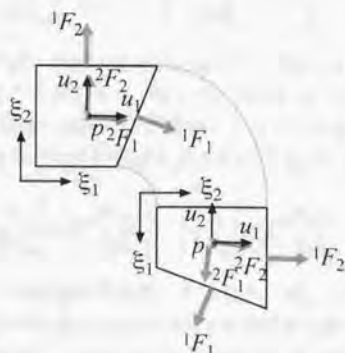


FIGURE 2.6.6 Colocated grid layout for the fourth-order accurate modified finite difference scheme.

式(2.6.89)中の対流項差分スキーム (Conv-MC4)<sub>i</sub> は、以下のように拡張される、

$$(\text{Div. - MC4})_i = \frac{4}{3} \frac{\delta_1}{\delta_1 \xi_m} \frac{{}^1 F_m \bar{u}_i}{\delta_1 \xi_m} - \frac{1}{3} \frac{\delta_2}{\delta_2 \xi_m} \frac{{}^2 F_m \bar{u}_i}{\delta_2 \xi_m} \quad (2.6.96)$$

$$(\text{Adv. - MC4})_i = \frac{4}{3} \frac{{}^1 F_m \delta_1 u_i}{\delta_1 \xi_m} - \frac{1}{3} \frac{{}^2 F_m \delta_2 u_i}{\delta_2 \xi_m} \quad (2.6.97)$$

$$(\text{Skew. - MC4})_i = \frac{1}{2} (\text{Div. - MC4})_i + \frac{1}{2} (\text{Adv. - MC4})_i \quad (2.6.98)$$

これらの対流項差分スキームは、離散的に次式を満足する、

$$(\text{Adv. - MC4})_i = (\text{Div. - MC4})_i - u_i (\text{Cont. - MC4}) \quad (2.6.99)$$

$$\begin{aligned} u_i (\text{Div. - MC4})_i &= \frac{4}{3} \frac{\delta_1}{\delta_1 \xi_m} \left( {}^1 F_m \frac{\bar{u}_i u_i}{2} \right) - \frac{4}{3} \frac{\delta_2}{\delta_2 \xi_m} \left( {}^2 F_m \frac{\bar{u}_i u_i}{2} \right) \\ &\quad + \frac{u_i u_i}{2} (\text{Cont. - MC4}) \end{aligned} \quad (2.6.100)$$

$$\begin{aligned} u_i (\text{Adv. - MC4})_i &= \frac{4}{3} \frac{\delta_1}{\delta_1 \xi_m} \left( {}^1 F_m \frac{\bar{u}_i u_i}{2} \right) - \frac{4}{3} \frac{\delta_2}{\delta_2 \xi_m} \left( {}^2 F_m \frac{\bar{u}_i u_i}{2} \right) \\ &\quad - \frac{u_i u_i}{2} (\text{Cont. - MC4}) \end{aligned} \quad (2.6.101)$$

$$u_i (\text{Skew. - MC4})_i = \frac{4}{3} \frac{\delta_1}{\delta_1 \xi_m} \left( {}^1 F_m \frac{\bar{u}_i u_i}{2} \right) - \frac{4}{3} \frac{\delta_2}{\delta_2 \xi_m} \left( {}^2 F_m \frac{\bar{u}_i u_i}{2} \right) \quad (2.6.102)$$

式(2.6.99)は式(2.3.9)に、式(2.6.100)~(2.6.102)は式(2.3.13)~(2.3.15)に対応し、解析的保存特性を適切に近似していることがわかる。従って、式(2.6.96)~(2.6.98)で構成される対流項差分スキームは、運動量、速度二乗量および運動エネルギーを適切に保存する離散化式である。粘性項に関しては、圧力方程式の離散化式(2.6.95)の左辺に類似した形式で定義する、

$$(\text{Visc. - MC4})_i = -\frac{4}{3} \frac{\delta_1}{\delta_1 \xi_m} \left( \nu G^{mn} \frac{\delta_1 u_i}{\delta_1 \xi_n} \right) + \frac{1}{3} \frac{\delta_2}{\delta_2 \xi_m} \left( \nu G^{mn} \frac{\delta_2 u_i}{\delta_2 \xi_n} \right) \quad (2.6.103)$$

圧力項の運動エネルギー保存特性が適切になるためには、2次精度の場合と同様に、レギュラ格子系における連続の式(Cont.-R4)が満たされなければならない。式(2.6.90)~(2.6.92)および式(2.6.94)から、時間ステップ*k*における(Cont.-R4)は、テイラー展開から次のように評価できる、

$$\begin{aligned}
\frac{4\delta_2 U_m^k}{3\delta_2 \xi_m} - \frac{1\delta_4 U_m^k}{3\delta_4 \xi_m} &= \Delta t \left\{ \frac{4}{3} \frac{\delta_1}{\delta_1 \xi_m} \left( G^{mn} \frac{\delta_1 \Delta p^{n\#}}{\delta_1 \xi_n} - G^{mn} \left( \frac{4\delta_2 \Delta p^{n\#}}{3\delta_2 \xi_n} - \frac{1\delta_4 \Delta p^{n\#}}{3\delta_4 \xi_n} \right) \right)^{1\xi_m} \right\} \\
&\quad - \frac{1}{3} \frac{\delta_2}{\delta_2 \xi_m} \left\{ G^{mn} \frac{\delta_2 \Delta p^{n\#}}{\delta_2 \xi_n} - G^{mn} \left( \frac{4\delta_2 \Delta p^{n\#}}{3\delta_2 \xi_n} - \frac{1\delta_4 \Delta p^{n\#}}{3\delta_4 \xi_n} \right) \right\}^{2\xi_m} \Bigg\} \\
&= \Delta t \left[ \frac{1}{32} \frac{\partial^5}{\partial \xi_m^5} \left( G^{mn} \frac{\partial \Delta p^n}{\partial \xi_n} \right) h_m^4 + \frac{1}{32} \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left( G^{mn} \frac{\partial^3 \Delta p^n}{\partial \xi_n^3} \right) h_n^4 \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{144} \frac{\partial^3}{\partial \xi_m^3} \left( G^{mn} \frac{\partial^3 \Delta p^n}{\partial \xi_n^3} \right) h_m^2 h_n^2 + O(h^6) \right] \\
&= O(\Delta t^2 \cdot h^4) \tag{2.5.104}
\end{aligned}$$

従って、運動エネルギー $K$ の輸送方程式中の圧力項の保存特性の誤差は、時間2次精度かつ空間4次精度となる。

圧力方程式を解く際に必要とされるメモリ容量を見積もっておくことは、実際にプログラミングする際に重要である。圧力方程式は、次のような代数方程式に変形した後、ガウス・ザイデル法、SOR法、CG法、マルチグリッド法といった解法によって解かれる。

$$A_p p_p = A_e p_e + A_w p_w + A_n p_n + A_s p_s + \dots \tag{2.6.105}$$

ここで、修正コロケート格子系の場合、 $p$ は $\Delta p$ に置き換える。実際の数値計算において、係数 $A_p, A_e, A_w$ 等は、計算の高速化のために変数として記憶されるのが普通である。2.6.1において構成されたスタガード格子系における2次精度および4次精度圧力方程式(式(2.6.8)および(2.6.28))を3次元( $n=3$ )で離散化する場合、圧力方程式離散化式中の係数の数は、次のように見積もられる。

2次精度： $3^n - 8 = 19$ 個

4次精度： $5^n + 2n - 8 = 123$ 個

ただし、圧力方程式中の明示されない補間#は、4次精度の場合でも2次精度の補間を使用

している。このように、4次精度のスタガード格子系差分スキームは、2次精度の場合と比較して、メモリ使用量が飛躍的に増加するとともに、離散化が非常に煩雑になって実用的でない。一方、(修正)コロケート格子系差分スキームの場合、同様に係数の数を見積もると以下のようになる。

$$2 \text{ 次精度: } 3^n - 8 = 19 \text{ 個}$$

$$4 \text{ 次精度: } 3^n + 2n - 8 = 25 \text{ 個}$$

従って、(修正)コロケート格子系差分スキームの場合、4次精度化に伴うメモリ使用量の増加は、スタガード格子系と比較すると僅かであり、離散化も比較的容易であり実用上有利である。

## 2.7 本章のまとめ

本章では、DNSやLESといった高精度な非圧縮性乱流計算に適した一般座標系差分スキームを構成するため、差分スキームの保存特性に着目した。まず、座標変換を施した非圧縮性粘性流れの基礎方程式系(連続の式、Navier-Stokes方程式、速度二乗量および運動エネルギーの輸送方程式)の解析的保存特性が、座標変換前の基礎方程式系と全く同じになることを示し、その結果、等間隔正規直交座標系において基礎方程式の解析的保存特性を適切に近似する差分スキームが、比較的簡単に一般座標系へ拡張できることを示した。本章では、Maliskaのスタガード格子系、レギュラー格子系およびコロケート格子系における一般座標系差分スキームを構成した。ここで、これらの一般座標系差分スキームは、以下のような特徴を持つ。

1. 本章で構成された一般座標系差分スキームの中で、形式上、保存特性が適切であるのは、Maliskaのスタガード格子系差分スキームおよびレギュラー格子系差分スキームである。
2. 従来のコロケート格子系差分スキームは、圧力項の運動エネルギー保存特性に時間間隔 $\Delta t$ に比例した誤差が含まれている(森西 1996)。これに対して、森西(1998a-b)により提案された修正コロケート格子系差分スキームが一般座標系に拡張できることを示し、その結果、構成された一般座標系における修正コロケート格子系差分スキームの圧力項の運動エネルギー保存特性は時間2次精度に改善されている。
3. 基礎方程式の解析的保存特性を適切に近似する差分スキームを一般座標系に拡張する際、明示されない補間を導入したことや圧力項の差分スキームにおいて保存形式と非保存形式を離散的にも等しいと仮定したことなどから、差分スキームの保存特性に関する厳密性が失われている。この影響については第4章において検証される。

## 第3章

# 数値計算方法

本章では、本研究で取り扱われる基礎方程式、計算アルゴリズム、空間離散化手法、時間進行法、圧力方程式解法、計算安定化のためのフィルタリング等、使用される非圧縮性乱流の数値計算方法の概要について説明する。

### 3.1 基礎方程式

非圧縮性粘性流れを規定する基礎方程式は、連続の式およびNavier-Stokes方程式である。

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3.1.1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_j}(u_j u_i) - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{p}{\rho}\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) \quad (3.1.2)$$

ここでは、不等間隔非直交の任意の一般座標系の計算格子を使用を想定しているので、第2章で導出された座標変換を施した連続の式とNavier-Stokes方程式が取り扱われる。

$$\frac{\partial U_m}{\partial \xi_m} = 0 \quad (3.1.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{u_i}{J}\right) = -\frac{\partial}{\partial \xi_m}(U_m u_i) - \frac{\partial}{\partial \xi_m}\left(\frac{1}{J} \frac{\partial \xi_m p}{\partial x_i}\right) + \frac{\partial}{\partial \xi_m}\left(\nu G^{mn} \frac{\partial u_i}{\partial \xi_n}\right) \quad (3.1.4)$$

ここで、 $U_m$ は反変速度成分であり、ヤコビアンおよびメトリックを用いて、直交速度成分から以下の式で変換される。

$$U_m = \frac{1}{J} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} u_j \quad (3.1.5)$$



また、式(3.1.4)において、ことわりのない場合、対流項は、発散型が用いられることとする。実際の数値計算では、代表速度  $U$  および代表長さ  $L$  を用いて、無次元化した式が解かれる。無次元変数を上付添え字\*で表すこととし、無次元変数は以下のように有次元変数と関係づけられる。

$$x_i = Lx_i^*, \quad u_i = Vu_i^*, \quad U_m = VU_m^*, \quad p = \rho V^2 p^*, \quad t = \frac{L}{V} t^*$$

無次元化された基礎方程式は、簡単のため\*を省略して以下のように表される。

$$\frac{\partial U_m}{\partial \xi_m} = 0 \quad (3.1.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{u_i}{J} \right) = - \frac{\partial}{\partial \xi_m} (U_m u_i) - \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left( \frac{1}{J} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} p \right) + \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left( G^{mn} \frac{\partial u_i}{\partial \xi_n} \right) \quad (3.1.7)$$

ここで、 $Re$  は Reynolds 数であり、次式で表される。

$$Re = \frac{VL}{\nu} \quad (3.1.8)$$

### 3.2 計算アルゴリズム

本研究では、計算アルゴリズムとしてフラクショナルステップ法 (Chorin 1969) を用いる。式(3.1.4)において、説明を簡単にするため、時間項を Euler 陽解法で離散化する。

$$\frac{1}{J} \frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\Delta t} = - \frac{\partial}{\partial \xi_m} (U_m u_i) - \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left( \frac{1}{J} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} p \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left( \nu G^{mn} \frac{\partial u_i}{\partial \xi_n} \right) \quad (3.2.1)$$

次に、上式の両辺の発散をとり、新しい時間ステップ  $n$  における速度の発散、

$$\frac{\partial U_m^n}{\partial \xi_m}$$

をゼロとすると、以下のような圧力方程式が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial \xi_m} \left( G^{mn} \frac{\partial p}{\partial \xi_n} \right) = \frac{1}{\Delta t} \frac{\partial U_m^*}{\partial \xi_m} \quad (3.2.2)$$

ここで、 $U_m^*$  は次式で計算される中間速度  $u_i^*$  を使用した体積フラックスである。

$$u_i^* = u_i^{n-1} + J \Delta t \left[ - \frac{\partial}{\partial \xi_m} (U_m u_i) + \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left( \nu G^{mn} \frac{\partial u_i}{\partial \xi_n} \right) \right] \quad (3.2.3)$$

新しい時間ステップ  $n$  における直交速度成分  $u_i^n$  を計算する式は、式(3.2.1)および式(3.2.3)から、次のように得られる。

$$u_i^n = u_i^* - J \Delta t \left[ \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left( \frac{1}{J} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} p \right) \right] \quad (3.2.4)$$

以上、フラクショナルステップ法の基本的なアルゴリズムは、以下のように構成される。

### ● Fractional Step 法のアルゴリズム

ステップ1 : 式(3.2.3)を用いて、前の時間ステップ  $n-1$  の速度から中間速度  $u_i^*$  を計算する。

ステップ2 : 中間速度  $u_i^*$  から式(3.2.2)の右辺を計算し、圧力方程式(3.2.2)を何らかの圧力方程式解法により計算する。

ステップ3 : 式(3.2.4)から、新しい時間ステップ  $n$  の直交速度成分  $u_i^n$  を計算する。

### 3.3 空間離散化

式(3.2.2)、式(3.2.3)および式(3.2.4)の空間項の離散化は、第2章で構成された一般座標系差分スキームが使用される。例えば、コロケート格子系における2次精度の一般座標系差分スキームで離散化した場合、計算アルゴリズムは以下のようなになる(第2章参照)。

$$u_i^* = u_i^{n-1} + J \Delta t \left[ -\frac{\delta_1 F_m u_i}{\delta_1 \xi_m} + \frac{\delta_1}{\delta_1 \xi_m} \left( v G^{mn} \frac{\delta_1 u_i^n}{\delta_1 \xi_n} \right) \right] \quad (3.3.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi_m} \left( G^{mn} \frac{\partial p}{\partial \xi_n} \right) = \frac{1}{\Delta t} \frac{\partial U_m^*}{\partial \xi_m} \quad (3.3.2)$$

$$u_i^n = u_i^* - J \Delta t \frac{\delta_2}{\delta_2 \xi_m} \left( \frac{1}{J} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} p \right) \quad (3.3.3)$$

ここで、 $F_m$  は、セル界面に定義される体積フラックスであり、次式から計算される。

$$F_m^n = U_m^{n-1} - \Delta t G^{mn} \frac{\delta_1 p}{\delta_1 \xi_n} \quad (3.3.4)$$

式(3.3.2)および式(3.3.4)中の上付添え字#は、明示的でない補間が必要な項であることを表している。この明示的でない補間には、断りのない場合、2次精度の補間スキームを用いている。この明示的でない補間の計算精度および保存特性に対する影響は、第4章において検証される。

### 3.4 時間進行法

本研究では、時間進行法として対流項に2次精度 Adams-Bashforth法を、拡散項にCrank-Nicolsonスキームを使用した半陰解法、およびRunge-KuttaスキームとCrank-Nicolsonスキームを組み合わせた低記憶容量3段階部分3次精度半陰解スキーム(Splart 1991)の2つの方法が使用される。

#### 3.4.1 Adams-Bashforth法およびCrank-Nicolsonスキームを用いたフラクショナルステップ法

式(3.3.1)~(3.3.4)において、対流項に2次精度 Adams-Bashforth法を、拡散項にCrank-Nicolsonスキームを使用したフラクショナルステップ法の計算アルゴリズムは、以下のように構成される。

$$u_i^* = u_i^{n-1} + J \Delta t \left[ -\frac{1}{2} \left\{ 3 (\text{Div.} - C2)_i^{n-1} - (\text{Div.} - C2)_i^{n-2} \right\} + \frac{1}{2} \frac{\delta_1}{\delta_1 \xi_m} \left\{ v G^{mn} \frac{\delta_1 (u_i^{n-1*} + u_i^{**})}{\delta_1 \xi_n} \right\} \right] \quad (3.4.1)$$

$$\frac{\delta_1}{\delta_1 \xi_m} \left( G^{mn} \frac{\delta_1 p^n}{\delta_1 \xi_n} \right) = \frac{1}{\Delta t} \frac{\delta_1 U_m}{\delta_1 \xi_m} \quad (3.4.2)$$

$$u_i^n = u_i^* - J \Delta t \left[ \frac{\delta_2}{\delta_2 \xi_m} \left( \frac{1}{J} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} p^n \right) \right] \quad (3.4.3)$$

$$F_m^n = U_m^{n+1/2} - \Delta t G^{mn} \frac{\delta_1 p^n}{\delta_1 \xi_n} \quad (3.4.4)$$

ここで、(3.4.1)式中の  $(\text{Div.} - C2)_i$  は、コロケート格子系における2次精度の対流項の発散型の離散化式を表し、次式で定義される。

$$(\text{Div.} - C2)_i = \frac{\delta_1 F_m u_i}{\delta_1 \xi_m} \quad (3.4.5)$$

#### 3.4.2 低記憶容量3段階部分3次精度半陰解スキーム

Runge-KuttaスキームとCrank-Nicolsonスキームを組み合わせた低記憶容量3段階部分3次精度半陰解スキーム(Splart 1991)を使用したフラクショナルステップ法の計算アルゴリズムは、式(3.3.1)~(3.3.4)から次のように構成される。

$$u_i^* = u_i^{k-1} + J \Delta t \left[ -\gamma_k (\text{Div.} - C2)_i^{k-1} - \zeta_k (\text{Div.} - C2)_i^{k-2} + \frac{\delta_1}{\delta_1 \xi_m} \left\{ v G^{mn} \delta_1 \frac{(\alpha_k u_i^{k-1} + \beta_k u_i^*)}{\delta_1 \xi_n} \right\} \right] \quad (3.4.6)$$

$$\frac{\delta_1}{\delta_1 \xi_m} \left( G^{mn} \frac{\delta_1 p^k}{\delta_1 \xi_n} \right) = \frac{1}{(\alpha_k + \beta_k) \Delta t} \frac{\delta_1 \overline{U_m^{1 \xi_m}}}{\delta_1 \xi_m} \quad (3.4.7)$$

$$u_i^k = u_i^* - J \Delta t (\alpha_k + \beta_k) \left[ \frac{\delta_2}{\delta_2 \xi_m} \left( \frac{1}{J} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} p^k \right) \right] \quad (3.4.8)$$

$$F_m^k = \overline{U_m^{1 \xi_m}} - \Delta t (\alpha_k + \beta_k) G^{mn} \frac{\delta_1 p^k}{\delta_1 \xi_n} \quad (3.4.9)$$

ここで、付添え字  $k$  は、各時間ステップ内での段階数であり、 $k=1 \sim 3$  である。 $k=1$  段において、 $u_i^{k-1} = u_i^{n-1}$ 、また、 $k=3$  段において、 $u_i^k = u_i^n$  である。式(3.4.6)~(3.4.9)中の定数は、以下の通りである。

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 29/96, & \alpha_2 &= -3/40, & \alpha_3 &= 1/6 \\ \beta_1 &= 37/160, & \beta_2 &= 5/24, & \beta_3 &= 1/6 \\ \gamma_1 &= 8/15, & \gamma_2 &= 5/12, & \gamma_3 &= 3/4 \\ \zeta_1 &= 0, & \zeta_2 &= -17/60, & \zeta_3 &= -5/12 \end{aligned}$$

ここで、拡散項をCrank-Nicolsonスキーム法で陰的に取り扱うのは、壁でno-slip条件を課すために壁からの第1格子点までの距離を小さくとした場合、粘性項の安定条件が厳しくなり時間間隔を大きくとれなくなるのを防ぐためである。

以上では、代表的にコロケート格子系における2次精度一般座標系差分スキームの場合の計算アルゴリズムを示したが、その他のスタガード格子系および修正コロケート格子系差分スキームにおける計算アルゴリズムも同様に構成される。また、空間離散化の精度が4次精度は、それぞれの項の離散化式を第2章で構成した4次精度の形式に変更する。

### 3.5 圧力方程式解法

本研究では、圧力方程式の解法として、Bi-CGStab法(安定化双共役勾配法)を用いている。このBi-CGStab法は、van der Vorst (1992)によって提案された連立1次方程式の反復解法であり、今までのCG法システムの解法が持っていた弱点である、残差の非単調減少性、収束の不安定性、解の局所振動等が完全ではないが観測されなくなる(藤野ら1991)。また、実際に非圧縮性流れ解析における圧力方程式に対してBi-CGStab法を適用した結果、効率の面で非常

に優れていることが確認されている(藤野ら 1991)。

Bi-CGStab法は、一般的に、以下のような特徴を持つことが知られている(長谷川ら)。

- ・ 非対称行列に適用可能。
- ・ 1反復あたりの計算コストはBiCG法やCGS法と同程度であるが、転置行列が必要ない。
- ・ CGS法とほぼ同じ収束の速さを保ちつつ、CGS法の不規則な収束パターン避けるCGS法の代替手段である。結果として、しばしば更新された残差ベクトルに小さな精度の損失が観察される。

Bi-CGStab法のアルゴリズムは以下の通りである。

● Bi-CGStab法のアルゴリズム

初期ベクトル  $\mathbf{x}_0$  を与える。

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{b} - A\mathbf{x}_0 \quad (3.5.1)$$

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{r}_0 \quad (3.5.2)$$

$$\mathbf{r}_0^* = \mathbf{r}_0; \quad (3.5.3)$$

ここで、残差ベクトル  $\mathbf{r}_k$  が  $\|\mathbf{r}_k\| \leq \epsilon \|\mathbf{b}\|$  を満たすまで反復する。

$$\alpha_k = \frac{(\mathbf{r}_0^*, \mathbf{r}_k)}{(\mathbf{r}_0^*, A\mathbf{p}_k)} \quad (3.5.4)$$

$$\mathbf{t}_{k+1} = \mathbf{r}_k - \alpha_k A\mathbf{p}_k \quad (3.5.5)$$

$$\omega_k = \frac{(\mathbf{t}_{k-1}, A\mathbf{t}_{k-1})}{(A\mathbf{t}_{k-1}, A\mathbf{t}_{k-1})} \quad (3.5.6)$$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{p}_k + \omega_k \mathbf{t}_{k-1} \quad (3.5.7)$$

$$\beta_k = \frac{\alpha_k (\mathbf{r}_0^*, \mathbf{r}_{k-1})}{\omega_k (\mathbf{r}_0^*, \mathbf{r}_k)} \quad (3.5.8)$$

$$\mathbf{p}_{k+1} = \mathbf{r}_{k+1} + \beta_k (\mathbf{p}_k - \omega_k A\mathbf{p}_k) \quad (3.5.9)$$

Bi-CGStab法に不完全LU分解等の前処理を行えばさらに収束性が向上することが期待できる。本研究では、メモリ使用量の増大およびベクトル化・並列化の問題から今のところ前処理は導入していないが、原理的には不可能ではない。

## 3.6 計算安定化のためのフィルタリング

第2章では、離散化によって生じる見せかけの運動エネルギーの散逸誤差をなるべく小さく抑制し、DNSの場合は分子粘性散逸、そしてLESの場合はSGSモデルによる運動エネルギーの生成・効果が正しく評価されなければならないとの考えから、運動量のみならず速度の二乗量および運動エネルギーの保存特性に関しても適切な一般座標系差分スキームを構成した。しかし、一般座標系の計算に限らず、高レイノルズ数流れの数値計算においては、対流項に中心差分を用いた場合、計算が不安定になることが知られている。従来よく使用されている計算安定化のための対流項差分スキームの風上化は、Appendix Aで示されるとおり、たとえ高精度であっても風上化による人工粘性の効果が物理的考察に基づき定式化されたSGSモデルによる人工粘性の効果よりも大きく、正しいLES計算が行われているかどうかは疑わしい。従って、本研究では、速度場に陽的にフィルターをかけることによりもっとも高波数( $k\Delta x \sim \pi$ )のエネルギーを除去し、流れ場を安定化させる方法(Demuren, private communication)を採用する。

ここで、一般的にフィルターの差分近似式は以下のように構成される(Lele 1992)

$$\begin{aligned} & \beta \hat{f}_{i-2} + \alpha \hat{f}_{i-1} + \hat{f}_i + \alpha \hat{f}_{i+1} + \beta \hat{f}_{i+2} \\ & = a f_i + \frac{b}{2}(f_{i-1} + f_{i+1}) + \frac{c}{2}(f_{i-2} + f_{i+2}) + \frac{d}{2}(f_{i-3} + f_{i+3}) \end{aligned} \quad (3.6.1)$$

上式において、“ $\hat{\cdot}$ ”(トップハット)はフィルターを施された量を表している。また、 $\alpha, \beta, a, b, c, d$ は定数であり、4次精度および6次精度の場合、以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{8}(5 + 6\alpha - 6\beta + 16d), \quad b = \frac{1}{2}(1 + 2\alpha + 2\beta - 2d) \\ c &= -\frac{1}{8}(1 - 2\alpha - 14\beta + 16d) \quad ; \quad \text{the 4th order} \end{aligned} \quad (3.6.2)$$

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{16}(11 + 10\alpha - 10\beta), \quad b = \frac{1}{32}(15 + 34\alpha + 30\beta) \\ c &= \frac{1}{16}(-3 + 6\alpha + 26\beta), \quad d = \frac{1}{32}(1 - 2\alpha + 2\beta) \quad ; \quad \text{the 6th order} \end{aligned} \quad (3.6.3)$$

Fourier解析から、式(4.7.1)のTransfer関数 $T(w)$ は以下のようになる(Lele 1992)。

$$T(w) = \frac{a + b \cos(w) + c \cos(2w) + d \cos(3w)}{1 + 2\alpha \cos(w) + 2\beta \cos(2w)} \quad (3.6.4)$$

2次精度、4次精度および6次精度の陽的フィルタリングスキームのTransfer関数の分布を図3.6.1に示す。2次精度のフィルタリングは、低波数成分もかなりカットしてしまうが、高精度になるほどlow passフィルターとして優れた特性となることがわかる。従って、本研

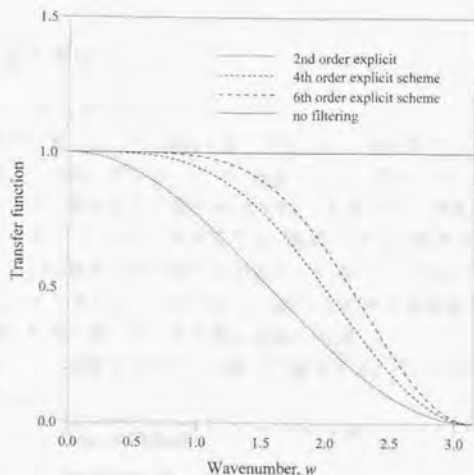


FIGURE 3.6.1 Transfer function versus wave number for different explicit filtering schemes.

究では、非周期的境界付近の3点を除いて、式(3.7.3)において $\alpha=\beta=0$ として得られる6次精度陽的フィルタリングスキームを使用する。

$$\hat{f}_1 = \frac{f_{i-3} + 6f_{i-2} + 15f_{i-1} + 44f_i + 15f_{i+1} - 6f_{i+2} + f_{i+3}}{64} \quad (3.6.5)$$

また、非周期的境界 $i=0$ 付近の3点に対しては、以下のような4次精度陽的フィルタリングスキームを使用する。

$$\hat{f}_1 = \frac{15f_1 + 4f_2 - 6f_3 + 4f_4 - f_5}{16} \quad (3.6.6)$$

$$\hat{f}_2 = \frac{1f_1 + 12f_2 + 6f_3 - 4f_4 + f_5}{16} \quad (3.6.7)$$

$$\hat{f}_3 = \frac{-f_1 + 4f_2 + 10f_3 + 4f_4 - f_5}{16} \quad (3.6.8)$$

これらのフィルタリングは、適当なタイムステップ間隔毎に適用する。本研究では、フィルタリングを適用するタイムステップ間隔は、計算が安定に実行できる範囲でなるべく大きくとれるように経験的に決定する。

## 3.7 乱流統計量の算出

## 3.7.1 LESにおける乱流強度

LESにおいて陽的に解かれるGS速度 $\bar{u}_i$ から求められる乱流強度とDNSで解かれる $u_i$ から求められる乱流強度を直接比較することは、厳密に正しい比較を行ったとは言えず、新しいSGSモデルを開発しその検証を行う場合は、DNSから計算された速度にフィルターをかけて厳密に比較すべきである。しかし、本研究では、SGSモデルの厳密な検証ではなく、主として複雑形状乱流場のLES解析手法の確立を目指しているため、LESにおける乱流強度を近似的に求める方法について考える。このために、LESにおける乱流強度と実験やDNSで得られる乱流強度との間の関係を明らかにする事が重要である。

ある変数 $f$ に対して、空間フィルターを施した量を $\bar{f}$ で、アンサンブルフィルターを施した量 $\langle f \rangle$ と記述する。

$$f = \bar{f} + f' \quad ; \text{ Spatial Filtering} \quad (3.7.1)$$

$$f = \langle f \rangle + f'' \quad ; \text{ Ensemble averaging} \quad (3.7.2)$$

また、坪倉(1996)に従い、空間あるいはアンサンブルフィルター操作に関係する関数として以下のようなものを定義する。

$$\tau(u_p, u_i) \equiv \overline{u_p u_i} - \bar{u}_p \bar{u}_i = \tau_{ij} \quad (3.7.3)$$

$$m(u_p, u_i) \equiv \langle u_p u_i \rangle - \langle u_i \rangle \langle u_p \rangle = \langle u_i'' u_p'' \rangle \quad (3.7.4)$$

ここで、式(3.7.3)中の乱流応力 $\tau(u_p, u_i)$ は、LESにおけるSGS応力 $\tau_{ij}$ に、また、式(3.7.4)中の乱流応力 $m(u_p, u_i)$ は、通常のレイノルズ応力 $\langle u_i'' u_p'' \rangle$ に対応する。これに対し、LESにおけるGSレイノルズ応力は以下で定義される(坪倉, 1996)。

$$m(\bar{u}_p, \bar{u}_i) \equiv \langle \bar{u}_p \bar{u}_i \rangle - \langle \bar{u}_i \rangle \langle \bar{u}_p \rangle = \langle u_i'' u_p'' \rangle \quad (3.7.5)$$

これら、異なるフィルタースケールにおける乱流応力間の関係に対する物理的解説は、坪倉(1996)が詳しい。さらに高次のモーメントも低次のモーメントを用いて簡単に記述できる(坪倉 1996)。

$$\tau(u_p, u_i, u_k) \equiv \overline{u_p u_i u_k} - \bar{u}_p \tau(u_i, u_k) - \bar{u}_i \tau(u_k, u_p) - \bar{u}_k \tau(u_p, u_i) - \bar{u}_p \bar{u}_i \bar{u}_k \quad (3.7.6)$$

$$m(u_p, u_i, u_k) \equiv \langle u_p u_i u_k \rangle - \langle u_i \rangle m(u_p, u_k) - \langle u_j \rangle m(u_k, u_i) - \langle u_k \rangle m(u_p, u_i) - \langle u_i \rangle \langle u_j \rangle \langle u_k \rangle \quad (3.7.7)$$

現実の流れ場あるいはDNSから得られる乱流強度は、以下のように与えられる。

$$\langle u_i' \rangle = \sqrt{\langle u_i u_i \rangle - \langle u_i \rangle \langle u_i \rangle} \quad (3.7.8)$$

ここで、空間フィルター操作とアンサンブル平均操作との間に交換性が成り立つと仮定するとともに、ある物理量にアンサンブル平均を施すと高波数成分の大部分がカットされてしまうことを考えれば、以下のような近似的関係が得られる。

$$\langle u_i \rangle \equiv \langle \bar{u}_i \rangle \equiv \langle \bar{u}_i \rangle \quad (3.7.9)$$



$$\langle u_i u_j \rangle \equiv \overline{\langle u_i u_j \rangle} \equiv \langle \overline{u_i} \overline{u_j} \rangle + \langle \tau_{ij} \rangle \quad (3.7.10)$$

従って、現実の流れ場の乱流応力とGSの乱流応力との間には、次のような関係が近似的に成り立つことがわかる。

$$\langle u_i' u_j' \rangle \equiv \sqrt{\overline{\langle u_i' u_j' \rangle} - \langle \overline{u_i'} \overline{u_j'} \rangle} + \langle \tau_{ij}' \rangle \quad (3.7.11)$$

上式中の右辺において、第1,2項がGS乱流強度、第3項がSGS乱流強度である。

SGSモデルとしてBardinaのmixedモデル(Bardina 1983)を考えると、SGS乱流応力は以下のように与えられる。

$$\tau_{ij} - \frac{\delta_{ij}}{3} \tau_{kk} = -2C\overline{\Delta}^2 |\overline{S}| \overline{S}_{ij} + L_{ij}^m - \frac{\delta_{ij}}{3} L_{kk}^m \quad (3.7.12)$$

ここでは、簡単のため、直交座標系において定式化されたSGSモデルが取り扱われるが、一般座標系におけるSGSモデルに関しては、第5章で論じられる。上式中のCはモデル係数値、 $\Delta$ はフィルター幅、 $L_{ij}^m$ は修正Leonard項(Zang *et al.* 1993)である。また、 $S_{ij}$ はひずみ率テンソルであり、 $S_{ij}$ および $|S_{ij}|$ は、それぞれ次のように定義される。

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) \quad (3.7.13)$$

$$|S_{ij}| = (2 S_{ij} S_{ij})^{1/2} \quad (3.7.14)$$

また、式(3.7.12)中左辺第2項 $\tau_{kk}/3 \cdot \delta_{ij}$ は、両辺の縮約をとったときの恒等関係から必要となる項である。この項は、実際のLES計算では圧力項に組み込まれるので、この項を陽的に求めることは厳密には不可能である。ここでは、Lillyの1st-order theory (Lilly 1967)を導入してこの項を近似的に求める。

まず、SGSモデルをSmagorinskyモデルの部分とScale similarityモデルの部分に分解する。

$$\tau_{ij}^S + \tau_{ij}^M - \frac{\delta_{ij}}{3} (\tau_{kk}^S + \tau_{kk}^M) = -2C\overline{\Delta}^2 |\overline{S}| \overline{S}_{ij} + L_{ij}^m - \frac{\delta_{ij}}{3} L_{kk}^m \quad (3.7.15)$$

$$\tau_{ij}^S - \frac{\delta_{ij}}{3} \tau_{kk}^S = -2C\overline{\Delta}^2 |\overline{S}| \overline{S}_{ij} \quad ; \quad \text{Smagorinsky model part} \quad (3.7.16)$$

$$\tau_{ij}^M = L_{ij}^m \quad ; \quad \text{Scale similarity model part} \quad (3.7.17)$$

ここで、上付右添え字SとMは、それぞれmixedモデル中のSmagorinskyモデルの部分とScale similarityの部分を表している。ここで、 $\tau_{kk}^M = L_{kk}^m$ については、修正Leonard項の定義式

$$L_{ij}^m = \overline{u_i u_j} - \overline{u_i} \overline{u_j} \quad (3.7.18)$$

から厳密に計算できる。 $\tau_{kk}^S$ はLillyの1st-order theory (Lilly 1967)から以下のように近似的に求められる。

$$\tau_{ik}^{SGS} = 2 \frac{v_T^2}{(C_K \Delta)} = \frac{(C \bar{\Delta}^2 |\bar{S}|)^2}{(C_K \Delta)} \quad (3.7.19)$$

$$C_K = 0.094 \quad (3.7.20)$$

### 3.7.2 乱流応力の輸送方程式の離散化手法

レイノルズ応力収支の評価には、Navier-Stokes方程式の離散化式と整合性のある差分式を用いなければ、実際の数値計算におけるレイノルズ応力収支式が正確に評価されないことが鈴木・河村(1994)により指摘された。また、坪倉(1996)は、LESにおける空間フィルタとアンサンブル平均、あるいはグリッドフィルタとテストフィルタといった異なるフィルタースケールでの乱流応力の収支式の導出を明確にしている。本研究においてもこれらの概念に基づき、一般座標系のLESにおける乱流応力収支式を離散化する。

LESにおいては、陽的に求められる乱流応力の輸送方程式は、式(3.7.5)で定義されるGSレイノルズ応力 $m(\bar{u}_i, \bar{u}_j)$ の輸送方程式である。一般座標系におけるGSレイノルズ応力 $m(\bar{u}_i, \bar{u}_j)$ の輸送方程式は、直交座標系の場合(坪倉 1996)と同様に導出できる。

$$\frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial t} m(\bar{u}_i, \bar{u}_j) = C_{ij} + T_{ij} + \Psi_{ij} + D_{ij} + D_{ij}^{SGS} + \Phi_{ij} + \varepsilon_{ij} + \varepsilon_{ij}^{SGS} + P_{ij} \quad (3.7.21)$$

$$C_{ij} = - \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left[ \left( \overline{U_m} \right) m(\bar{u}_i, \bar{u}_j) \right] \quad (3.7.22)$$

$$T_{ij} = - \frac{\partial}{\partial \xi_m} m(\overline{U_m}, \bar{u}_i, \bar{u}_j) \quad (3.7.23)$$

$$\Psi_{ij} = - \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left[ m \left( p, \frac{1}{J} \frac{\partial \xi_m^-}{\partial x_j} \bar{u}_i + \frac{1}{J} \frac{\partial \xi_m^-}{\partial x_i} \bar{u}_j \right) \right] \quad (3.7.24)$$

$$D_{ij} = \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left[ \nu G^{mm} \frac{\partial}{\partial \xi_n} m(\bar{u}_i, \bar{u}_j) \right] \quad (3.7.25)$$

$$D_{ij}^{SGS} = - \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left[ m(\bar{u}_i, \tau(U_m, u_j)) + m(\bar{u}_j, \tau(U_m, u_i)) \right] \quad (3.7.26)$$

$$\Phi_{ij} = m \left( p, \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left( \frac{1}{J} \frac{\partial \xi_m^-}{\partial x_j} \bar{u}_i \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left( \frac{1}{J} \frac{\partial \xi_m^-}{\partial x_i} \bar{u}_j \right) \right) \quad (3.7.27)$$

$$\varepsilon_{ij} = -2\nu G^{mm} m \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \xi_m}, \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial \xi_n} \right) = -2J\nu m \left( \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left( \frac{1}{J} \frac{\partial \xi_m^-}{\partial x_k} \bar{u}_i \right), \frac{\partial}{\partial \xi_n} \left( \frac{1}{J} \frac{\partial \xi_n^-}{\partial x_k} \bar{u}_j \right) \right) \quad (3.7.28)$$

$$\varepsilon_{ij}^{SGS} = m \left( \tau(u_k, u_l), \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left( \frac{1}{J} \frac{\partial \xi_m^-}{\partial x_k} \bar{u}_i \right) \right) + m \left( \tau(u_k, u_l), \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left( \frac{1}{J} \frac{\partial \xi_m^-}{\partial x_k} \bar{u}_j \right) \right) \quad (3.7.29)$$

$$P = -m(\bar{u}_k, \bar{u}_l) \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left\langle \frac{1}{J} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_k} \bar{u}_l \right\rangle - m(\bar{u}_k, \bar{u}_l) \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left\langle \frac{1}{J} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_k} \bar{u}_l \right\rangle \quad (3.7.30)$$

ここで、式(3.7.21)式中の  $C_{ij}$  は対流項、 $T_{ij}$  は乱流拡散項、 $\Psi_{ij}$  は圧力拡散項、 $D_{ij}$  は分子粘性による拡散項、 $D_{ij}^{SGS}$  はSGS応力による拡散項、 $\Phi_{ij}$  は圧力ひずみ相関項、 $\epsilon_{ij}$  は分子粘性による散逸項、 $\epsilon_{ij}^{SGS}$  はSGS応力によるGSからSGSへのカスケード項、 $P_{ij}$  は生成項である。式(3.7.22)～(3.7.30)の各項を正しく評価するためには、Navier-Stokes方程式の離散化式となるべく整合性のある差分形式を用いて離散化しなければならない(鈴木・河村1994)。ここで、例として、2次精度の(修正)コロケート格子系差分スキームの場合、GSレイノルズ応力  $m(\bar{u}_k, \bar{u}_l)$  の輸送方程式は、次のように離散化される。

$$\frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial t} m(\bar{u}_k, \bar{u}_l) = C_{ij} + T_{ij} + \Psi_{ij} + D_{ij} + D_{ij}^{SGS} + \Phi_{ij} + \epsilon_{ij} + \epsilon_{ij}^{SGS} + P_{ij} \quad (3.7.31)$$

$$C_{ij} = -\frac{\delta_1}{\delta_1 \xi_m} \left[ \overline{(\bar{u}_k)} m(\bar{u}_l, \bar{u}_l) \right] \quad (3.7.32)$$

$$T_{ij} = -\frac{\delta_1}{\delta_1 \xi_m} m(\bar{u}_k, \bar{u}_l, \bar{u}_l) \quad (3.7.33)$$

$$\Psi_{ij} = -\frac{\delta_2}{\delta_2 \xi_m} \left[ m \left( p, \frac{1}{J} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \bar{u}_l + \frac{1}{J} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \bar{u}_l \right) \right] \quad (3.7.34)$$

$$D_{ij} = \frac{\delta_1}{\delta_1 \xi_m} \left[ \nu C^{mnr} \frac{\delta_1}{\delta_1 \xi_n} m(\bar{u}_r, \bar{u}_l) \right] \quad (3.7.35)$$

$$D_{ij}^{SGS} = -\frac{\delta_1}{\delta_1 \xi_m} \left[ m \left( \bar{u}_l, \frac{1}{J} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_k} \tau(u_k, u_l) \right) + m \left( \bar{u}_l, \frac{1}{J} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_k} \tau(u_k, u_l) \right) \right] \quad (3.7.36)$$

$$\Phi_{ij} = m \left( p, \frac{\delta_2}{\delta_2 \xi_m} \left( \frac{1}{J} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \bar{u}_l \right) + \frac{\delta_2}{\delta_2 \xi_m} \left( \frac{1}{J} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \bar{u}_l \right) \right) \quad (3.7.37)$$

$$\epsilon_{ij} = -2J\nu m \left( \frac{\delta_2}{\delta_2 \xi_m} \left( \frac{1}{J} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_k} \bar{u}_l \right), \frac{\delta_2}{\delta_2 \xi_m} \left( \frac{1}{J} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_k} \bar{u}_l \right) \right) \quad (3.7.38)$$

$$\epsilon_{ij}^{SGS} = m \left( \tau(u_k, u_l), \frac{\delta_2}{\delta_2 \xi_m} \left( \frac{1}{J} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_k} \bar{u}_l \right) \right) + m \left( \tau(u_k, u_l), \frac{\delta_2}{\delta_2 \xi_m} \left( \frac{1}{J} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_k} \bar{u}_l \right) \right) \quad (3.7.39)$$

$$P = -m(\bar{u}_k, \bar{u}_l) \frac{\delta_2}{\delta_2 \xi_m} \left\langle \frac{1}{J} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_k} \bar{u}_l \right\rangle - m(\bar{u}_k, \bar{u}_l) \frac{\delta_2}{\delta_2 \xi_m} \left\langle \frac{1}{J} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_k} \bar{u}_l \right\rangle \quad (3.7.40)$$

式(3.7.32)～(3.7.33)の離散化式の中で、流れ場に一樣方向がない場合、離散化が非常に煩雑で、しかも、GSレイノルズ応力収支の算出時間が全体の計算時間に占める割合もかなり増加

する。そこで、本研究においては、第4章の一般座標系差分スキームの検証計算以外では、 $C_{ij}$ ,  $T_{ij}$ ,  $\Psi_{ij}$ ,  $D_{ij}^{SGS}$ の離散化式は、以下のように変更している。

$$C_{ij} = -\frac{\delta_2}{\delta_2 \xi_m} \left[ \overline{(U_m)} m(u_i, u_j) \right] \quad (3.7.41)$$

$$T_{ij} = -\frac{\delta_2}{\delta_2 \xi_m} m(\overline{U_m}, \overline{u_i}, \overline{u_j}) \quad (3.7.42)$$

$$\Psi_{ij} = -\frac{\delta_2}{\delta_2 \xi_m} \left[ \frac{1}{J} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} m(\overline{p}, \overline{u_i}) + \frac{1}{J} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} m(\overline{p}, \overline{u_j}) \right] \quad (3.7.43)$$

$$D_{ij}^{SGS} = -\frac{\delta_2}{\delta_2 \xi_m} \left[ \frac{1}{J} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_k} \left\{ m(\overline{u_i}, \tau(u_k, u_j)) + m(\overline{u_j}, \tau(u_k, u_i)) \right\} \right] \quad (3.7.44)$$

式(3.7.41)~(3.7.44)は、Navier-Stokes方程式の離散化式との整合性がとれていないが、離散化が容易であり、計算負荷も小さい。

### 3.8 ヤコビアン、メトリックの計算

第2章において、スタガード、レギュラーおよびコロケート格子系における一般座標系差分スキームが構成されたが、離散化式中に現れるメトリックの計算方法に関しては言及されていない。本節では、メトリックを計算する際の注意すべき事項について考える。

#### 3.8.1 離散化式の保存形式と非保存形式の恒等関係

2.6において一般座標系差分スキームを構成する際、特に圧力項の離散化式において保存形式と非保存形式が離散化式上でも等しいと仮定した。しかし、ヤコビアンやメトリックの計算方法に注意しなければ、離散化式の保存形式と非保存形式の恒等関係は、必ずしも成り立たない。

例えば、レギュラー格子系および(修正)コロケート格子系において、圧力項の離散化式は、次のように定義された。

$$\left( \text{Pres.} - R2 \right)_i = \frac{\delta_2}{\delta_2 \xi_m} \left( \frac{1}{J} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} p \right) = \frac{1}{J} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} \frac{\delta_2 p}{\delta_2 \xi_m} \quad (3.8.1)$$

簡単のため、2次元に限定し式(3.9.1)を展開すると、以下のようになる。

$$\frac{\delta_2}{\delta_2 \xi} \left( \frac{1}{J} \frac{\partial \xi}{\partial x} p \right) + \frac{\delta_2}{\delta_2 \eta} \left( \frac{1}{J} \frac{\partial \eta}{\partial x} p \right) = \frac{1}{J} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\delta_2 p}{\delta_2 \xi} + \frac{1}{J} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\delta_2 p}{\delta_2 \eta} \quad (3.8.2)$$

$$\frac{\delta_2}{\delta_2 \xi} \left( \frac{1}{J} \frac{\partial \xi}{\partial y} p \right) + \frac{\delta_2}{\delta_2 \eta} \left( \frac{1}{J} \frac{\partial \eta}{\partial y} p \right) = \frac{1}{J} \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\delta_2 p}{\delta_2 \xi} + \frac{1}{J} \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\delta_2 p}{\delta_2 \eta} \quad (3.8.3)$$

上式において、保存形と非保存形の等式が厳密に成り立つためには、メトリックが以下のよ  
うな関係を満足していなければならない。

$$\frac{\delta_2}{\delta_2 \xi} \left( \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) = \frac{\delta_2}{\delta_2 \eta} \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) \quad (3.8.4)$$

$$\frac{\delta_2}{\delta_2 \xi} \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) = \frac{\delta_2}{\delta_2 \eta} \left( \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \quad (3.8.5)$$

これらは、解析的には  $x_{\xi n} = x_{\eta \xi}$ ,  $y_{\xi n} = y_{\eta \xi}$  を表し、一般的には、この関係が離散化式上でも成  
立するように、メトリックを計算しなければならない。そのためには、以下のことに注意し  
なければならない。

[メトリックを計算するときの注意事項]

1. 座標値の微分を近似する差分スキームは、離散化式の差分スキームと等しいもの  
を使用する(Thompson 1985; Bernard and Kapitza 1992)。
2. メトリックの計算で補間が必要になった場合、メトリックを計算した後、補間を  
適用するのではなく、座標値を補間した後、適切な差分形式を利用してメトリッ  
クを計算する(Thompson 1985)。

実際に式(3.8.2)および(3.8.3)において、どのようにメトリックおよびヤコビアンを計算し  
たらよいかを、図3.8.1に示されるような計算空間上の計算格子において考える。まず、セル  
中心  $(i+1/2, j+1/2)$  におけるメトリックを計算するための直感的な差分式は以下のように考え  
られる。

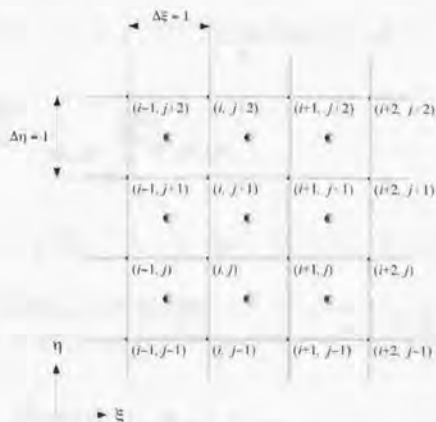


FIGURE 3.8.1 A computational grid in computational plane for evaluation of metrics and Jacobian.

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)_{i+1/2, j-1/2} = \frac{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)_{i-1/2, j} + \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)_{i+1/2, j+1}}{2\Delta\xi} = \frac{x_{i-1, j} - x_{i, j} + x_{i+1, j+1} - x_{i, j+1}}{2} \quad (3.8.6)$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)_{i+1/2, j-1/2} = \frac{\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)_{i, j+1/2} + \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)_{i+1, j+1/2}}{2\Delta\eta} = \frac{x_{i, j+1} - x_{i, j} + x_{i+1, j+1} - x_{i+1, j}}{2} \quad (3.8.7)$$

$$\left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)_{i+1/2, j-1/2} = \frac{\left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)_{i-1/2, j} + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)_{i-1/2, j+1}}{2\Delta\xi} = \frac{y_{i-1, j} - y_{i, j} + y_{i+1, j-1} - y_{i, j-1}}{2} \quad (3.8.8)$$

$$\left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)_{i+1/2, j-1/2} = \frac{\left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)_{i, j+1/2} + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)_{i+1, j+1/2}}{2\Delta\eta} = \frac{y_{i, j+1} - y_{i, j} + y_{i+1, j+1} - y_{i+1, j}}{2} \quad (3.8.9)$$

ここで、 $\Delta\xi = \Delta\eta = 1$ としている。メトリックをこのように計算した場合、離散化式の保存形式と非保存形式の恒等関係が成り立つための条件である式(3.8.4)および(3.8.5)が成り立つかどうかを調べてみる。代表的に式(3.8.5)について評価すると、

$$\begin{aligned} \frac{\delta_2}{\delta_2 \xi} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right) &= \frac{\left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)_{i+3/2, j+1/2} - \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)_{i-1/2, j+1/2}}{2} \\ &= \frac{y_{i+1, j+1} - y_{i-1, j} + y_{i+2, j+1} - y_{i-2, j} - y_{i, j+1} + y_{i, j} - y_{i-1, j-1} + y_{i-1, j}}{4} \end{aligned} \quad (3.8.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta_2}{\delta_2 \eta} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right) &= \frac{\left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)_{i+1/2, j+3/2} - \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)_{i+1/2, j-1/2}}{2} \\ &= \frac{y_{i+1, j+1} - y_{i, j+1} + y_{i+1, j+2} - y_{i, j+2} - y_{i+1, j} + y_{i, j} - y_{i-1, j-1} + y_{i-1, j}}{4} \end{aligned} \quad (3.8.11)$$

であるので、明らかに式(3.8.5)は成り立たない。式(3.8.4)についても同様である。

次に、メトリックを計算するときの注意事項に従って差分式を構成すると、以下のようになる。

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)_{i+1/2, j-1/2} = \left(\frac{\delta_2 x}{\delta_2 \xi}\right)_{i-1/2, j+1/2} = \frac{x_{i+3/2, j} - x_{i-1/2, j}}{2\Delta\xi}$$

$$= \frac{x_{i+1,j} + x_{i-1,j-1} + x_{i+2,j} + x_{i+2,j+1} - x_{i,j} - x_{i,j+1} - x_{i-1,j} - x_{i-1,j+1}}{8} \quad (3.8.12)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)_{i-1/2,j-1/2} &= \left(\frac{\delta_2 x}{\delta_2 \eta}\right)_{i-1/2,j-1/2} = \frac{x_{i,j+3/2} - x_{i,j-1/2}}{2\Delta\eta} \\ &= \frac{x_{i,j+1} + x_{i-1,j-1} + x_{i,j+2} + x_{i+1,j+2} - x_{i,j} - x_{i-1,j} - x_{i,j-1} - x_{i+1,j-1}}{8} \end{aligned} \quad (3.8.13)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)_{i+1/2,j-1/2} &= \left(\frac{\delta_2 y}{\delta_2 \xi}\right)_{i+1/2,j-1/2} = \frac{y_{i+3/2,j} - y_{i-1/2,j}}{2\Delta\xi} \\ &= \frac{y_{i+1,j} + y_{i-1,j-1} + y_{i+2,j} + y_{i+2,j+1} - y_{i,j} - y_{i,j-1} - y_{i-1,j} - y_{i-1,j-1}}{8} \end{aligned} \quad (3.8.14)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)_{i-1/2,j-1/2} &= \left(\frac{\delta_2 y}{\delta_2 \eta}\right)_{i-1/2,j-1/2} = \frac{y_{i,j+3/2} - y_{i,j-1/2}}{2\Delta\eta} \\ &= \frac{y_{i,j+1} + y_{i-1,j-1} + y_{i,j+2} + y_{i+1,j+2} - y_{i,j} - y_{i-1,j} - y_{i,j-1} - y_{i+1,j-1}}{8} \end{aligned} \quad (3.8.15)$$

この場合,

$$\begin{aligned} \frac{\delta_2}{\delta_2 \xi} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right) &= \frac{y_{i+1,j-1} + y_{i+2,j-1} + y_{i-1,j-2} + y_{i+2,j-2} - y_{i-1,j} - y_{i+2,j} - y_{i-1,j+1} - y_{i+2,j+1}}{16} \\ &\quad - \frac{y_{i,j-1} + y_{i-1,j-1} + y_{i,j+2} + y_{i-1,j+2} - y_{i,j} - y_{i-1,j} - y_{i,j-1} - y_{i-1,j-1}}{16} \end{aligned} \quad (3.8.16)$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta_2}{\delta_2 \eta} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right) &= \frac{y_{i+1,j+1} + y_{i+1,j+2} + y_{i-2,j+1} + y_{i-2,j+2} - y_{i,j-1} - y_{i,j+2} - y_{i-1,j-1} - y_{i-1,j+2}}{16} \\ &\quad - \frac{y_{i-1,j} + y_{i-1,j-1} + y_{i+2,j} + y_{i+2,j-1} - y_{i,j} - y_{i,j-1} - y_{i-1,j} - y_{i-1,j-1}}{16} \end{aligned} \quad (3.8.17)$$

となるので, 式(3.8.5)が成り立つ. 式(3.8.4)についても同様である. 従って, レギュラー格子系および(修正)コロケート格子系において, 式(3.8.12)~(3.8.15)を用いてメトリックを計算すると, 離散化式の保存形式と非保存形式の恒等関係が成り立つ.

2階微分についても同様な評価ができる. レギュラー格子系および(修正)コロケート格子系において, 格子ひずみテンソル  $G^{mn}$  を計算するとき, メトリックを以下のように計算すると保存形式と非保存形式の恒等関係が成り立つ.

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)_{i,j-1/2} = \left(\frac{\delta_1 x}{\delta_1 \xi}\right)_{i,j-1/2} = \frac{x_{i-1/2,j+1/2} - x_{j-1/2,j+1/2}}{\Delta \xi} = \frac{x_{i-1,j-1} + x_{i+1,j} - x_{i-1,j} - x_{i-1,j+1}}{4} \quad (3.8.18)$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)_{i,j-1/2} = \left(\frac{\delta_1 x}{\delta_1 \eta}\right)_{i,j-1/2} = \frac{x_{i,j+1} - x_{i,j}}{\Delta \eta} = x_{i,j-1} - x_{i,j} \quad (3.8.19)$$

$$\left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)_{i,j-1/2} = \left(\frac{\delta_1 y}{\delta_1 \xi}\right)_{i,j-1/2} = \frac{y_{i-1/2,j+1/2} - y_{j-1/2,j+1/2}}{\Delta \xi} = \frac{y_{i-1,j-1} + y_{i+1,j} - y_{i-1,j} - y_{i-1,j+1}}{4} \quad (3.8.20)$$

$$\left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)_{i,j-1/2} = \left(\frac{\delta_1 y}{\delta_1 \eta}\right)_{i,j-1/2} = \frac{y_{i,j+1} - y_{i,j}}{\Delta \eta} = y_{i,j-1} - y_{i,j} \quad (3.8.21)$$

しかし、以上の議論を、3次元に拡張した場合、メトリックを計算するときの注意事項に従って評価しても、離散化式の保存形式と非保存形式の恒等関係が成り立つための条件である式(3.8.4)および式(3.8.5)は、もはや成り立たない。本研究では、2次元でのメトリック、ヤコビアンをそのまま3次元に拡張して、メトリック、ヤコビアンを計算することとした。

### 3.8.2 一様流の保存

メトリック、ヤコビアンの評価方法において、注意すべき点としてもう一つ、離散化式上で一様流が厳密に維持されるかどうかという問題がある(藤井 1994)。

代表的に2次精度修正コロケート格子系スキームの場合について考える。連続の式の離散化式は、次のように定義された。

$$(\text{Cont-MC2})_1 = \frac{\delta_1 F_m}{\delta_1 \xi_m} = 0 \quad (3.8.22)$$

簡単のため2次元の場合を考え、上式を展開すると以下ようになる。

$$(\text{Cont-MC2})_1 = \frac{\delta_1 F_1}{\delta_1 \xi} + \frac{\delta_1 F_2}{\delta_1 \eta} = 0 \quad (3.8.23)$$

$$F_1 = \overline{U}^{1/2} - \Delta t G^{1/2} \frac{\delta_1 \Delta p}{\delta_1 \xi_n} = \frac{1}{J} \frac{\partial \xi}{\partial x_j} u_j^{1/2} - \Delta t G^{1/2} \frac{\delta_1 \Delta p}{\delta_1 \xi_n} \quad (3.8.24)$$

$$F_2 = \overline{V}^{1/2} - \Delta t G^{2/2} \frac{\delta_1 \Delta p}{\delta_1 \xi_n} = \frac{1}{J} \frac{\partial \eta}{\partial x_j} u_j^{1/2} - \Delta t G^{2/2} \frac{\delta_1 \Delta p}{\delta_1 \xi_n} \quad (3.8.25)$$

ここで、一様流の条件

$$u = u_n = \text{Constant}, \quad v = 0, \quad p = 0 \quad (3.8.26)$$

を代入すると、修正コロケート格子系差分スキームにおける連続の式は、結局、以下のよう



になる。

$$(\text{Cont. - MC2})_1 = \left[ \frac{\delta_1}{\delta_1 \xi} \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) + \frac{\delta_1}{\delta_1 \eta} \left( \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \right] \cdot u_* \quad (3.8.27)$$

一樣流は、当然のことながら、連続の式を満たしているので、上式はゼロとならなければならない。そのためには、

$$\frac{\delta_1}{\delta_1 \xi} \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) = \frac{\delta_1}{\delta_1 \eta} \left( \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \quad (3.8.28)$$

または、

$$\frac{\delta_2}{\delta_2 \xi} \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) = \frac{\delta_2}{\delta_2 \eta} \left( \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \quad (3.8.29)$$

が成り立っていなければならない。一樣流が維持されるための条件を表す式(3.8.29)は、離散化式の保存形式と非保存形式の恒等関係が成り立つための条件式(3.8.5)と全く等しい。従って、3.8.1で述べたメトリックを計算するときの注意事項は、一樣流が厳密に維持されるためにも必要な条件である。

## 第4章

# 運動エネルギー保存型一般座標系差分スキームの検証

複雑形状を持つ非圧縮性乱流場に対して、有限差分法により高精度な直接数値シミュレーション(DNS)やラージエディシミュレーション(LES)を行うには、一般座標系における高精度な離散化手法の確立が必要である。第2章において、運動量、速度二乗量および運動エネルギーの保存特性が適切である等間隔直交座標系における差分スキーム(森西 1996a, 1998b)を、座標変換を施した基礎方程式系に拡張して、一般座標系におけるスタガード、レギュラおよびコロケート格子系における一般座標系差分スキームを構成した。

本章では、まず、第2章において構成した一般座標系差分スキームの精度および保存特性を数値実験により検証する。座標変換を含んだ一般座標系差分スキームの精度に関しては、簡単な1次元対流方程式の計算により評価する。保存特性については、森西(1996c)に従い、運動量と運動エネルギーの総量が時間的に保存されるべき2次元周期的非粘性流の数値実験を行い、適切な差分スキームを一般座標系に拡張した際に導入した近似(明示されない補間の導入、圧力項離散化式の保存形と非保存形の等価)の影響を調査する。

次に、実際的な非圧縮性乱流場への適用例として、まず、形状が単純で、スペクトル法や差分法によるDNS、LES計算結果が豊富なチャンネル内乱流の計算を行い、考察を行う。チャンネル内乱流において、運動エネルギー保存型差分スキームの優位性に関しては、ほぼ明らかにされ、以下のように結論づけられている(森西 1996c, 1998a ~ b)。

1. 運動エネルギーの保存特性に関して適切でない差分スキームは、差分スキーム自身で非物理的な運動エネルギーの生成または散逸を引き起こし、これが物理的粘性散逸を上回るような高レイノルズ数域において、非物理的な乱流強度分布を与えてしまう。これに対し、運動エネルギーの保存特性が適切な差分スキームは、こうした傾向が軽減されている。

2. 運動エネルギー保存特性に関して厳密ではないが、実際の計算上、ほぼ適切である修正コロケート格子系差分スキームは、従来のコロケート格子系差分スキームと比較して、平均速度および乱流強度についてはほとんど差異が見られないが、連続の式および圧力ひずみ相関項の計算誤差を大きく減少させ数値データの信頼性を向上させる。

従って、本章では、主として、適切な差分スキームを一般座標系に拡張したことによる影響について考察する。

#### 4.1 座標変換の打ち切り誤差

##### 4.1.1 理論的評価

基礎方程式に座標変換を施すと、速度、圧力といった変数の微分は、全て等間隔直交座標系である計算座標系 $(\xi, \eta, \zeta)$ における微分となること、2.3節で示された。従って、支配方程式を離散化するための基本的な差分および補間スキームは、等間隔直交である計算座標系で定義された。しかし、2.4節において定義された基本的な離散オペレータの精度は、あくまでも計算空間での精度である。従って、基本的な差分スキームの物理空間における精度を検討しておくことが重要である。

簡単のため、まず、ある変数 $f$ の1次元の1階微分 $\partial f / \partial x$ の2次精度中心差分を考える。

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial \xi} = \frac{f_{\xi} - f_{\xi-1}}{x_{\xi} - x_{\xi-1}} + T_1 \quad (4.1.1)$$

ここで、 $T_1$ は打ち切り誤差であり、以下のように評価(Thompson *et al.* 1985)される。

$$\begin{aligned} T_1 &= -\frac{1}{6} \frac{x_{\xi\xi\xi}}{x_{\xi}^2} f_{\xi} - \frac{1}{2} \frac{x_{\xi\xi\xi}}{x_{\xi}^2} f_{\xi-1} - \frac{1}{6} \frac{x_{\xi\xi\xi}^2}{x_{\xi}^2} f_{\xi\xi\xi} + \dots \\ &= -\frac{1}{6} \frac{q'''}{N^2} f_{\xi} - \frac{1}{2} \frac{q'''}{N^2} f_{\xi-1} - \frac{1}{6} \frac{q'''}{N^2} f_{\xi\xi\xi} + \dots \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

式(4.1.2)中の $q$ は任意の1次元格子点分布関数であり、次のように与えられる。

$$x(\xi) = q\left(\frac{\xi}{N}\right), \quad 0 \leq \xi \leq N \quad (4.1.3)$$

式(4.1.2)中の右辺第1, 2項は、格子間隔が不等間隔であるため生じる誤差項であり、メトリックを $\partial f / \partial x$ の差分近似スキームと同じ形式の差分式を用いて計算すると、第1項はゼロになる(Thompson *et al.* 1985)。第3項は、等間隔の場合にも同様に現れる誤差項である。式(4.1.2)は、格子点の分布関数 $q$ を固定した場合、格子点数 $N$ の増加に対して、打ち切り誤差の主要項が全て $1/N^2$ に比例して減少することを意味している。従って、式(4.1.1)の差分スキ-

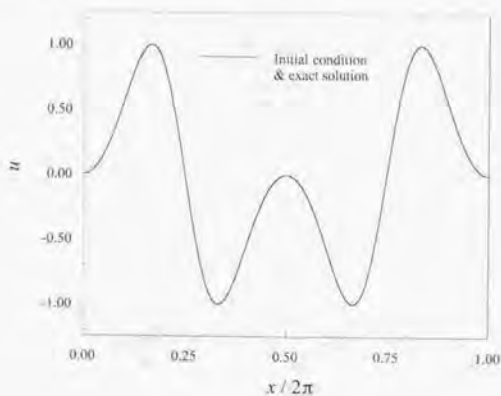


FIGURE 4.1.1 Initial condition and exact solution for one-dimensional convection problem.

ムは、物理空間でも2次精度を維持している。4次精度差分オペレータも同様に評価すると、打ち切り誤差の主要項は $1/N^4$ に比例し、計算空間上で4次精度の差分オペレータは、物理空間でも4次精度である。

多次元における打ち切り誤差は、これらの誤差に加えて格子の非直交性に起因する誤差が新たに現れる。2次元の場合、打ち切り誤差 $T_2$ は以下のように評価できる (Thompson *et al.*, 1985)。

$$T_2 = -\frac{1}{2}x_{\xi\xi}f_{\xi\xi} + \frac{1}{2}(y_{\eta\eta}f_{\eta\eta} - x_{\xi\xi}f_{\xi\xi}) \cot \theta + \dots \quad (4.1.4)$$

ここで、 $\theta$ は格子線の交差角である。式(4.1.4)右辺第1項は、式(3.1.2)右辺第2項に対応し、格子の不等間隔による誤差である。式(4.1.4)右辺第2、3項は、格子の非直交性により新たに生じる誤差である。この非直交性による誤差は、 $\cot \theta$ に比例しているため、非直交性が強いところでは注意を要するが、格子の交差角 $\theta$ が $45^\circ$ 以下の場合、格子の不等間隔による誤差よりも小さくなるのが経験的にわかっている (Thompson *et al.*, 1985)。また、格子が非直交であっても等間隔であれば、メトリック $y_{\eta\eta}$ 、 $x_{\xi\xi}$ がゼロになるので格子の非直交性による誤差はなくなる。従って、計算格子の直交性と格子間隔の伸縮比に注意すれば、計算空間で定義された任意精度の差分オペレータは物理空間でもその精度を維持するものと考えられる。

#### 4.1.2 数値実験的評価

次に、座標変換を伴う差分オペレータの精度を簡単なベンチマークテストで確認する。ここで、取り上げられる問題は、次式で与えられる1次元対流方程式である。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + C_x \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (4.1.5)$$

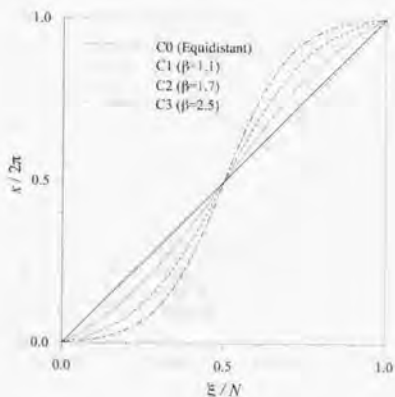


FIGURE 4.1.2 Point distribution function of computational grid for one-dimensional convection problem.

ここで、 $C_x$ は対流速度であり定数1とする。初期値は、次式で定義される関数を与える(Canuto *et al.* 1986)。

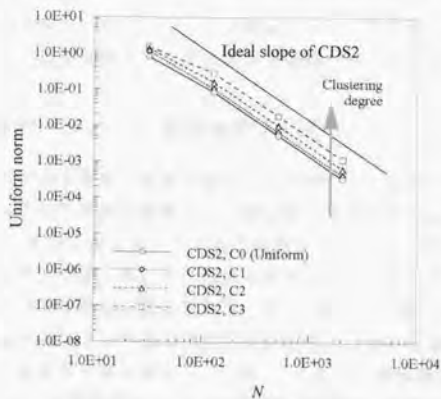
$$u(x, 0) = \sin(\pi \cdot \cos x) \quad (4.1.6)$$

計算領域は、 $0 \leq x \leq 2\pi$ とし、 $x$ 方向に周期境界条件を課す。 $t = 2\pi$ 後の波形を厳密解(初期値と同じ)と比較することにより、差分スキームの誤差を評価する。初期値および厳密解の分布を図4.1.1に示す。計算格子の不等間隔が計算精度に与える影響を調べるため、等間隔格子(C0, C: Clustering)に加え、図4.1.2に示されるように、格子点分布として次式で表される双曲線正接分布関数を使用した3つの不等間隔格子( $C_n, n = 1 \sim 3$ )を使用した。

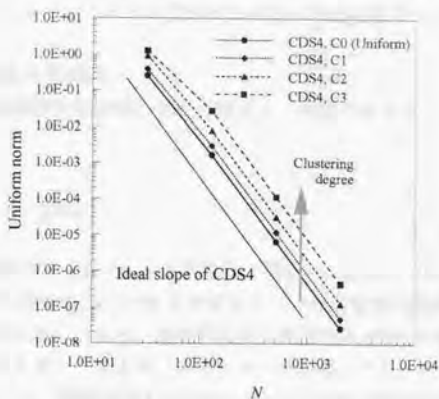
$$x = \pi \cdot \left( 1 - \frac{\tanh \beta (1 - 2\xi)}{\tanh \beta} \right) \quad (4.1.7)$$

式(4.1.7)中の $\beta$ は、格子点分布を制御するパラメータであり、 $n = 1 \sim 3$ において、 $\beta = 1.1, 1.7, 2.5$ とした。 $n$ が大きくなるほど不等間隔の度合いが大きくなる。時間進行による誤差の影響をなるべく小さくするため、時間進行法として4次精度Runge-Kutta法(Canuto *et al.*)を用い、クーラン数 $CFL (= C_x \Delta t / \Delta x_{min})$ は、ことわりのない場合、十分小さい $CFL = 0.01$ としている。対流項の離散化は、2次精度および4次精度中心差分スキーム(CDS2およびCDS4)を用いた。座標変換のメトリックとヤコビアンは、対流項の離散化と整合性が保たれるように、同じ精度の差分スキームを利用して計算されている。

結果として、格子点 $N$ の増加に伴う一様ノルムの変化を図4.1.3に示す。等間隔格子(C0)の場合、2時精度差分スキーム(CDS2)および(CDS4)は、格子点数を増加させるとほぼ理想的な傾きで誤差が減少している。それぞれ2時精度および4時精度であることがわかる。一



(a) The second-order accurate central difference scheme, CDS2.



(b) The fourth-order accurate central difference scheme, CDS4.

FIGURE 4.1.3 Uniform norm of the solution for the one-dimensional convection equation as a function of the number of grid points.

方、不等間隔格子の場合(C1~C3)、誤差の絶対量は等間隔格子の場合よりも大きく、不等間隔の度合いが大きくなるほど誤差が大きくなる傾向にあるが、傾きはほぼ維持されている。従って、不等間隔格子の場合でも、格子点数を増加させた時の厳密解への収束性という意味での精度は維持されていることが確認できる。

以上の理論的、数値実験の見地から、座標変換を伴う差分オペレータの精度は、計算空間

での精度が物理空間でも維持されていることが確認できた。従って、第2章で構成した一般座標系差分スキームは、物理座標系でもその精度を維持していると言える。

## 4.2 一般座標系差分スキームの保存特性の検証

第2章において、等間隔正規直交座標系における差分スキーム(森西 1996a～b, 1998a～b)を座標変換された基礎方程式系に拡張し、一般座標系における Maliska のスタガード格子系(1984)、レギュラ格子系およびコロケート格子系差分スキームを構成した。Maliska のスタガード格子系およびレギュラ格子系における差分スキームは、形式上、運動量、速度二乗量および運動エネルギーの保存特性が適切である一方、コロケート格子系差分スキームは、そのままでは時間間隔  $\Delta t$  のオーダーの保存特性誤差が含まれ、それを  $\Delta t^2$  に改善されたのが修正コロケート格子系差分スキームであった。しかし、これら一般座標系差分スキームを構成する際、圧力項差分スキームの保存形式と非保存形式が離散的にも等しいと仮定したことや、明示されない補間を導入したことなどから、差分スキームの保存特性に関する厳密性が失われた。ここでは、その影響を調べるため、森西(1996c)に従い、運動量と運動エネルギーの総量が時間的に保存されるべき2次元周期的非粘性流の数値実験を行う。

### 4.2.1 保存特性検証方法概要

2次元( $i=1\sim 2$ )周期的非粘性流の基礎方程式は、次式で表される。

$$(\text{Cont.})_i = 0 \quad (4.2.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{u_i}{J} \right) + (\text{Conv.})_i + (\text{Pres.})_i = 0 \quad (4.2.2)$$

ここで、(Cont.)は連続の式であり、一般座標系の場合、式(2.3.1)で表される。(Pres.)および(Convection)は、それぞれ圧力項および対流項であり、一般座標系の場合、式(2.3.3)および式(2.3.6)～(2.3.8)で表される。これら、連続の式および運動量方程式中の各項は、第2章で構成された Maliska のスタガード格子系、レギュラ格子系、コロケート格子系および修正コロケート格子系における一般座標系差分スキームによりそれぞれ離散化される。時間積分による誤差の影響をなるべく小さくするため、時間進行法として Runge-Kutta スキームと Crank-Nicolson スキームを組み合わせた低記憶容量3段階3次精度半陰解スキーム(Splatt 1911)を用いる。このスキームは、一般的に未知のベクトル関数  $\mathbf{u}$  の方程式系を

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = L(\mathbf{u}) + N(\mathbf{u}) \quad (4.2.3)$$

$L(\mathbf{u})$ : 線形演算子

$N(\mathbf{u})$ : 非線形演算子

として、次のように表される。

$$\mathbf{u}^k = \mathbf{u}^{k-1} + \Delta t \cdot \left[ L(\alpha_k \mathbf{u}^{k-1} + \beta_k \mathbf{u}^k) + \gamma_k N(\mathbf{u}^{k-1}) + \zeta_k N(\mathbf{u}^{k-2}) \right] \quad (4.2.4)$$

ここで、上付添え字  $k$  は、各時間ステップ内での段階数であり、 $k=1\sim 3$  である。また、上式中の定数は、以下の通りである。

$$\alpha_1 = 29/96, \quad \alpha_2 = -3/40, \quad \alpha_3 = 1/6$$

$$\beta_1 = 37/160, \quad \beta_2 = 5/24, \quad \beta_3 = 1/6$$

$$\gamma_1 = 8/15, \quad \gamma_2 = 5/12, \quad \gamma_3 = 3/4$$

$$\zeta_1 = 0, \quad \zeta_2 = -17/60, \quad \zeta_3 = -5/12$$

ターラン数  $CFL (= C_s \Delta t / \Delta x_{\min})$  は、ことわりのない場合、十分小さい  $CFL=0.01$  としている。計算は、無次元時間  $t=10$  まで行われる。速度と圧力のカップリングアルゴリズムは、フラクショナルステップ法またはSMAC法に類似した方法を用いている。圧力方程式は、van der Vorst (1991)のBi-CGStab法(藤野 1991)を用いて解き、残差ベクトルの大きさが  $10^{-10}$  になるまで収束させる。このときの連続の式の残差は  $10^{-12}$  程度である。

計算領域および格子点数は、それぞれ  $2\pi \times 2\pi$ 、 $16 \times 16$  である。計算格子の不等間隔および非直交性が保存特性に与える影響を調べるため、直交等間隔格子(C0S0, C:Clustering, S:Skew)に加え、図4.2.1で示されるような  $x, y$  方向に式(4.1.7)で与えられる格子点分布関数を用いた直交不等間隔格子(CnS0,  $n=1\sim 3$ )および等間隔非直交格子(C0Sn,  $n=1\sim 3$ )を用意した。図4.2.1からもわかるように、 $n$  が大きくなるほど格子の不等間隔、非直交性の度合いが

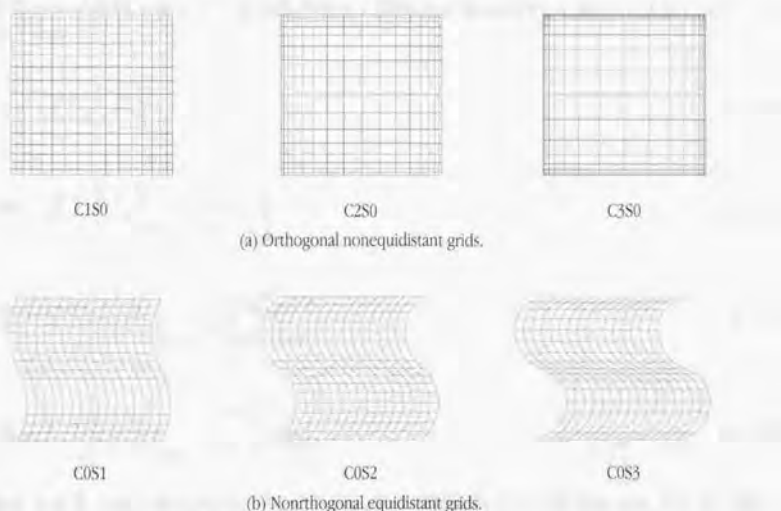


FIGURE 4.2.1 Computational grids used for validation tests of conservative properties of finite difference schemes in generalized coordinate system.



大きくなる。

初期値の作成は、格子点上で定義される流れ関数を一様乱数で与え、格子点上で連続の式を満たす速度場を得た後、その速度場から各計算格子と各格子系における速度が双一次補間により計算される。さらに、速度場は、運動量の総和をゼロとするため、

$$\sum_{\xi} \sum_{\eta} |u_1/J| - \sum_{\xi} \sum_{\eta} |u_2/J| = 0 \quad (4.2.5)$$

となるように正規化された後、流れ場の運動エネルギーの総和が

$$\sum_{\xi} \sum_{\eta} |K/J| = 1 \quad (4.2.6)$$

となるように正規化される。このように求められた速度場は、補間の誤差によって厳密には連続の式を満たさないで、適当なタイムステップ数だけ計算を進行させて（スタガードおよびコロケート格子系の場合、通常、数ステップ、修正コロケート格子系差分スキームの場合数十～数百ステップ）、連続の式および運動量方程式を十分満たす速度、圧力場を得た後、再度、運動量の総和がゼロに、運動エネルギーの総和が1になるように正規化して、計算の初期値とした。従って、計算格子および格子系の違いにより初期値が異なるが、保存特性を検証するには特に問題ないと考えられる。

#### 4.2.2 スタガード格子系差分スキームの保存特性

Maliskaのスタガード格子系においては、各直交速度成分のコントロールボリュームが、計算領域全体を2回覆い、2セットの速度場解が存在することになる。従って、計算領域全体の運動量および運動エネルギーの総和の概念に曖昧さがあるので、それぞれ以下のように定義して、議論を行う。

$$M_1 = \sum_{\xi} \sum_{\eta} \left[ \left( \frac{u_1}{J} \right)_{CS1} + \left( \frac{u_2}{J} \right)_{CS2} \right] \quad (4.2.6)$$

$$M_2 = \sum_{\xi} \sum_{\eta} \left[ \left( \frac{u_1}{J} \right)_{CS2} + \left( \frac{u_2}{J} \right)_{CS1} \right] \quad (4.2.7)$$

$$K_1 = \sum_{\xi} \sum_{\eta} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{u_1^2}{J} \right)_{CS1} + \frac{1}{2} \left( \frac{u_2^2}{J} \right)_{CS2} \right] \quad (4.2.8)$$

$$K_2 = \sum_{\xi} \sum_{\eta} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{u_1^2}{J} \right)_{CS2} + \frac{1}{2} \left( \frac{u_2^2}{J} \right)_{CS1} \right] \quad (4.2.9)$$

下付添え字 C.S.1 および C.S.2 は、直交速度成分が定義されるセル界面を表している（第2章、図 2.5.3 参照）。本来のスタガード格子系の場合とは異なり、Maliskaのスタガード格子系では全ての直交速度成分が同一点に定義されているので、運動量および運動エネルギーの

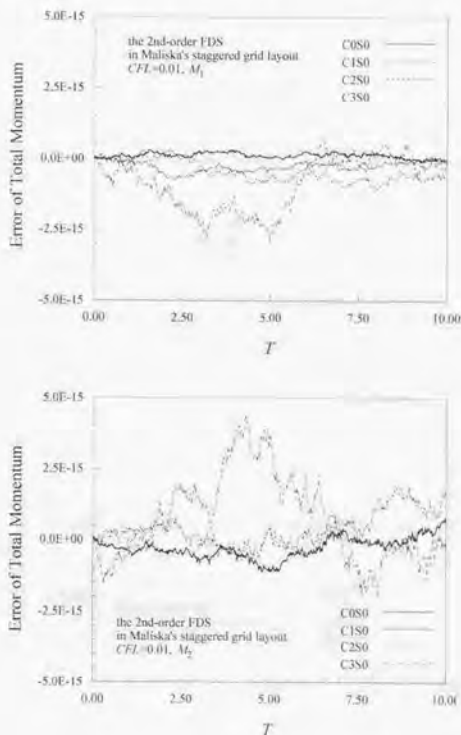


FIGURE 4.2.2 The error of total momentum by the second order finite difference scheme in Maliska's staggered grid layout in case of nonuniform orthogonal grids.

総和を

$$M = \frac{1}{2} \sum_{\xi} \sum_{\eta} \left[ \left( \frac{u_1}{J} \right)_{CS1} + \left( \frac{u_2}{J} \right)_{CS1} \right] + \frac{1}{2} \sum_{\xi} \sum_{\eta} \left[ \left( \frac{u_1}{J} \right)_{CS2} + \left( \frac{u_2}{J} \right)_{CS2} \right] \quad (4.2.10)$$

$$K = \frac{1}{2} \sum_{\xi} \sum_{\eta} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{u_1^2}{J} \right)_{CS1} + \frac{1}{2} \left( \frac{u_2^2}{J} \right)_{CS1} \right] + \frac{1}{2} \sum_{\xi} \sum_{\eta} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{u_1^2}{J} \right)_{CS2} + \frac{1}{2} \left( \frac{u_2^2}{J} \right)_{CS2} \right] \quad (4.2.11)$$

のように定義することも考えられるが、これらは結局、 $M=(M_1+M_2)/2$  および  $K=(K_1+K_2)/2$  で表される。

Maliskaのスタガード格子系における2次精度一般座標系差分スキームによる運動量の総量

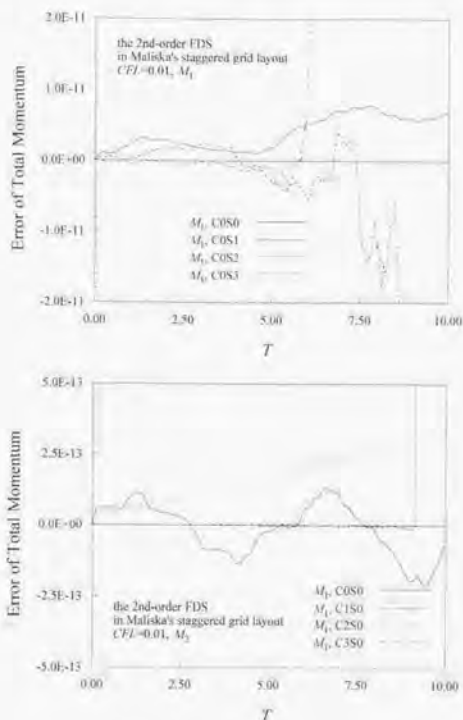


FIGURE 4.2.3 The error of total momentum by the second order finite difference scheme in Maliska's staggered grid layout in case of uniform nonorthogonal grids.

の誤差に対する格子の不等間隔および非直交性の影響を図4.2.2～3に示す。図4.2.2の計算格子が直交である場合( $CnS0$ ,  $n=0\sim3$ ), セル界面に直交する速度成分から構成される運動量  $M_1$  およびセル界面に接する速度成分から構成された運動量  $M_2$  の総和の誤差は, 全ケースにおいて誤差は, 倍精度計算の丸め誤差  $O(10^{-13})$  程度であり, 運動量の保存特性は厳密である。図4.2.3の計算格子が非直交である場合( $COSn$ ,  $n=0\sim3$ ), 運動量  $M_1$  および  $M_2$  の総和の誤差は, 格子の非直交性の影響から若干増加しているが, その誤差は  $O(10^{-10})$  程度であるので, 運動量の保存特性に関して計算上はほぼ適切である。

Maliskaのスタガード格子系における2次精度一般座標系差分スキームによる運動エネルギーの総量の誤差に対する格子の不等間隔および非直交性の影響を図4.2.4および図4.2.5に示す。図4.2.4の計算格子が直交である場合( $CnS0$ ,  $n=0\sim3$ ), セル界面に直交する速度成分から構成された運動エネルギー  $K$  の総和は, 格子の不等間隔の度合いが極端に大きいC3S0の場合を除いて, その誤差が  $O(10^{-6})$  と非常に小さいので, 実際の計算上, ほぼ満足できる精

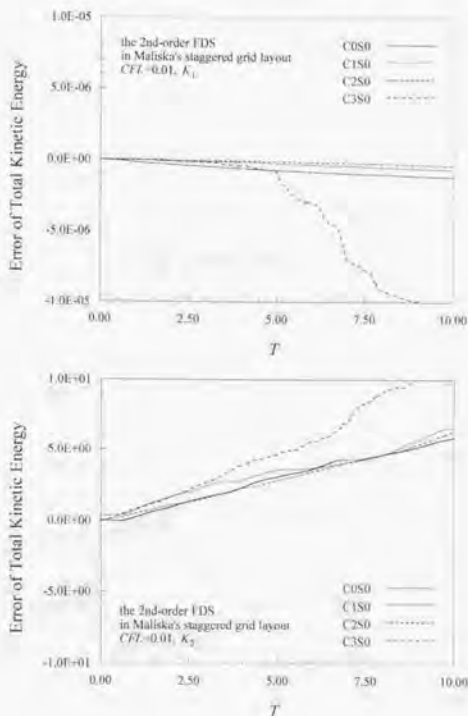


FIGURE 4.2.4 The error of total kinetic energy by the second order finite difference scheme in Maliska's staggered grid layout in case of nonuniform orthogonal grids.

度で運動エネルギーが保存されている。一方、セル界面に接する速度成分から構成された運動エネルギー  $K_2$  の総和は、その誤差が時間の経過とともに増加している。これは、セル界面に接する速度成分の離散化式において、明示されない補間により計算される項の寄与が大きくなり、離散的な運動エネルギーの保存特性が破られるためである。図4.2.5の計算格子が非直交である場合(COS $n$ ,  $n=0\sim3$ )、 $K_2$ の保存特性の誤差が $K_1$ の保存特性にも悪影響を及ぼし、全体的に運動エネルギーが急激に増加している。従って、非直交格子の場合、スタガード格子系では運動エネルギーが適切に保存されない。

ここで、なぜ、Maliskaのスタガード格子系において離散的な運動エネルギーの保存特性が満たされなくなるのかを、実際に離散化式を構成して考えてみる。簡単のため、2次元におけるMaliskaのスタガード格子系における2次精度差分スキームで考える。ここで、図4.2.6のような計算格子の状態において、セル界面に接する直交速度成分 $u_x$ を計算するための離散化式は、以下のようになる。

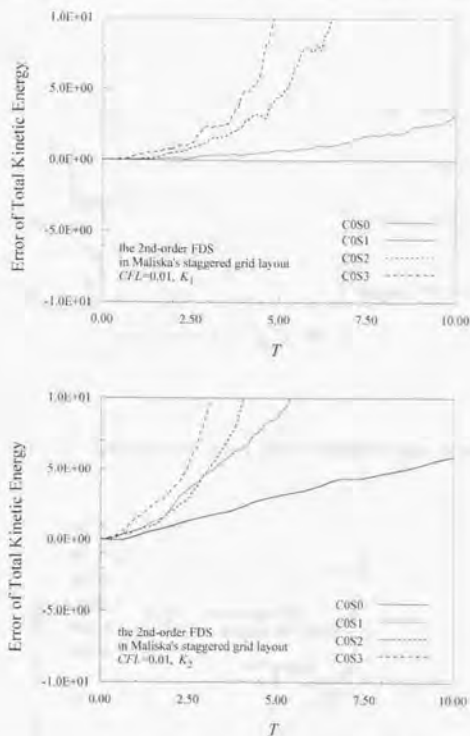


FIGURE 4.2.5 The error of total kinetic energy by the second order finite difference scheme in Maliska's staggered grid layout in case of uniform nonorthogonal grids.

$$u_2^* = u_2^{k-1} + J\Delta t \left[ (\text{Conv.} - M2)_2 - (\text{Visc.} - M2)_2 - (\text{Pres.} - M2)_2 \right] \quad (4.2.12)$$

式(4.2.7)中の圧力項は、式(2.5.2)を展開して、次式から計算される。

$$(\text{Pres.} - M2)_2 = \frac{\delta_1}{\delta_1 \xi_1} \left( \frac{1}{J} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} p \right) + \frac{\delta_1}{\delta_1 \xi_2} \left( \frac{1}{J} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} p \right) = \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \frac{\delta_1 p}{\delta_1 \xi_1} + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \frac{\delta_1 p}{\delta_1 \xi_2} \quad (4.2.13)$$

式(4.2.13)中の右辺は、第1項の計算は問題ないが、第2項の計算では圧力が定義されていないノード点N, Pにおける圧力が必要となり、任意の補間を必要とする。ここで、図4.2.6において、式(4.2.13)中のメトリックは、

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \ll \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2}$$

であるので、式(3.2.13)中の右辺においては、(第1項) ≪ (第2項)となる。従って、一般的に

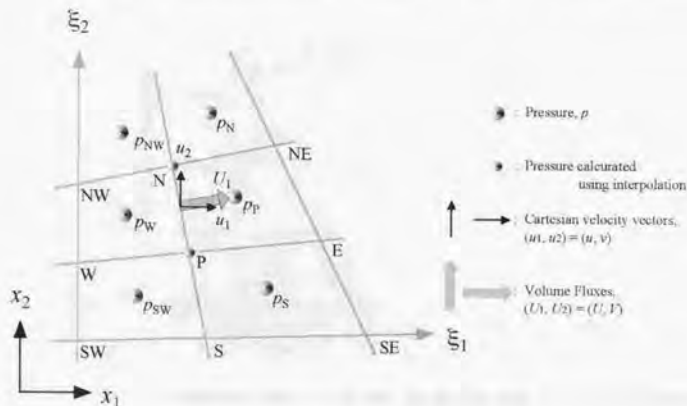


FIGURE 4.2.6 Computation of volume fluxes in Maliska's staggered grid layout.

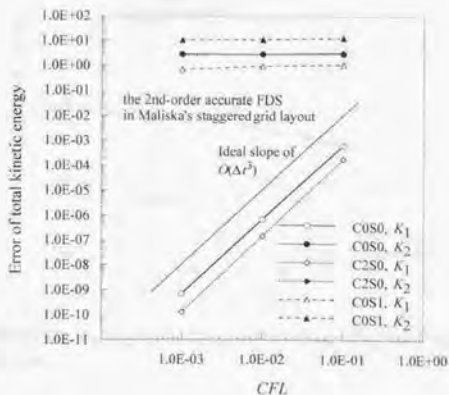


FIGURE 4.2.7 The error of total kinetic energy by the second-order accurate finite difference scheme in Maliska's staggered grid layout as a function of Courant number.

は、セル界面に接する直交速度成分は、圧力項の離散化式において明示されない補間を必要とする項が他の項よりも支配的となり、保存特性に問題を生じることがわかる。また、セル界面に接する直交速度成分は、圧力のカップリングに関しても問題があるため、振動が発生しやすい。

次に、図4.2.7に、Maliskaのスタガード格子系における2次精度一般座標系差分スキーム

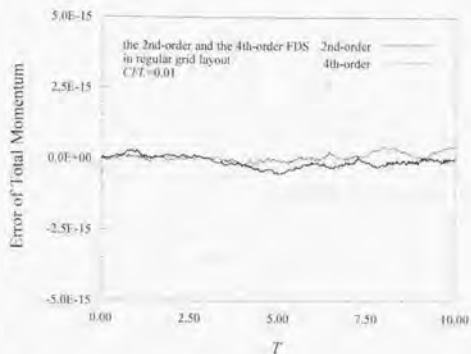


FIGURE 4.2.8 The error of total momentum by the second-order and the forth-order accurate finite difference scheme in regular grid layout.

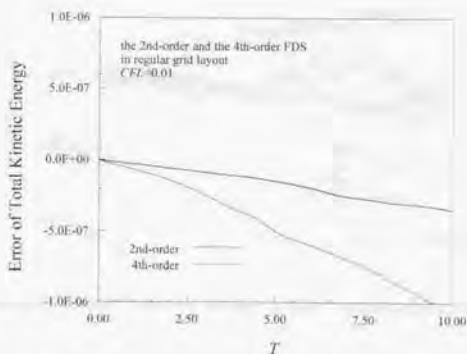


FIGURE 4.2.9 The error of total kinetic energy by the second-order and the forth-order accurate finite difference scheme in regular grid layout.

の場合、運動エネルギー総量の誤差の時間平均絶対値のクーラン数に対する変化を示す。直交格子の場合、 $K_1$ の保存特性の誤差は、時間進行法の精度に依存して $O(\Delta t^2)$ 比例して減少している。従って、格子が直交していれば、本来のスタガード格子系差分スキームは、運動エネルギーの保存特性が適切である。

#### 4.2.3 レギュラ格子系差分スキームの保存特性

一般座標系における2次精度および4次精度のレギュラ格子系差分スキームによる運動量および運動エネルギー総量の誤差の時間変化を図4.2.8および図4.2.9に示す。図4.2.8において、等間隔直交格子(COS0)の場合、運動量の保存特性の誤差は、2次精度および4次精度と

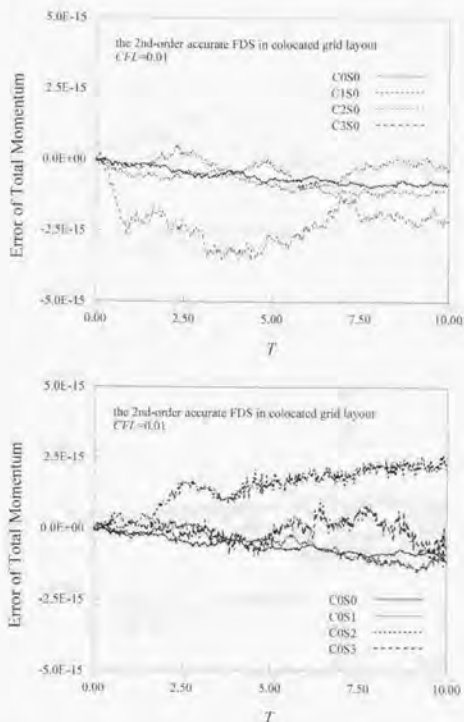


FIGURE 4.2.10 The error of total momentum by the second-order accurate finite difference scheme in colocated grid layout.

もに倍精度計算の丸め誤差  $O(10^{-15})$  程度であり、運動量の保存特性は厳密である。また、図 4.2.9 において、等間隔直交格子(COS0)の場合、運動エネルギーの保存特性の誤差は、2次精度4次精度ともに  $10^6$  オーダーと非常に小さく、実際の計算上、許容範囲内である。しかし、残念ながら、レギュラ格子系差分スキームの場合、計算格子が不等間隔の場合(CnS0,  $n=1\sim 3$ )や非直交である場合(COSn,  $n=1\sim 3$ )、開始から数ステップで計算が発散してしまった。この問題は、古くから知られていて、レギュラ格子系においてはたとえ速度場が連続の式を満たしていても圧力場の振動を許してしまうことに起因して発生する。従って、レギュラ格子系差分スキームでは、実際の乱流計算には適用が難しい。

#### 4.2.4 一般座標系におけるコロケート格子系差分スキームの保存特性

一般座標系における2次精度のコロケート格子系および修正コロケート格子系差分スキームによる運動量総量の誤差の時間変化を図4.2.10～11に示す。運動量の保存特性の誤差は、コロケート格子系差分スキーム、修正コロケート格子系差分スキームともに、計算格子の不



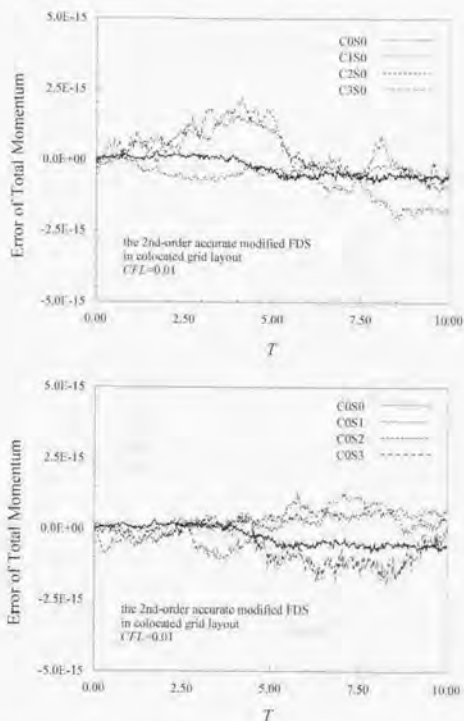


FIGURE 4.2.11 The error of total momentum by the second-order accurate modified finite difference scheme in collocated grid layout.

等間隔、非直交性びよらず、倍精度計算の丸め誤差  $O(10^{-13})$  程度である。従って、コロケート格子系差分スキームおよび修正コロケート格子系差分スキームにおいては、運動量の保存特性は、計算格子が等間隔非直交の任意の一般座標系差分スキームにおいて厳密である。

次に、一般座標系における2次精度のコロケート格子系および修正コロケート格子系差分スキームによる運動エネルギー総量の誤差の時間変化を図4.2.12～13に示す。図4.2.12～13の縦軸のスケールに注意すると、運動エネルギーの保存特性の誤差は、コロケート格子系差分スキームの場合  $10^0$  オーダーであるのに対し、修正コロケート格子系差分スキームでは、 $10^5$  オーダーと大きく改善されている。また、修正コロケート格子系差分スキームの場合、直交不等間隔、等間隔非直交のいずれの計算格子においても、運動エネルギーの保存特性の誤差は、等間隔直交とはほぼ同程度で許容範囲内である。

一般座標系における2次精度の従来のコロケート格子系および修正コロケート格子系差分スキームの場合の、運動エネルギー総量の誤差の時間平均絶対値のクーラン数に対する変化

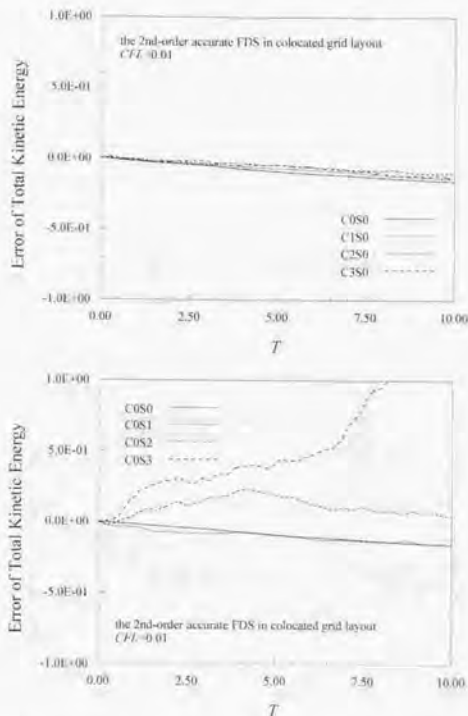


FIGURE 4.2.12 The error of total kinetic energy by the second-order accurate finite difference scheme in collocated grid layout.

を図4.2.14に示す。また、図4.2.15には、同計算における式(2.5.34)で表されるレギュラー格子系における連続の式の絶対値の最大値の時間平均値  $\left|(\text{Cont.} - \text{R2})\right|_{\max}$  のクーラン数に対する変化が示されている。図4.2.15において、修正コロケート格子系差分スキームの場合、 $\left|(\text{Cont.} - \text{R2})\right|_{\max}$  が  $O(\Delta t^2)$  に比例して減少していることに伴い、図4.2.14において、運動エネルギーの保存特性が  $O(\Delta t^2)$  に改善されていることがわかる。また、修正コロケート格子系差分スキームの運動エネルギー保存特性の誤差は、不等間隔直交、等間隔非直交のいずれの計算格子においても同様に  $O(\Delta t^2)$  である。従って、第2章で構成された一般座標系における修正コロケート格子系差分スキームは、森西(1998a, b)より提案された等間隔正規直交座標系における修正コロケート格子系差分スキームから適切に一般座標系に拡張されていることがわかる。図4.2.14には、空間4次精度の修正コロケート格子系における、運動エネルギー総量の誤差の時間平均絶対値のクーラン数に対する変化を示す。4次精度の場合も、2次精度の場合と同様に運動エネルギーの保存特性は、ほぼ  $O(\Delta t^2)$  となり改善されている。

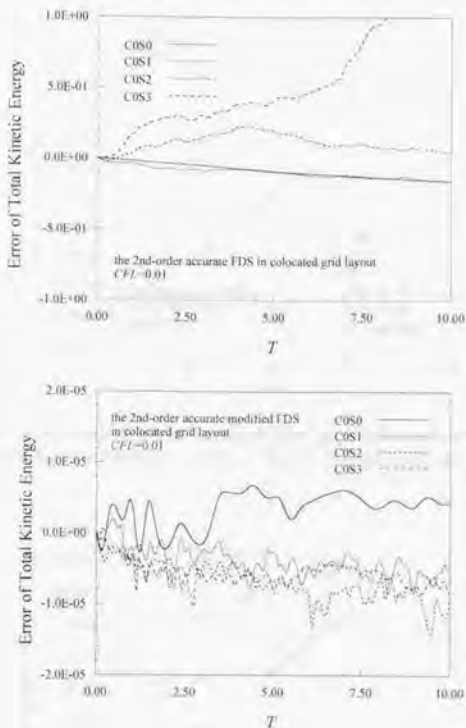


FIGURE 4.2.13 The error of total kinetic energy by the second-order accurate modified finite difference scheme in collocated grid layout.

### 4.3 運動エネルギー保存型一般座標系差分スキームのチャンネル内乱流への適用

#### 4.3.1 数値計算方法概要

流れ場の概要を図4.3.1に示す。  $x, y, z$  はそれぞれ流れ方向、壁に垂直方向およびスパン方向を表し、計算領域は  $x, y, z$  方向にそれぞれ、  $\pi \times H \times \pi/2$  である。ここでは、計算スキームの影響のみを調査するために、SGSモデルは使用しない。レイノルズ数は、Kim *et al.* (1987), Mansour *et al.* (1988) および Horiuti (1992) のスペクトル法によるDNS計算に対応させ、チャンネル幅  $H$  と壁面摩擦速度  $u_\tau$  を用いた Reynolds 数  $Re_\tau$  で 360 である。計算格子は、DNSとしては非常に粗い格子点数 ( $33 \times 65 \times 33$ ) である。不等間隔直交格子に加え、格子の非直交性の影響を調べるため、図4.3.2に示されるような壁方向にひずみを持つ不等間隔非直

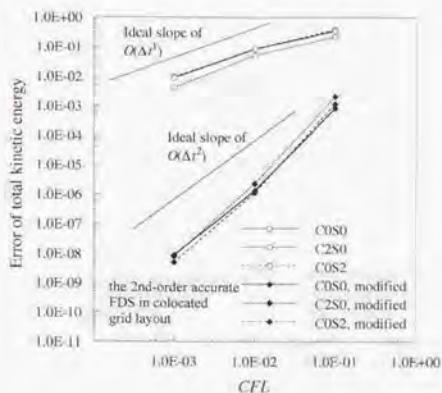


FIGURE 4.2.14 The error of total kinetic energy by the second-order accurate finite difference schemes in the collocated and the modified collocated grid layouts as a function of Courant number.

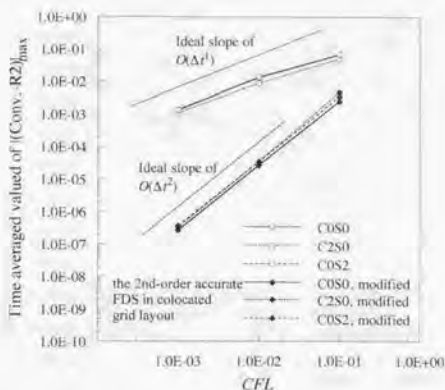


FIGURE 4.2.15 The time averaged value of  $|(Conv - R2)|_{max}$  by the second-order accurate finite difference schemes in the collocated and the modified collocated grid layouts as a function of Courant number.

交格子を使用した。直交格子，非直交格子において，1次元補間関数はともに  $\tanh$  関数が使用されているが，壁からの第1格子点の壁座標  $y'$  はそれぞれ， $y' = 0.45$ ， $y' = 1.0$  と異なっている。

時間進行法は，対流項に2次精度 Adams-Bashforth 法，拡散項に Crank-Nicolson スキームを用いた半陰解法である。時間進行法に関しては，Runge-Kutta スキームと Crank-Nicolson スキームを組み合わせた低記憶容量3段階部分3次精度半陰解スキーム (Splart 1991) も試し，1

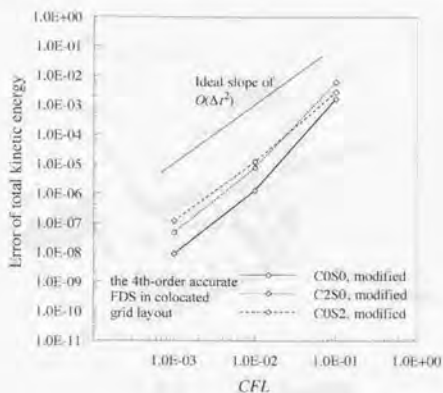


FIGURE 4.2.16 The error of total kinetic energy by the fourth-order accurate finite difference schemes in the collocated and the modified collocated grid layouts as a function of Courant number.

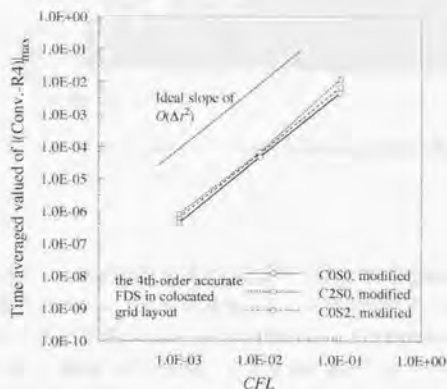


FIGURE 4.2.16 The error of total kinetic energy by the fourth-order accurate finite difference schemes in the collocated and the modified collocated grid layouts as a function of Courant number.

タイムステップ当たりの計算時間が約3倍に増加するものの、クーラン数は約2倍大きくとることが出来ることがわかった。しかし、特に修正コロケート格子系差分スキームの場合は、時間刻みを小さくした方がレギュラ格子系差分スキームの連続の式(Cont.-R2)の残差が小さくなり保存特性が良くなるので、最終的には、対流項に2次精度 Adams-Bashforth 法、拡散項に Crank-Nicolson スキームを用いた半陰解法を採用した。時間間隔  $dt$  は、全ての計算ケー

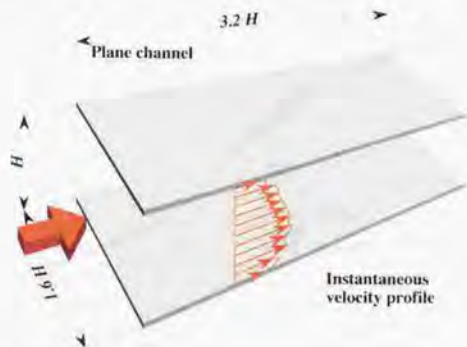


FIGURE 4.3.1 Plane channel flow.

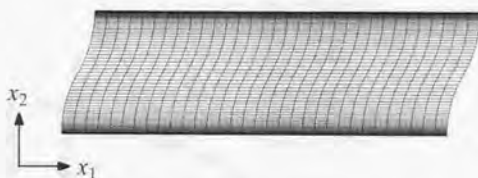


FIGURE 4.3.2 Nonorthogonal grid used for computation of plane channel flow.

スにおいて0.0025である。空間離散化は一般座標系におけるMaliskaのスタガード格子系差分スキームおよび修正コロケート格子系差分スキームを使用した。対流項の型は、運動量を厳密に保存する発散型で離散化されている。圧力Poisson方程式はBi-CGStab法(van der Vorst 1992; 藤野 1991)を用い、残差ベクトルの大きさが $10^{-4}$ 以下になるまで収束させ、その時の連続の式の残差の最大値は $10^{-7}$ 程度であった。また、修正コロケート格子系差分スキームの場合、レギュラ格子系における連続の式(Cont.-R2)の残差の最大値は $10^{-6}$ 程度であり、圧力項の運動エネルギー保存誤差は実際の計算上許容範囲内であった。

#### 4.3.2 計算結果及び考察

##### 4.3.2(a) 格子系の違いの影響

チャンネル内乱流の計算において、スタガード格子系とコロケート格子系差分スキームの計算結果の比較は、佐竹(1994)、大岡ら(1997)、梶島ら(1997a~b)、森西(1998a~b)によって行われている。佐竹(1994)は、補間法(梶島 1993)の概念をコロケート格子系に適用したスキームで低Reynolds数におけるMinimal flow unit(Jiménez and Moin, 1991)の空間4次精度

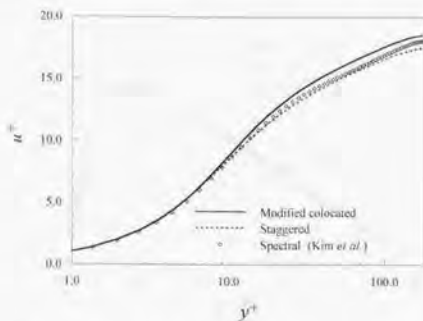


FIGURE 4.3.3 Time averaged streamwise velocity by the second-order accurate modified finite difference scheme in colocated grid layout and the second-order accurate finite difference scheme in Maliska's staggered grid layout.

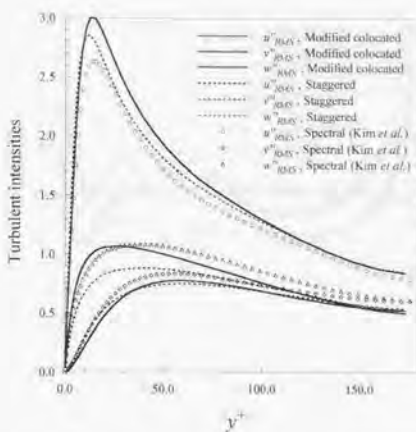


FIGURE 4.3.4 Time averaged velocity fluctuations by the second-order accurate modified finite difference scheme in colocated grid layout and the second-order accurate finite difference scheme in Maliska's staggered grid layout.

の計算を行い、整合性を考慮して離散化することによって十分良い結果が得られることを報告している。同様に、梶島ら(1997a~b)は、4次精度のコロケート格子系差分スキームを用いて、チャンネル内乱流のDNSおよびLESを行い、比較的粗い計算格子を用いた場合、スタガード格子系の方がややすペクトル法の結果に近いが、コロケート格子系では解像度の影響を受けやすく差分精度の向上による改善効果が大きいことを報告している。これらに対し、大岡ら(1997)は、SGSモデルとしてSmagorinskyモデルを用いたチャンネル内乱流のLESをスタガードおよびコロケート格子系で行い、コロケート格子系の場合、流れ方向平均流速、

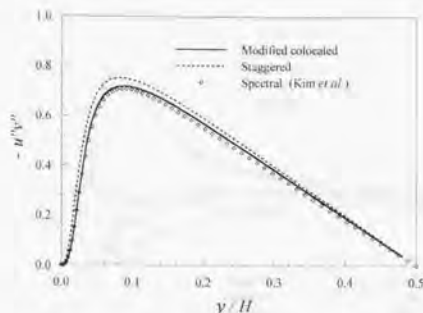


FIGURE 4.3.5 Reynolds shear stress by the second-order accurate modified finite difference scheme in collocated grid layout and the second-order accurate finite difference scheme in Maliska's staggered grid layout.

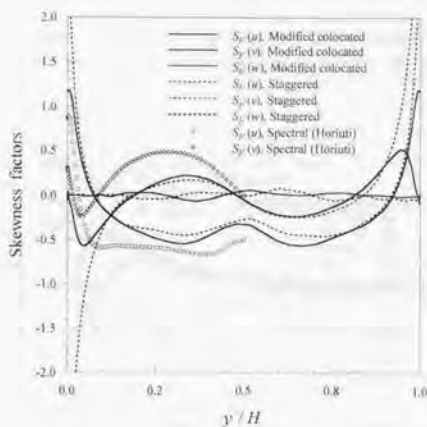


FIGURE 4.3.6 Skewness factors by the second-order accurate modified finite difference scheme in collocated grid layout and the second-order accurate finite difference scheme in Maliska's staggered grid layout.

レイノルズ応力および圧力ひずみ相関項の分布がスタガード格子系やスペクトル法の計算結果と比較して大きく異なり、その原因の一つとして、コロケート格子系における運動エネルギーの非保存性を指摘している。また、森西(1998a～b)は、コロケート格子系差分スキームにおいて、圧力項の運動エネルギー保存特性に誤差が含まれることを明らかにし、運動エネルギー保存特性を改善する修正コロケート格子系差分スキームを提案した。この修正アルゴリズムを適用することにより、流れ方向平均流速及び乱流強度の分布に大きな効果は現れないが、レギュラー格子系における連続の式の計算精度が向上することにより、レイノルズ応



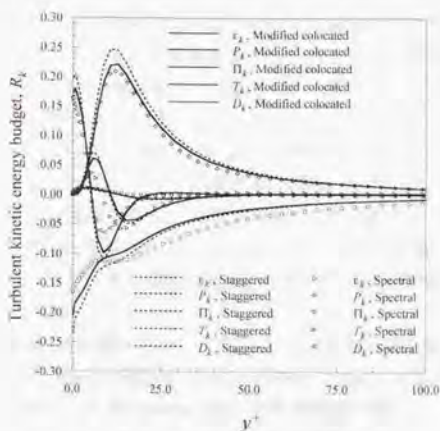


FIGURE 4.3.7 Terms in the budget of the turbulence kinetic energy by the second-order accurate modified finite difference scheme in collocated grid layout and the second-order accurate finite difference scheme in Maliska's staggered grid layout.

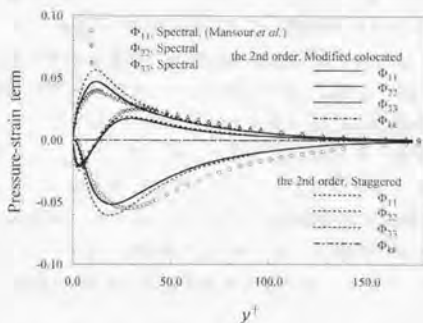


FIGURE 4.3.8 Pressure-strain terms in Reynolds stress budgets by the second-order accurate modified finite difference scheme in collocated grid layout and the second-order accurate finite difference scheme in Maliska's staggered grid layout.

力の輸送方程式中の圧力ひずみ相関項の計算精度が大きく向上し、乱流統計量の信頼性が向上することを明らかにしている。また、森西(1998b)は、コロケート格子系とスタガード格子系との間の計算結果の差異については、コロケート格子系差分スキームの運動エネルギー保存特性の欠如が原因ではなく、速度の定義点の違いが主な原因であることを示している。

第2章で構成された一般座標系における修正コロケート格子系差分スキームとMaliskaのスタガード格子系差分スキームの計算結果の比較を図4.3.3～8に示す。ここでは、格子系の

違いのみに注目するため、両格子系において、直交不等間隔格子が使用され、差分スキームの空間精度は全て2次としている。計算結果として、流れ方向の時間平均速度分布、乱流強度、Reynoldsせん断応力、Skewness factor、乱流エネルギー $k$ の収支およびReynolds応力の収支式中の圧力ひずみ相関項がそれぞれ図4.3.3～8に示されている。

図4.3.3および図4.3.4において、修正コロケート格子系とスタガード格子系差分スキームの計算結果を比較すると、修正コロケート格子系の場合、平均流速が対数領域において増加するとともに流れ方向の乱流強度のピーク値が増加して、DNSデータとの相関が悪くなっている。一方、スパン方向乱流強度は、 $y^+ = 5 \sim 100$ 付近でかなり増加して改善されている。壁方向の乱流強度に関しては、大きな差異はない。これらは従来の計算結果とほぼ同じ傾向である(森西 1996c; 大岡 1997)。

図4.3.6のSkewness factorに関しては、DNSとしてはかなり粗い計算格子を使用しているため、両格子系において、DNSの結果との対応が悪い。特にスタガード格子系の場合、壁付近での流れ方向および壁方向のSkewness factorの計算精度が低い。しかし、チャンネル中央部では、スタガード格子系および修正コロケート格子系差分スキームの計算結果には大きな差異は認められない。これは、直交不等間隔格子の場合、両格子系において、運動エネルギーが適切に保存されているためであると考えられる。こうした、格子系の違いによる計算結果の差異の減少は、乱流エネルギー $k$ の収支およびReynolds応力の収支式中の圧力ひずみ相関項の分布にも観察される。特に、レイノルズ応力収支式中の圧力ひずみ相関項の対角成分 $\phi_{11}$ 、 $\phi_{22}$ 、 $\phi_{33}$ およびそのトレース $\phi_{kk}$ の分布に関しては、従来のコロケート格子系差分スキームでは、レギュラー格子系における連続の式(Cont.-R2)が満たされないことに起因して、圧力ひずみ相関項の計算精度が非常に低かった(大岡 1997)。しかし、図4.3.8において、修正コロケート格子系差分スキームでは、レギュラー格子系における連続の式の残差が時間2次精度に改善されるのに伴い、圧力ひずみ相関項の計算精度が大きく改善され、スタガード格子系差分スキームの結果と大きな差異は認められない。また、コロケート格子系差分スキームの場合、トレース $\phi_{kk}$ の残差がゼロにならないという問題があったが、修正コロケート格子系差分スキームの場合、トレース $\phi_{kk}$ の残差は $10^{-6}$ オーダーと非常に小さく、統計量の信頼性が向上していることは、森西(1998b)と同様な結果が得られている。

#### 4.3.2(b) 計算格子の不等間隔非直交性の影響

計算格子の非直交性が計算結果に与える影響を明らかにするために、Maliskaのスタガード格子系差分スキームおよび修正コロケート格子系差分スキームのそれぞれにおいて、計算格子が直交である場合と壁方向にひずみを持つ非直交である場合の計算結果の比較を図4.3.9～14および図4.3.15～20に示す。ここで、差分スキームの空間精度は全て2次である。計算結果として、流れ方向の時間平均速度分布、乱流強度、Reynoldsせん断応力、Skewness factor、乱流エネルギー $k$ の収支およびReynolds応力の収支式中の圧力ひずみ相関項が、それぞれ図4.3.9～14および図4.3.15～20に示されている。

Maliskaのスタガード格子系差分スキームの場合、図4.3.9および図4.3.10において、計算格子が非直交となることにより、流れ方向平均流速がチャンネル中央部において僅かに増加

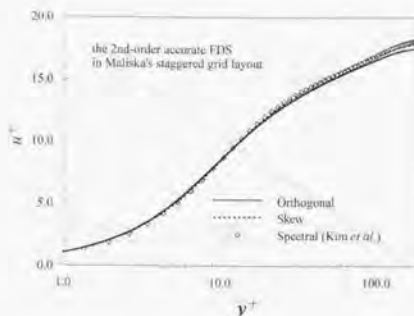


FIGURE 4.3.9 Time averaged streamwise velocity by the second-order accurate finite difference scheme in Maliska's staggered grid layout with the orthogonal and the nonorthogonal computational grids.

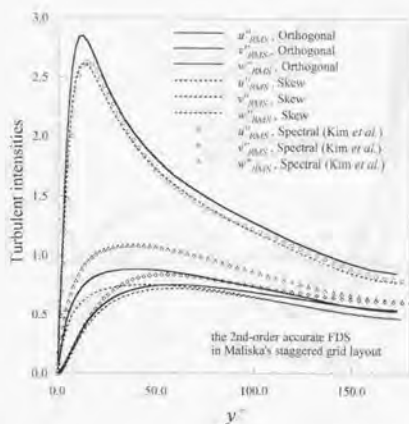


FIGURE 4.3.10 Time averaged velocity fluctuation by the second-order accurate finite difference scheme in Maliska's staggered grid layout with the orthogonal and the nonorthogonal computational grids.

するとともに、流れ方向およびスパン方向の乱流強度が大きく減少している。これは、図 4.3.14 において、レイノルズ応力取支式中の圧力ひずみ相関項の対角成分  $\phi_{11}$ ,  $\phi_{22}$ ,  $\phi_{33}$  の分布が、計算格子の非直交性に大きく影響され、 $\phi_{11}$ ,  $\phi_{22}$ ,  $\phi_{33}$  の絶対値が大きく減少していることと関係していると考えられる。この原因の一つとして、第3章の保存特性の検証において明らかになったように、計算格子が非直交である場合、Maliskaのスタガード格子系差分スキームは運動エネルギーの保存特性が適切ではなくなってしまうことが考えられる。ただし、Maliskaのスタガード格子系差分スキームにおいて、連続の式(Cont.-M2)は精度良く計算さ

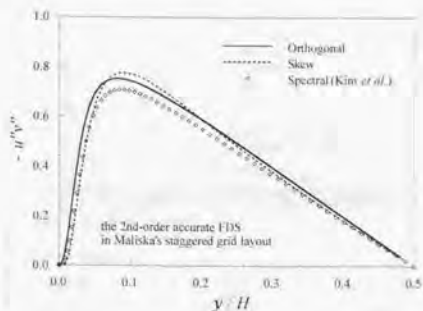


FIGURE 4.3.11 Reynolds shear stress by the second-order accurate finite difference scheme in Maliska's staggered grid layout with the orthogonal and the nonorthogonal computational grids.

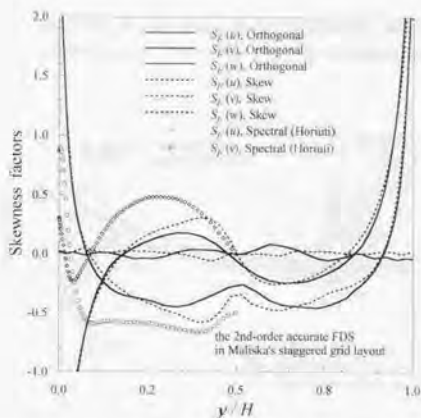


FIGURE 4.3.12 Skewness factors by the second-order accurate finite difference scheme in Maliska's staggered grid layout with the orthogonal and the nonorthogonal computational grids.

れているため、計算格子が直交、非直交のいずれの場合においても、圧力ひずみ相関項の対角成分のトレース $\phi_{kk}$ の残差の最大値は、 $10^4$ オーダーであり実際の計算上許容範囲内である。

一方、修正コロケート格子系差分スキームの場合、図4.3.15および4.3.16において、流れ方向の時間平均速度分布、乱れ強度の全成分は、計算格子の不等間隔および非直交性の影響をあまり受けず、両計算格子において、ほとんど一致する結果が得られている。また、図4.3.18～20において、Skewness factor、乱流エネルギー $k$ の収支およびReynolds応力の収支式中の圧力ひずみ相関項の分布も計算格子の不等間隔および非直交性の影響をほとんど受け

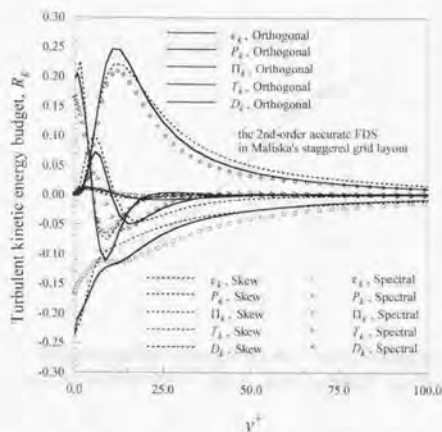


FIGURE 4.3.13 Terms in the budget of the turbulent kinetic energy by the second-order accurate finite difference scheme in Maliska's staggered grid layout with the orthogonal and the nonorthogonal computational grids.

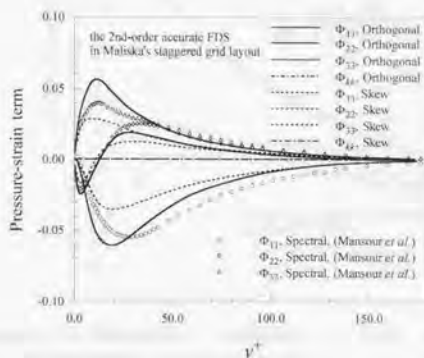


FIGURE 4.3.14 Pressure-strain terms in Reynolds stress budgets by the second-order accurate finite difference scheme in Maliska's staggered grid layout with the orthogonal and the nonorthogonal computational grids.

ていない。これは、修正コロケート格子系差分スキームの場合、計算格子の非直交に関わらず、常に運動エネルギーを適切に保存するためであると考えられる。また、図4.3.20において、計算格子が直交、非直交のいずれの場合でも、圧力ひずみ相関項の対角成分のトレース  $\phi_{kk}$  の残差の最大値は、 $10^{-6}$  オーダーである。

空間4次精度の修正コロケート格子系差分スキームにおいて、計算格子が直交である場合と壁方向にひずみを持つ非直交である場合の計算結果の比較を図4.3.21～26に示す。空間4

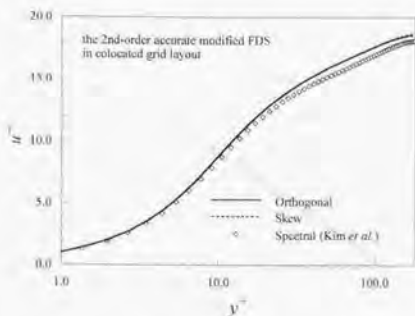


FIGURE 4.3.15 Time averaged streamwise velocity by the second-order accurate modified finite difference scheme in colocated grid layout with the orthogonal and the nonorthogonal computational grids.

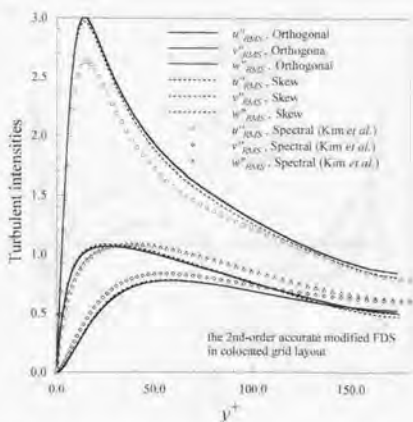


FIGURE 4.3.16 Time averaged velocity fluctuation by the second-order accurate modified finite difference scheme in colocated grid layout with the orthogonal and the nonorthogonal computational grids.

次精度の修正コロケート格子系差分スキームの場合も、空間2次精度の場合と同様に、計算格子の非直交性が、流れ方向の時間平均速度分布、乱れ強度、Skewness factor、乱流エネルギー $k$ の収支およびReynolds応力の収支式中の圧力ひずみ相関項の分布にあまり大きく影響していない。一般的に、数値解析結果の信頼性を示すためには、計算格子に対する解の依存性がないということを証明する必要がある。これまでは、主として格子点数、つまり計算格子の解像度が格子依存性として取り扱われているが、一般座標系においては、計算格子の不等間隔非直交性に対する依存性についても計算格子依存性として考慮しなければならない。

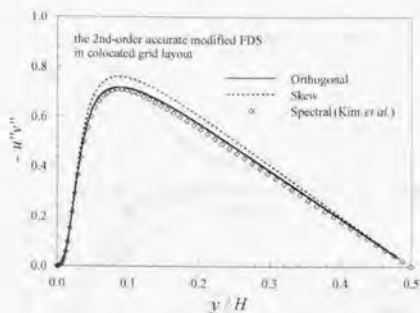


FIGURE 4.3.17 Reynolds shear stress by the second-order accurate modified finite difference scheme in collocated grid layout with the orthogonal and the nonorthogonal computational grids.

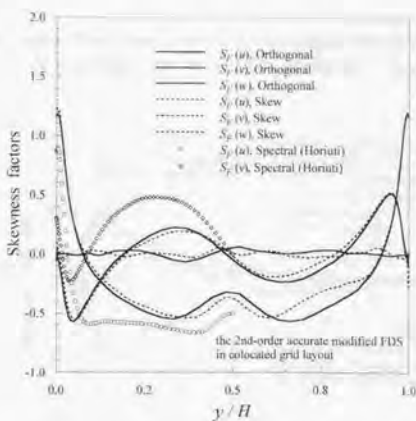


FIGURE 4.3.18 Skewness factors by the second-order accurate modified finite difference scheme in collocated grid layout with the orthogonal and the nonorthogonal computational grids.

従って、計算格子の不等間隔・非直交性への依存性が小さいことが証明された修正コロケート格子系差分スキームが、一般座標系における乱流数値計算手法として優れた特性を持つことがわかる。

以上のような結果から、本研究では、修正コロケート格子系差分スキームを一般座標系における乱流場解析に適した差分スキームとして推奨する。

#### 4.3.3(b) 差分スキームの空間精度の影響

差分スキームの空間精度の影響を明らかにするために、修正コロケート構成系差分スキ-

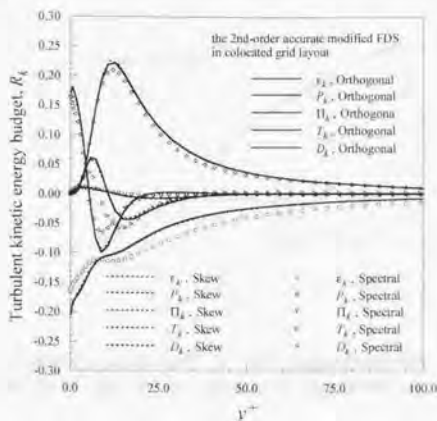


FIGURE 4.3.19 Terms in the budget of the turbulence kinetic energy by the second-order accurate modified finite difference scheme in collocated grid layout with the orthogonal and the nonorthogonal computational grids.

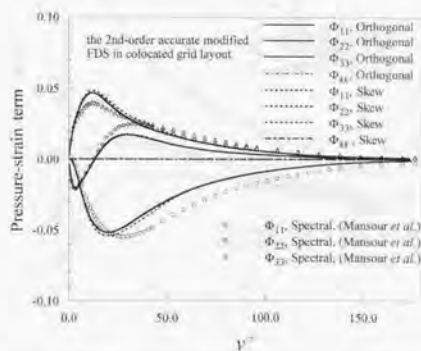


FIGURE 4.3.20 Pressure-strain terms in Reynolds stress budgets by the second-order accurate modified finite difference scheme in collocated grid layout with the orthogonal and the nonorthogonal computational grids.

ムにおいて、空間精度が2次精度の場合と4次精度の場合の比較を図4.3.27～32に示す。計算格子は、いずれの空間精度の計算においても、不等間隔直交であるが、図4.3.5で明らかになったように、計算格子が非直交であってもその影響はほとんどない。計算結果として、流れ方向の時間平均速度分布、乱流強度、Reynoldsせん断応力、Skewness factor、乱流エネルギー $k$ の収支およびReynolds応力の収支式中の圧力ひずみ相関項が、それぞれ図4.3.27～32に示されている。



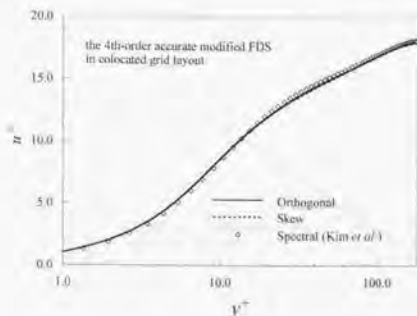


FIGURE 4.3.21 Time averaged streamwise velocity by the fourth-order accurate modified finite difference scheme in colocated grid layout with the orthogonal and the nonorthogonal computational grids.

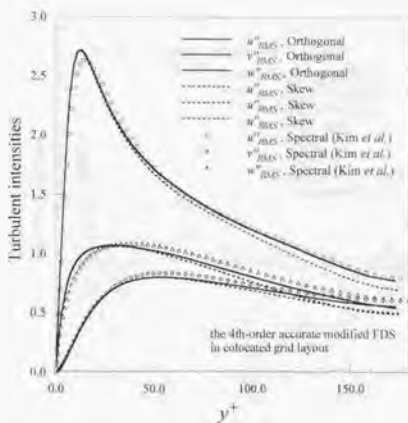


FIGURE 4.3.22 Time averaged velocity fluctuation by the fourth-order accurate modified finite difference scheme in colocated grid layout with the orthogonal and the nonorthogonal computational grids.

図4.2.27および図4.3.28において、空間精度が4次精度に改善されることにより、流れ方向平均流速が対数領域において減少し、さらには、流れ方向の乱流強のピーク値が大きく減少するとともに、壁方向乱流強度のピーク値がわずかに増加している。これらは、いずれもDNSの計算結果により近くなる傾向であり、改善が見られる。本計算で使用された計算格子の粗さを考慮すると、空間4次精度の修正コロケート格子系差分スキームの場合の平均流速および乱流強度のDNSデータとの差異は、ほぼ許容範囲内である。図4.3.30の Skewness factor に関しては、空間精度の4次精度化によって大きな改善は見られないが、壁方向成分

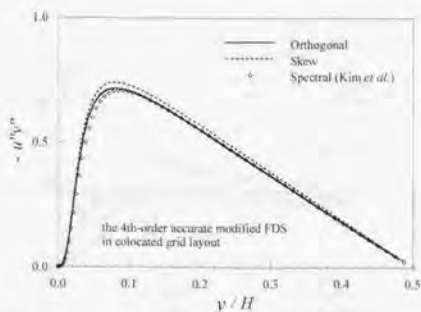


FIGURE 4.3.23 Reynolds shear stress by the fourth-order accurate modified finite difference scheme in collocated grid layout with the orthogonal and the nonorthogonal computational grids.

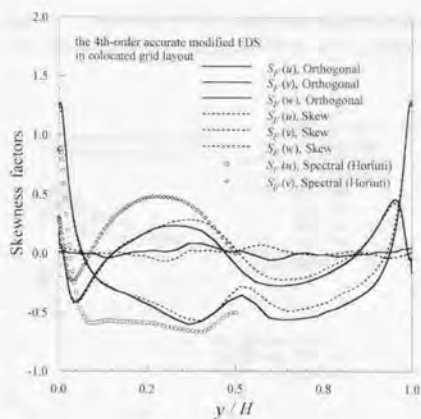


FIGURE 4.3.24 Skewness factors by the fourth-order accurate modified finite difference scheme in collocated grid layout with the orthogonal and the nonorthogonal computational grids.

が壁付近の極大値の絶対値が僅かに減少し、DNS データに近づく傾向を示している。一方、図4.3.31において、乱流エネルギー  $k$  の収支は空間精度の高次精度化の影響がほとんど見られない。圧力ひずみ相関項対角成分の分布も空間精度の高次精度化の影響をあまり受けていないが、 $y^+ = 10 \sim 50$ において、僅かに差異が観察される。この僅かな差異が、乱流強度の改善をもたらしたものと考えられる。

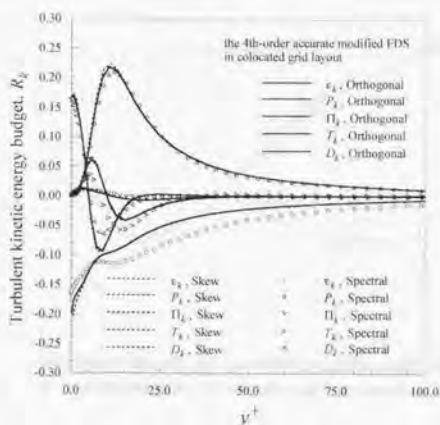


FIGURE 4.3.25 Terms in the budget of the turbulence kinetic energy by the fourth-order accurate modified finite difference scheme in collocated grid layout with the orthogonal and the nonorthogonal computational grids.

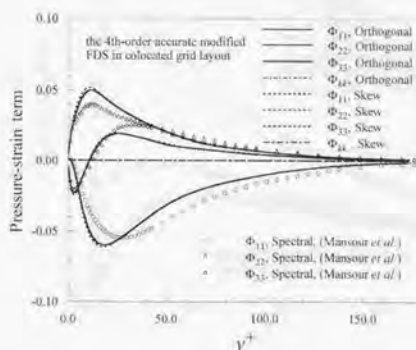


FIGURE 4.3.26 Pressure-strain terms in Reynolds stress budgets by the fourth-order accurate modified finite difference scheme in collocated grid layout with the orthogonal and the nonorthogonal computational grids.

#### 4.3.3(c) 修正コロケート格子系差分スキームの安定性

コロケート格子系差分スキームは、レギュラー格子系差分スキームの計算安定性を向上させるためにスタガード格子系差分スキームの考え方を導入した中間的な格子系差分スキームとして解釈できる。一方、修正コロケート格子系差分スキームは、コロケート格子系差分スキームに、レギュラー格子系差分スキームと同様な補間および差分を用いて Van Kan 修正を導入しているため、よりレギュラー格子系差分スキームに近い形で定式化されている。従っ

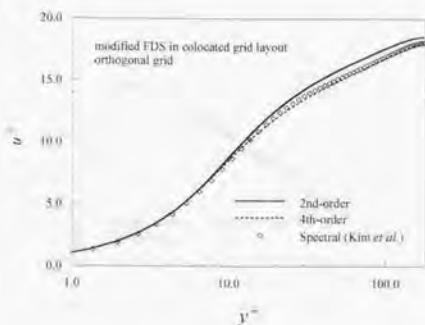


FIGURE 4.3.27 Time averaged streamwise velocity by the second-order and the fourth-order accurate modified finite difference schemes in collocated grid layout with the orthogonal computational grid.

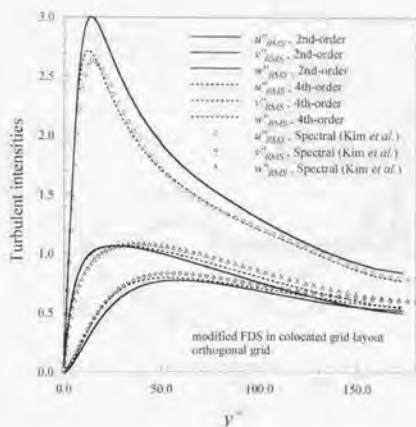


FIGURE 4.3.28 Time averaged velocity fluctuation by the second-order and the fourth-order accurate modified finite difference schemes in collocated grid layout with the orthogonal computational grid.

て、レギュラー格子系差分スキームの計算同様に、圧力場に数値振動が発生する可能性が考えられる。しかし、本章におけるチャンネル内乱流の計算では、明らかな圧力振動は観察されなかった。

修正コロケート格子系差分スキームの安定性を確認するために、図4.3.33に修正コロケート格子系差分スキームと Maliska のスタガード格子系差分スキームの場合の各速度成分の流れ方向1次元スペクトルを示す。この流れ方向1次元スペクトルは、計算が十分発達したと

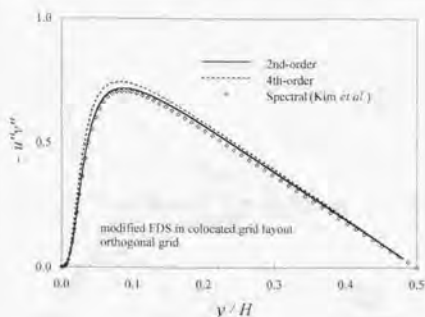


FIGURE 4.3.29 Reynolds shear stress by the second-order and the fourth-order accurate modified finite difference schemes in collocated grid layout with the orthogonal computational grid.

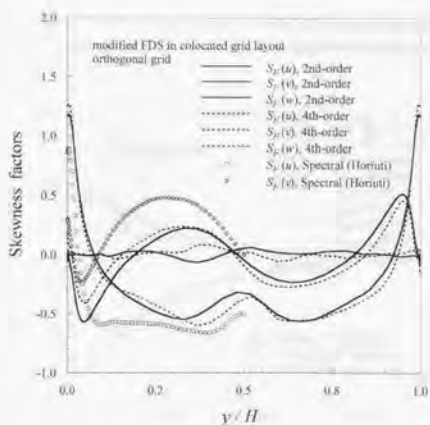


FIGURE 4.3.30 Skewness factors by the second-order and the fourth-order accurate modified finite difference schemes in collocated grid layout with the orthogonal computational grid.

思われるある適当な時間ステップにおける瞬時の計算結果から求められたものであるため、両格子系の結果は、厳密に一致はしないが、定性的には、壁付近からチャンネル中央部の全領域においてよく一致している。また、修正コロケート格子系差分スキームは、スタガード格子系差分スキームの場合と同様に、高波数において、エネルギーが適切に散逸され、振動による人工的エネルギーが全く生成されていない。従って、修正コロケート格子系差分スキームにおいて、境界条件の取り扱いに注意すれば、スタガード格子系と同様、安定な計算

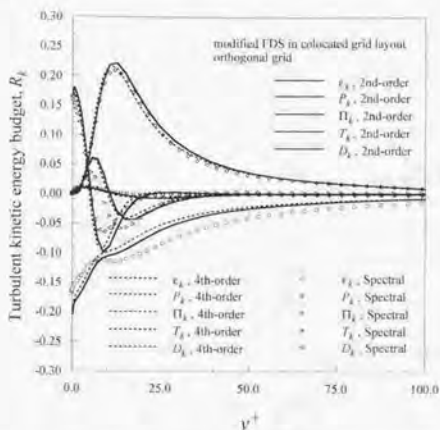


FIGURE 4.3.31 Terms in the budget of the turbulence kinetic energy by the second-order and the fourth-order accurate modified finite difference schemes in collocated grid layout with the orthogonal putational grid.

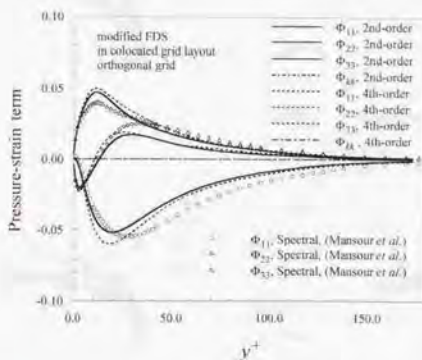


FIGURE 4.3.32 Pressure-strain terms in Reynolds stress budgets by the second-order and the fourth-order accurate modified finite difference schemes in collocated grid layout with the orthogonal putational grid.

が実行可能であることがわかる。

#### 4.4 本章のまとめ

本章では、まず、第2章において構成された一般座標系における Maliska のスタガード格

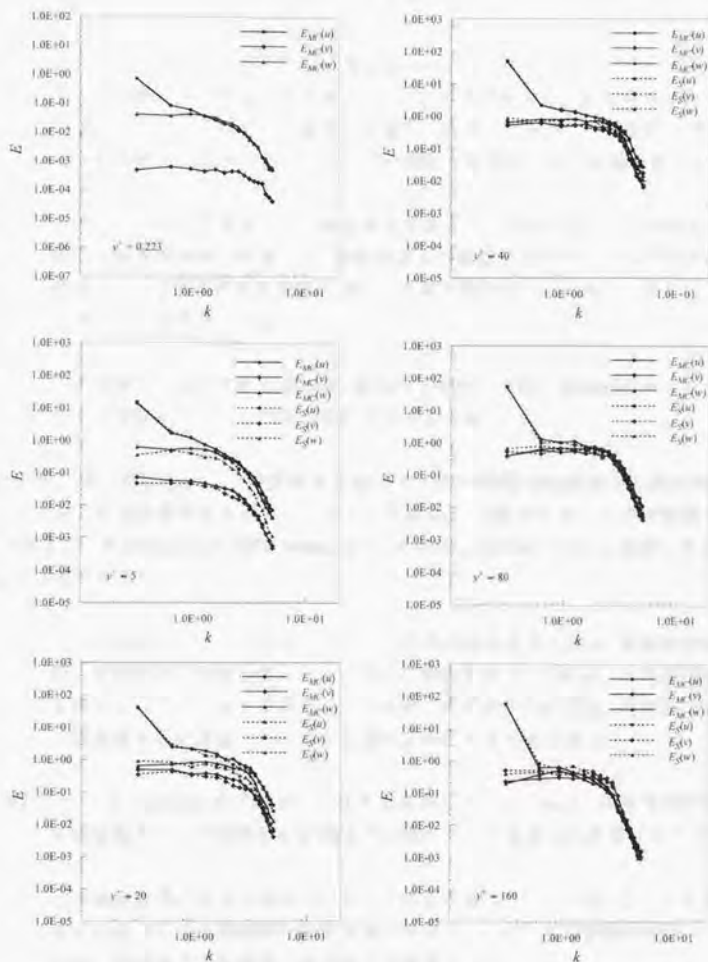


FIGURE 4.3.33 Streamwise one-dimensional spectrum by the second-order accurate modified finite difference scheme in colocated grid layout and the second-order accurate finite difference scheme in Maliska's staggered grid layout.

子系, レギュラ格子系およびコロケート格子系差分スキームの精度および保存特性を数値実験によって検証した, その結果, 以下のような知見が得られた.

1. 不等間隔非直交である物理座標系  $(x, y, z)$  において定義されている基礎方程式系を等間隔直交である計算座標系  $(\xi, \eta, \zeta)$  に座標変換し, 計算座標系で任意精度の差分スキームを利用して離散式を導出し計算した場合, 格子点数を増加させた時の厳密解への収束性という意味での精度は物理座標系でも維持される.
2. 第2章において構成した一般座標系差分スキームの中で, 不等間隔非直交の任意の一般座標系格子において, 運動量および運動エネルギーの保存特性が実際の計算上, はほぼ満足できる精度で適切であると言えるのは, 修正コロケート格子系差分スキームのみである.
3. 計算格子が直交である場合は, 従来のスタガード格子系差分スキームも運動量および運動エネルギーの保存特性が適切である.

また, 第2章で構成された一般座標系差分スキームの実際の乱流場への適用例として, チャンネル幅と壁面摩擦速度を用いたレイノルズ数  $Re_\tau = 180$  のチャンネル内乱流の計算を行い, DNS データ (Kim *et al.* 1987; Mansour *et al.* 1988; Horiuti 1992) と比較した結果, 以下のような知見を得た.

1. 一般座標系における修正コロケート格子系差分スキームは, 計算格子の非直交性, 不等間隔の影響を受けにくい優れた特性を持つ. これは, 一般座標系における修正コロケート格子系差分スキームが, 計算格子の直交性, 等間隔性に関係なく運動量および運動エネルギーを適切に保存するためである.
2. 一方, Maliska のスタガード格子系差分スキームの場合, 流れ方向平均流速や乱流強度といった統計量が計算格子の非直交性に大きく影響されてしまう.
3. 一般座標系における修正コロケート格子系差分スキームは, レイノルズ応力取支式の圧力ひずみ相関項の計算精度が改善され, 統計量の信頼性が向上する. これは, 計算格子が非直交である場合も同様である.
4. 一般座標系における修正コロケート格子系差分スキームは, 境界条件の取り扱いに注意すれば, スタガード格子系差分スキームと同様, 安定な計算が実行可能である.

以上の結果から, 本研究では, 高精度な DNS あるいは LES に適した一般座標系差分スキ-



ムとして、修正コロケート格子系差分スキームを推奨する。

## 謝辞

一般座標系に於けるクーゲル法による  
レベシヨンの定式化

1. はじめに

本論文は、一般座標系に於けるクーゲル法によるレベシヨンの定式化について、その理論的基礎を明らかにし、その数値的安定性を検証するものである。

2. 一般座標系

3. クーゲル法

3.1. 一般座標系に於けるクーゲル法

3.2. 数値的安定性の検証

本論文は、一般座標系に於けるクーゲル法によるレベシヨンの定式化について、その理論的基礎を明らかにし、その数値的安定性を検証するものである。

4. おわりに

本論文は、一般座標系に於けるクーゲル法によるレベシヨンの定式化について、その理論的基礎を明らかにし、その数値的安定性を検証するものである。

本論文は、一般座標系に於けるクーゲル法によるレベシヨンの定式化について、その理論的基礎を明らかにし、その数値的安定性を検証するものである。

## 第5章

# 一般座標系におけるラージエディシミュレーションの定式化

### 5.1 ラージエディシミュレーションの基礎方程式

非圧縮性粘性流れを規定する支配方程式は、連続の式と Navier-Stokes 方程式であり、それぞれ次のように表される。

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (5.1.1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (u_k u_i) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) \quad (5.1.2)$$

ここで、 $\nu$  は動粘性係数 (kinematic viscosity,  $\nu = \mu/\rho$ ,  $\mu$ : 粘性係数,  $\rho$ : 密度) である。式(5.1.2)に  $u_j$  を乗じた式と、式(5.1.2)のインデックス  $i$  を  $j$  に置き換えて  $u_i$  を乗じた式との和をとると、応力  $u_i u_j$  の輸送方程式が導出される。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (u_i u_j) + \frac{\partial}{\partial x_k} (u_k u_i u_j) \\ &= -\frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \frac{p}{\rho} (u_i \delta_{jk} + u_j \delta_{ik}) \right] - \nu \frac{\partial}{\partial x_k} (u_i u_j) + \frac{p}{\rho} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - 2\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (5.1.3)$$

式(5.1.2)に  $u_i$  を乗じて縮約をとることにより、運動エネルギー  $K (= u_i u_i / 2)$  の輸送方程式が導出される。

$$\frac{\partial K}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (u_k \bar{k}) = - \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \frac{p}{\rho} u_i \delta_{ik} - \nu \frac{\partial K}{\partial x_k} \right] - \nu \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \quad (5.1.4)$$

式(5.1.3)において、インデックス  $j$  を  $i$  に置き換え縮約をとり、1/2を乗じることによっても同様に式(5.1.4)が導かれる。

LESにおいて、格子スケール以上の直接計算する成分(GS, Grid Scale または Unresolved scale)とそれ以下の微小スケール成分(SGS, Sub-Grid Scale または Resolved scale)とに分離する空間フィルターが導入される。

$$\bar{f}(x_1, x_2, x_3, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^3 G_i(x_i - x'_i, \Delta_i) f(x'_1, x'_2, x'_3, t) dx'_1 dx'_2 dx'_3 \quad (5.1.5)$$

ここで、 $G(x_i - x'_i, \Delta_i)$  はフィルター関数であり、 $\Delta_i$  はフィルター関数の特性長さでフィルター幅と呼ばれる。上式をフーリエ変換し、スペクトル空間で考えると、

$$\widehat{\bar{f}}(\mathbf{k}, t) = \widehat{G}(\mathbf{k}) \widehat{f}(\mathbf{k}, t) \quad (5.1.6)$$

となり、フィルター操作は、波数空間で変数  $f$  のスペクトルを修正する操作であることがわかる。

LESにおいてフィルター関数  $G(x_i - x'_i, \Delta_i)$  としては、Gaussian フィルター、Sharp cutoff フィルターおよび Top-hat フィルターがよく用いられている。

#### (a) Gaussian フィルター

$$G(x_i - x'_i, \Delta_i) = \sqrt{\frac{6}{\pi \Delta_i^2}} \exp \left\{ - \frac{6(x_i - x'_i)^2}{\Delta_i^2} \right\} \quad (5.1.7)$$

$$\widehat{G}(k_i) = \exp \left\{ - \frac{(\Delta_i k_i)^2}{24} \right\} \quad (5.1.8)$$

#### (b) Sharp cutoff フィルター

$$G(x_i - x'_i, \Delta_i) = 2 \frac{\sin \left\{ \frac{\pi(x_i - x'_i)}{\Delta_i} \right\}}{\pi(x_i - x'_i)} \quad (5.1.9)$$

$$\widehat{G}(k_i) = \begin{cases} 1 & \left( |k_i| \leq \frac{\pi}{\Delta_i} \right) \\ 0 & \left( |k_i| > \frac{\pi}{\Delta_i} \right) \end{cases} \quad (5.2.10)$$

(c) Top-hat フィルター

$$G_i(x_i - x'_i, \Delta_i) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta_i} \left( \left| x_i - x'_i \right| \leq \frac{\Delta_i}{2} \right) \\ 0 \left( \left| x_i - x'_i \right| > \frac{\Delta_i}{2} \right) \end{cases} \quad (5.1.11)$$

$$\hat{G}_i(k_i) = 2 \frac{\sin \left\{ -\frac{\pi k_i}{2} \right\}}{\pi k_i} \quad (5.1.12)$$

Gaussian フィルターは、Gauss 関数であり、Gaussian フィルターをフーリエ変換した  $\hat{G}_i(k_i)$  も Gauss 関数である。Sharp cutoff フィルターと Top-hat フィルターは波数空間と実空間でそれぞれ対の関係にあることがわかる。

LES のフィルター関数として求められる性質として、まず、フィルター操作と微分の交換性がある。ある関数  $f$  の一階微分に対するフィルター操作は、以下のように記述される。

$$\frac{\partial \overline{f(x)}}{\partial x_i} = \left[ G(x - x', \Delta_i) f(x') \right]_{,i} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial G(x - x', \Delta_i)}{\partial x'} f(x') dx' \quad (5.1.13)$$

ここで、第1項はゼロとなり、フィルター関数が偶関数である場合、

$$\frac{\partial G(x - x', \Delta)}{\partial x'} = - \frac{\partial G(x - x', \Delta)}{\partial x} \quad (5.1.14)$$

が成り立つので、

$$\frac{\partial \overline{f(x)}}{\partial x_i} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial G(x - x', \Delta_i)}{\partial x} f(x') dx' = \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} G(x - x', \Delta_i) f(x') dx' = \frac{\partial \overline{f(x)}}{\partial x_i}$$

となり、フィルター操作と微分との間の交換性が成り立つことがわかる。さらに、同様な操作を繰り返すことにより、さらに高次の微分とフィルター操作との間の交換性が導かれる。

$$\frac{\partial^n \overline{f(x)}}{\partial x_i^n} = \frac{\partial^n \overline{f(x)}}{\partial x_i^n} \quad (5.1.15)$$

また、多次元フィルター操作に対しても容易に拡張可能である。

さらに式(5.1.7)、式(5.1.9)および式(5.1.11)のフィルター関数は、次式を満たすように正規化されている。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^3 G_i(x_i - x_i', \Delta_i) dx_1' dx_2' dx_3' = 1 \quad (5.1.16)$$

連続の式(5.1.1)およびNavier-Stokes方程式(5.1.2)にフィルター操作を施すと以下ようになる。

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (5.1.17)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{u}_k \bar{u}_i) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} \right) - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (5.1.18)$$

式(5.1.18)はFiltered Navier-Stokes方程式と呼ばれる。また、式(5.1.18)右辺第3項 $\tau_{ij} = \overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j$ は、SGS応力項と呼ばれ、対流項のフィルター操作に起因する項あり、フィルター操作によりカットされたSGS成分の影響を表している。SGS応力項はさらに次のように分解される。

$$\tau_{ij} = L_{ij} + C_{ij} + R_{ij} \quad (5.1.19)$$

$$L_{ij} = \overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j \quad (5.1.20)$$

$$C_{ij} = \overline{u_i u_j'} - \bar{u}_i' \bar{u}_j' \quad (5.1.21)$$

$$R_{ij} = \overline{u_i' u_j'} \quad (5.1.22)$$

式(5.2.19)中の $L_{ij}$ ,  $C_{ij}$ ,  $R_{ij}$ は、それぞれレナード項、SGSクロス応力項、SGSレイノルズ応力項と呼ばれる。レナード項は、GS渦とGS渦同士の干渉を表し、陽的に計算可能である。一方、SGSクロス応力項およびSGSレイノルズ応力項は、それぞれGS渦とSGS渦の間またはSGS渦とSGS渦同士の干渉を表し、一般的には何らかの物理的考察に基づきモデル化が必要がある。

Speziale (1985)は、LESの基礎方程式がガリレイ不変性(Galilean invariance, GI)を満たすかどうかを調べ、Filtered N-S方程式(5.1.16)はガリレイ不変性を満たすのに対し、SGS応力項を分解した式(5.1.17)において、レイノルズ応力項はそのままガリレイ不変性を満たすが、レナード項とクロス応力項はそれぞれ単独ではガリレイ不変性を満足せず、両者の和としてガリレイ不変性が満たされることを明らかにしている。従って、モデル化の際には、レナード項とSGSクロス応力項をカップリングしてガリレイ不変性を満たすかが問題となる。レナード項とSGSクロス応力項をTaylor展開を用いて評価すると、以下のようになる(Clark 1979; Horiuti 1989)。

$$L_{ij} = \frac{\gamma}{2} \bar{u}_i' \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} \right) + \frac{\gamma}{2} \bar{u}_j' \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} \right) + \gamma \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} + O(\Delta^4) \quad (5.1.23)$$

$$C_{ij} = -\frac{\gamma}{2} \bar{u}_i' \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} \right) - \frac{\gamma}{2} \bar{u}_j' \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} \right) + O(\Delta^4) \quad (5.1.24)$$

$$\gamma = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(x_i - x'_i, \Delta_i) \cdot (x_i - x'_i)^2 dx'_1 dx'_2 dx'_3 \quad (5.1.25)$$

式(5.1.23)と式(5.1.24)を比較すると、第1項と第2項が異符号となって現れているので、レナード項とSGSクロス応力項は互いに強い負の相関を持つことがわかる。ここで、フィルター関数として Gaussian フィルターを用いた場合、

$$\gamma = \frac{\Delta^2}{12} \quad (5.1.26)$$

と評価できる。さらに、Horiuti(1989)は、チャンネル内乱流の *a priori* テストから、レナード項とSGSクロス応力項は、テンソルレベルで強い負の相関を持つことを明らかにしている。従って、工学的乱流場においては、厳密性を多少無視し、レナード項とSGSクロス項の和をゼロとして、レイノルズ応力項のみのモデル化が考慮されることが多い。

これに対し、Germano(1986)は、レナード項、SGSクロス応力項およびSGSレイノルズ応力項がそれぞれガリレイ不変性を満たすように、次のように再定義した。

$$\tau_{ij} = l_{ij}^m + C_{ij}^m + R_{ij}^m \quad (5.1.27)$$

$$l_{ij}^m = \overline{u_i u_j} - \overline{u_i} \overline{u_j} \quad (5.1.28)$$

$$C_{ij}^m = (\overline{u_i u'_j} - \overline{u'_i u_j}) - \overline{u_i u'_j} - \overline{u'_i u_j} \quad (5.1.29)$$

$$R_{ij}^m = \overline{u'_i u'_j} - \overline{u'_i} \overline{u'_j} \quad (5.1.30)$$

式(5.1.27)中の  $l_{ij}^m$ ,  $C_{ij}^m$ ,  $R_{ij}^m$  は、それぞれ修正レナード項、修正SGSクロス応力項、修正SGSレイノルズ応力項と呼ばれる。最近のLESにおいては、SGS応力項をこのように分解してモデル化が考慮されることが主流となりつつある。

式(5.1.18)に  $u_j$  を乗じた式と、式(5.1.18)のインデックス  $i$  を  $j$  に置き換えて  $u_i$  を乗じた式との和をとると、GS 応力  $\overline{u_i u_j}$  の輸送方程式が導出できる。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (\overline{u_i u_j}) + \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u_k u_i u_j}) \\ &= - \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \frac{\overline{p}}{\rho} (\overline{u_i} \delta_{jk} + \overline{u_j} \delta_{ik}) - \nu \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u_i u_j}) + \overline{u_i} \tau_{jk} + \overline{u_j} \tau_{ik} \right] \\ & \quad + \frac{\overline{p}}{\rho} \left( \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) - 2\nu \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_k} + \tau_{jk} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} + \tau_{ik} \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (5.1.31)$$

さらに、式(5.1.18)に  $\overline{u_i}$  を乗じて縮約をとることにより、GSの運動エネルギー  $K_{GS} (= \overline{u_i u_i} / 2)$  の輸送方程式が導出される。

$$\frac{\partial K_{GS}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u_k K_{GS}}) = - \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \frac{\overline{p u_k}}{\rho} \delta_{jk} - \overline{v} \frac{\partial K_{GS}}{\partial x_k} + \overline{u_j \tau_{jk}} \right] - \overline{v} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} + \overline{\tau_{jk}} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} \quad (5.1.32)$$

式(5.1.18)がGSの運動量方程式であるのに対し、SGSの運動量方程式は、式(5.1.2)から(5.1.18)を減じることで次のように導出される。

$$\frac{\partial u_i'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (u_k' u_i') = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u_k u_i'} + u_i' \overline{u_k}) + \overline{v} \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial u_i'}{\partial x_k} \right) + \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_k} \quad (5.1.33)$$

式(5.1.33)と式(5.1.18)を比較すると、

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}$$

が符号を変えて現れていることがわかる。これは、GSとSGS間の運動量の交換を表している。

次に、SGS応力 $\tau(u_i, u_j) = \overline{u_i u_j} - \overline{u_i} \overline{u_j} = \tau_{ij}$ の輸送方程式は、式(5.1.3)にフィルター操作を施した後、式(5.1.18)式に $u_j$ を乗じた式を減じることで導出できる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \tau_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u_k \tau_{ij}}) &= - \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \tau(u_i, u_j, u_k) + \frac{1}{\rho} \left( m(p, u_i) \delta_{jk} + m(p, u_j) \delta_{ik} \right) \right] - \overline{v} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} \\ &+ \frac{1}{\rho} \left[ m \left( p, \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + m \left( p, \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] - 2 \overline{v} m \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k}, \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) - \tau_{ik} \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_k} - \tau_{jk} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (5.1.34)$$

次に、式(5.1.34)において、 $i=j$ として縮約をとることによりSGS運動エネルギー $K_{SGS} (= \overline{u_i' u_i'}/2)$ の輸送方程式が導出される。

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_{SGS}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u_k K_{SGS}}) &= - \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \frac{1}{2} \tau(u_i, u_i, u_k) + \tau(p, u_i) \right] - \overline{v} \frac{\partial K_{SGS}}{\partial x_k} \\ &+ \frac{1}{\rho} \left[ \tau \left( p, \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) \right] - 2 \overline{v} \tau \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k}, \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) - \tau_{ik} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (5.1.35)$$

上式において、右辺第1項はSGS乱流エネルギーの拡散を表し、第1項の[]内の第1～3項はそれぞれ、乱流拡散項、圧力拡散項、分子粘性拡散項である。また、第2項は圧力ひずみ相関項、第3項は分子粘性散逸項である。第4項は、GSとSGS間の運動エネルギーの交換を表す項であり、GSの運動エネルギー $K_{GS}$ の輸送方程式(5.1.32)において符号を変えて現れていることがわかる。ここで、

$$-\tau_{ik} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}$$

が正である場合、Forward cascade (または Forward scatter), 負である場合、Backward cascade (または Backward scatter)と呼ばれる。

## 5.2 Subgrid-scale モデル

LESにおいて実際に離散化して解かれる支配方程式は、フィルターを施された連続の式(5.1.17)とNavier-Stokes方程式(5.1.18)である。フィルターを施されたNavier-Stokes方程式(5.1.18)中のSGS応力項 $\tau_{ij}$ は、計算格子以下のSGS成分の変動の効果を表し、物理的考察に基づき何らかのモデルを構成し評価しなければならない。SGS応力項 $\tau_{ij}$ に対するモデリングは、Subgrid-scale(SGS)モデルと呼ばれる。SGSモデルの構成は、RANSモデルの場合と同様に、 $\tau_{ij}$ の輸送方程式(5.2.34)を考慮することにより可能であるが、新たに乱流拡散項や圧力ひずみ相関項等のモデル化が必要となるため、この方法は今日あまり発展していない。従って、これまでのSGSモデルの構成においては、 $\tau_{ij}$ とGS成分とを関係づける代数式をどのように表現するかが重要な問題となっている。

本節では、これまでに構成されてきた代表的なSGSモデルについて簡単に説明し、それぞれのモデルの問題点について言及する。

### 5.2.1 Smagorinsky モデル

これまで構成されているSGSモデルにおいて、多くのモデルが、次のようなBoussinesqの渦粘性近似に基づいている。

$$\tau_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \tau_{kk} = -2\nu_t \bar{S}_{ij} \quad (5.2.1)$$

$$\bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (5.2.2)$$

ここで、式(5.2.1)中の $\bar{S}_{ij}$ はGSのひずみ率テンソル(Strain-rate tensor)であり、 $\nu_t$ は乱流渦(動)粘性係数(kinematic eddy viscosity)と呼ばれる量である。ニュートン流体の場合、分子粘性係数 $\nu$ は物性値であるのに対し、この乱流粘性係数は位置と時間の変数である。Boussinesqの渦粘性近似は、乱流粘性と分子粘性との類似性から、SGS応力がGS速度勾配(ひずみ率テンソル)に比例すると仮定する近似である。このように仮定するためには、分子粘性を考える際に、分子の平均自由行程が流れの代表長さと比較して十分小さく、両者のスケールに明確な分離が仮定されたことと同様に、GSとSGSとの間に明確なスケールの分離が仮定されている。式(5.2.1)左辺第2項は、両辺の縮約をとった際の恒等関係から必要となる項である。

SGS運動エネルギー $K_{SGS}$ の輸送方程式(5.1.35)において、SGS運動エネルギーの生成と散逸がほぼ等しいとする、局所平衡状態にあるという仮定を導入し、簡単な次元解析から、渦粘性係数 $\nu_t$ は次のように与えられる。



$$\nu_t = (C_s \bar{\Delta})^2 |\bar{S}| \quad (5.2.3)$$

これが、LESのSGSモデルとして広く用いられている、Smagorinskyモデルである(Smagorinsky, 1963)。上式中、 $C_s$ はSmagorinsky定数と呼ばれる。一様等方性乱流を仮定した場合、理論的には、 $C_s = 0.2$ と導かれるが、乱流混合層やチャンネル内流れに対しては、経験的に0.15および0.1が最適値とされている(Mansour 1978; Deardorff 1970)。実際の乱流場は、これら一様等方性乱流、自由乱流および壁乱流といった基本的な乱流が組み合わさったものと考えられ、任意の乱流場に対して $C_s$ の最適値を求めることは容易ではない。式(5.3.3)中の $\Delta$ は、フィルター幅の長さスケールであり、通常、以下のように定義される(Deardorff 1970)。

$$\bar{\Delta} = (\bar{\Delta}_1 \bar{\Delta}_2 \bar{\Delta}_3)^{1/3} \quad (5.2.4)$$

ただし、壁を有する流れ場において、壁でno-slip条件が仮定された場合、壁面上でSGS応力 $\tau_{ij}$ および乱流粘性係数 $\nu_t$ はゼロでなければならないが、Smagorinskyモデルから計算されるSGS応力は壁でゼロに漸近しないため、フィルター幅スケール $\Delta$ にVan Driest型壁面減衰関数

$$f = 1 - \exp\left(-\frac{y^+}{A^+}\right) \quad (5.2.5)$$

を乗じて補正される。ここで、 $y^+$ と $A^+$ は、それぞれ壁関数および経験的定数であり、以下のように入えられる。

$$y^+ = \frac{u_p y_p}{\nu} \quad (5.2.6)$$

$$A^+ = 25 \quad (5.2.7)$$

一様等方性乱流の*a priori*テストから、Smagorinskyモデルは、乱流エネルギーの散逸については、DNS計算から求められる厳密なSGS応力による乱流エネルギーの散逸との間の相関が約0.7とかなり良い近似となっているのに対して、SGS応力のテンソルレベルでは、DNSから求められる厳密なSGS応力との間の相関が約0.3とあまり良くないことが指摘されている(Clark 1979)。

また、SmagorinskyモデルによるSGS運動エネルギーの散逸は、式(5.1.35)右辺第6項、式(5.2.1)および式(5.2.3)から次のように与えられる。

$$\epsilon_{SGS} = 2(C_s \bar{\Delta})^2 |\bar{S}| \bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij} \quad (5.2.8)$$

従って、Smagorinskyモデルは、運動エネルギーを常にGSからSGSに輸送(Forward cascade)するモデルであることがわかる。しかし、現実の流れ場では、 $\epsilon_{SGS}$ が正のForward cascadeと負のBackward cascadeが間欠的に存在することが、DNS計算の*a priori*テストから示されているので、何らかの改良が必要である。

## 5.2.2 Scale similarity モデルと mixed モデル

図5.2.1のように、流れ場を、GSの中でさらに大きなスケールの運動、GSとSGSの境界近傍のスケールの運動およびSGSの中でさらに小さなスケールの運動の3段階に分割することを考える。ここで、フィルター幅のサイズの渦は、GS成分の中でもっとも小さい渦であると同時に、SGS

成分の中でもっとも大きい渦であると考えられる, GS成分の中で, GSとSGSの境界近傍, すなわち, カットオフ周波数近傍の成分は, 次のように与えられる.

$$\overline{u_i'} = \overline{u_i} - \overline{u_i} = (\text{GS成分}) - (\text{GS成分の中でさらに大きな成分}) \quad (5.2.9)$$

一方, SGS成分の中で, カットオフ周波数近傍の成分は,  $u_i' = u_i - \overline{u_i}$  にフィルターをかけて, 次のように与えられる.

$$\overline{u_i'} = \overline{u_i - \overline{u_i}} = \overline{u_i} - \overline{\overline{u_i}} \quad (5.2.10)$$

従って, GS成分の中で最小スケールは, SGS成分の中で最大のスケールと同一であることがわかる. この概念は, Scale similarity 則と呼ばれ, Bardina *et al.* (1983)により初めて示された. 以降,  $\overline{u_i'}$  と  $\overline{u_i'}$  を区別せずに,  $\overline{u_i'}$  と表すことにする.

このように考えると, SGSクロス応力項およびSGSレイノルズ応力項は次のようにモデル化される.

$$\begin{aligned} C_{ij} &= \overline{u_i u_j'} + \overline{u_i' u_j} \\ &= C_c \overline{u_i u_j' + u_i' u_j} \\ &= C_c \left\{ \overline{u_i} (\overline{u_j} - \overline{u_j}) + \overline{u_j} (\overline{u_i} - \overline{u_i}) \right\} \end{aligned} \quad (5.2.11)$$

$$\begin{aligned} R_{ij} &= \overline{u_i' u_j'} \\ &= C_R \overline{u_i' u_j'} \\ &= C_R \left\{ (\overline{u_i} - \overline{u_i}) (\overline{u_j} - \overline{u_j}) \right\} \end{aligned} \quad (5.2.12)$$

ここで, ガリレイ不変性が満たされるためには,  $C_c = 1$ であるが,  $C_R$ については制約がない(坪倉 1996). ここで,  $C_c$  および  $C_R$  を 1 とし, SGSクロス応力項とSGSレイノルズ応力項を組み合わせ, 以下のようなモデルが構成される.

$$C_{ij} + R_{ij} = \overline{u_i} \overline{u_j} - \overline{\overline{u_i} \overline{u_j}} \quad (5.2.13)$$

式(5.2.13)は, Scale similarity モデルと呼ばれる. この Scale similarity モデルのみでは, 統計的なエネルギー散逸機構が小さいので, 通常, Scale similarity モデルをSGSクロス応力項に対するモデルとして, Smagorinsky モデルのような等方渦粘性型モデルと組み合わせて使用される.

$$L_{ij} = \overline{u_i u_j} - \overline{u_i} \overline{u_j} \quad (5.2.14)$$

$$C_{ij} = \overline{u_i u_j} - \overline{u_i} \overline{u_j} \quad (5.2.15)$$

$$R_{ij} = -2\nu \overline{S_{ij}} \quad (5.2.16)$$

$$\tau_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \tau_{kk} = \overline{u_i u_j} - \overline{u_i} \overline{u_j} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \left\{ \overline{u_k u_k} - \overline{u_k} \overline{u_k} \right\} - 2\nu \overline{S_{ij}} \quad (5.2.17)$$

Scale similarity 則に基づくモデルと等方渦粘性型モデルとが組み合わせられたこの種のモデルは, Mixed モデルと呼ばれ (Bardina *et al.* 1983; Piomelli *et al.* 1988), SGSの比較的大きなスケールとGSとの間の相互作用が Scale similarity モデルにより近似され, SGSの微小スケールとGSとの間

の相互作用がSmagorinskyモデルにより近似されていると考えられる。このタイプのMixedモデルに限らず、一般的に、SmagorinskyモデルにScale similarity則に基づいたモデルが線形結合されたmixedモデルは、Smagorinskyモデルのみの場合と比較して、実際の流れ場との相関が高くなる傾向にあることが*a priori*テストによって確認されている(Bardina *et al.* 1983; Piomelli *et al.* 1998; Horiuti 1995, 1997)。また、式(5.3.17)において、右辺第1項と第2項は、式(5.2.28)で表される修正レナード項と等しくなる。従って、Mixedモデルは、修正レナード項が陽的に計算され、SGSクロス応力項およびSGSレイノルズ応力項が等方渦粘性モデルによりモデル化されていると解釈することができる(Zang *et al.* 1993)。

修正SGSクロス応力項、修正SGSレイノルズ応力項に対して、Scale similarity則を適用すると、以下のようになる。

$$C_{ij}^m \approx 0 \quad (5.2.18)$$

$$R_{ij}^m \approx C_\theta (\overline{u_i - \bar{u}_i}) (\overline{u_j - \bar{u}_j}) \quad (5.2.19)$$

ここで、式(5.3.19)は、修正SGSレイノルズ応力に対するBardinaモデルと呼ばれる(Horiuti, 1995)。チャンネル内乱流および混合層乱流の*a priori*テストから、このBardinaモデルは、Smagorinskyモデルと比較して、Backward cascadeの再現性に優れているが、Backward cascadeの量を過大評価する傾向が明らかにされている(Horiuti 1995)。Horiuti(1995)は、BardinaモデルのBackward cascadeの絶対量を抑制するため、Bardinaモデルにフィルターを施した、Filtered Bardinaモデルを提案した。

$$R_{ij}^m \approx C_\theta (\overline{u_i - \bar{u}_i}) (\overline{u_j - \bar{u}_j}) \quad (5.2.20)$$

チャンネル内乱流および混合層乱流の*a priori*テストから、このFiltered Bardinaモデルは、Bardinaモデルと比較してBackward cascade効果をより高精度に再現することが確認されている(Horiuti 1995)。

### 5.2.3 Dynamic SGS モデル

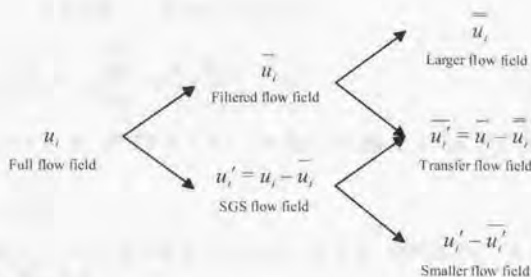


FIGURE 5.2.1 Three-level flow field decomposition (extracted from Bardina *et al.* (1983)).

5.2.1で述べられたように、Smagorinskyモデルは、局所的SGS応力の予測精度が低いだけでなく、

- 1) 任意の流れ場に対するモデル係数値の最適値を決定することが困難であること、
- 2) 壁近傍の低レイノルズ数効果を再現できないこと、
- 3) 運動エネルギーのSGSからGSへの逆輸送であるBackward cascadeを再現できないこと

等の欠点があった。これらの欠点を補うため、Germano *et al.* (1991)は、モデル係数をGSの速度場の状態に応じて、時間と場所の変数として求める手法を提案した。このモデル係数決定手法は、Dynamic procedureと呼ばれる。Dynamic procedureにおいては、GS量を定義するためのグリッドフィルター $\bar{G}(x_i - x'_i, \bar{\Delta}_i)$ に加え、より大きなフィルター幅を持つテストフィルター $\bar{G}(x_i - x'_i, \bar{\Delta}_i)$ を導入する。

$$\bar{f}(x_1, x_2, x_3, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^3 \bar{G}(x_i - x'_i, \bar{\Delta}_i) f(x'_1, x'_2, x'_3, t) dx'_1 dx'_2 dx'_3 \quad (5.2.21)$$

$$\bar{f}(x_1, x_2, x_3, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^3 \bar{G}(x_i - x'_i, \bar{\Delta}_i) f(x'_1, x'_2, x'_3, t) dx'_1 dx'_2 dx'_3 \quad (5.2.22)$$

テストフィルターのスケールは、テストスケールと呼ばれる。

Filtered Navier-Stokes 方程式

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_j \bar{u}_i) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (5.2.23)$$

$$\tau_{ij} = \bar{u}_i \bar{u}_j - \bar{u}_i \bar{u}_j \quad (5.2.24)$$

にテストフィルターをかけると、以下のようになる。

$$\frac{\partial \widehat{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\widehat{u}_j \widehat{u}_i) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \widehat{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \widehat{u}_i}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \quad (5.2.25)$$

上式中の乱流応力は $T_{ij}$ は、サブテストスケール(Sub-Test Scale, STS)応力と呼ばれ、次のように表される。

$$T_{ij} = \widehat{u}_i \widehat{u}_j - \widehat{u}_i \widehat{u}_j \quad (5.2.26)$$

ここで、SGS応力 $\tau_{ij}$ にテストフィルターをかけることより、SGS応力 $\tau_{ij}$ とSTS応力 $T_{ij}$ との間に次のような関係が導かれる。

$$\widehat{\tau}_{ij} = \widehat{u}_i \widehat{u}_j - \widehat{u}_i \widehat{u}_j = (\widehat{u}_i \widehat{u}_j - \widehat{u}_i \widehat{u}_j) - (\widehat{u}_i \widehat{u}_j - \widehat{u}_i \widehat{u}_j) = T_{ij} - \mathcal{L}'_{ij}$$

$$\therefore \mathcal{L}_y = T_y - \overline{\tau}_y \quad (5.2.27)$$

$$\mathcal{L}_y = \overline{u_i u_i} - \overline{u_i} \overline{u_i} \quad (5.2.28)$$

式(5.2.28)は、Germano's identity と呼ばれ、Dynamic SGS モデルの根幹となる関係式である。

SGS 応力および STS 応力を、Smagorinsky モデルを用いて近似する、

$$\tau_y - \frac{1}{3} \delta_{ij} \tau_{kk} = -2C\overline{\Delta}^2 \overline{S} | \overline{S}_y \quad (5.2.29)$$

$$\overline{S}_y = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right), \quad |\overline{S}| = \sqrt{2\overline{S}_y \overline{S}_y} \quad (5.2.30)$$

$$T_y - \frac{1}{3} \delta_{ij} T_{kk} = -2C\overline{\Delta}^2 \widehat{S} | \widehat{S}_y \quad (5.2.31)$$

$$\widehat{S}_y = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \widehat{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \widehat{u_j}}{\partial x_i} \right), \quad |\widehat{S}| = \sqrt{2\widehat{S}_y \widehat{S}_y} \quad (5.2.32)$$

ここで、オリジナルの Smagorinsky モデル式(5.2.3)と比較して、モデル係数は  $C$  に置き換えられている。Smagorinsky 定数とは  $C = C_s^2$  で関係づけられる。

(5.2.29) にテストフィルターをかけた式と、式(5.2.31)を式(5.2.27)に代入すると、以下のようになる。

$$\mathcal{L}_y - \frac{1}{3} \delta_{ij} \mathcal{L}_{kk} = -2CM_y \quad (5.2.33)$$

$$M_y = \overline{\Delta}^2 \left( \alpha^2 \overline{S} | \overline{S}_y - \widehat{S} | \widehat{S}_y \right) \quad (5.2.34)$$

$$\alpha = \frac{\overline{\Delta}}{\Delta} \quad (5.2.35)$$

ここで、テストフィルター幅  $\overline{\Delta}$  のスケールにおいて、 $C$  の変化が小さいとして、

$$C\overline{\Delta}^2 \overline{S} | \overline{S}_y = C\overline{\Delta}^2 \widehat{S} | \widehat{S}_y \quad (5.2.36)$$

が仮定されている。式(5.2.33)において、一つの未知量  $C$  に対して、6つの独立した方程式が存在するため、一意にモデル係数を決定することが出来ない。Lilly(1991)は、最小自乗法を適用して、誤差の自乗

$$Q = \left( \mathcal{L}_y - \frac{1}{3} \delta_{ij} \mathcal{L}_{kk} + 2CM_y \right)^2 \quad (5.2.37)$$

が最小になるようなモデル係数値の決定手法を提案した。

$$\frac{\partial Q}{\partial C} = 2 \left( \mathcal{L}_y - \frac{1}{3} \delta_{ij} \mathcal{L}_{kk} + 2CM_y \right) 2M_y = 0 \quad (5.2.38)$$

$$\therefore C = -\frac{1}{2} \frac{\mathcal{L}_{ij}^a M_{ij}}{M_{ij} M_{ij}} = -\frac{1}{2} \frac{\mathcal{L}_{ij} M_{ij}}{M_{ij} M_{ij}} \quad (5.2.39)$$

$$\mathcal{L}_{ij}^a = \mathcal{L}_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \mathcal{L}_{kk} \quad (5.2.40)$$

式(5.2.39)において、非圧縮性流体の場合、

$$\mathcal{L}_{ij}^a M_{ij} = \mathcal{L}_{ij} M_{ij}$$

である。式(5.2.28)、式(5.2.29)、式(5.2.34)～式(5.2.35)および式(5.2.39)で構成されるSGSモデルがDynamic SGSモデル(Dynamic SGS model, DSM)と呼ばれる。Dynamic SGSモデルでは、モデルパラメータとしてフィルタ幅の比 $\alpha$ が新たに現れている。Germano *et al.*(1991)は、チャンネル内乱流および遷移乱流のテストから、グリッドフィルタおよびテストフィルタとしてSharp cutoffフィルタを用いた場合、 $\alpha=2$ を推奨している。しかし、実際の計算において、解に対するパラメータ $\alpha$ の依存性は小さいことが報告されている。

Germano *et al.*(1991)は、提案したDynamic SGSモデルを充分発達したチャンネル内乱流および乱流遷移するチャンネル内流れに適用し、従来のSmagorinskyモデルにおいて必要であった壁面減衰関数を用いることなく、壁近傍における乱流粘性の漸近挙動を再現することに成功するとともに、遷移過程の壁面せん断応力がDNSとかなり一致するようになり、乱流遷移問題に対するDynamic SGSモデルの有効性を示した。

Cは正にも負にもなることができ、Cが負の場合、乱流粘性係数が負となる結果、GS運動エネルギーの輸送方程式(5.1.32)右辺第5項あるいはSGS運動エネルギーの輸送方程式(5.1.35)右辺第6項で表されるGSとSGS間の運動エネルギーの交換を表す項

$$-\tau_{ik} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = 2C \bar{\Delta}^2 \bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij} \quad (5.2.41)$$

が負となりbackward cascadeを再現できると解釈することもできるが、実際の数値計算において、乱流粘性係数の値が負になると、計算が不安定になる。また、Dynamic SGSモデルは、渦粘性型モデルを基本としているため、SGS応力のテンソルレベルで実際の乱流場との相関が低い。従って、モデル係数Cが負になることに起因するBackward cascadeは、実際の乱流場におけるBackward cascadeを再現しているかどうかは疑わしい。Germano *et al.*(1991)は、チャンネル内乱流の計算において、モデル係数が負になり計算が不安定になることを防ぐために、統計的に一様な方向にモデル係数を平均化している。

$$C = -\frac{1}{2} \frac{\langle \mathcal{L}_{ij} M_{ij} \rangle_x}{\langle M_{ij} M_{ij} \rangle_x} \quad (5.2.42)$$

ここで、 $\langle \rangle_x$ は流れ方向xとスパン方向zの平均化操作を表している。このような平均操作は、一様方向が存在しない流れ場に対して適用できないので、モデル係数を空間的に局所化する何らか

の改善が必要である。

言葉の定義として, Germano's identity を導入しモデル係数を GS の速度場の状態に応じて時間と場所の変数として求める手法を, 一般的に Dynamic procedure と呼ぶのに対して, SGS 応力  $\tau_{ij}$  と STS 応力  $T_{ij}$  に対するベースモデルとして, Smagorinsky モデルを使用して構成される SGS モデルを Dynamic SGS モデルと呼ぶことにする。SGS 応力  $\tau_{ij}$  と STS 応力  $T_{ij}$  に対するベースモデルを変更することにより, 新たな Dynamic モデルが構成可能である。

#### 5.2.4 Dynamic mixed モデル

Zang *et al.* (1993) は, SGS 応力  $\tau_{ij}$  と STS 応力  $T_{ij}$  に対するベースモデルとして, Bardina *et al.* (1983) の Mixed モデルを採用した Dynamic mixed モデル (Dynamic Mixed Model, DMM) を提案した。

SGS 応力  $\tau_{ij}$  と STS 応力  $T_{ij}$  に対して, 式(5.2.18)で表される Bardina *et al.* (1983) の mixed モデルを適用する。

$$\tau_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \tau_{kk} = -2C \bar{\Delta}^2 |\bar{S}| \bar{S}_{ij} + L_{ij}^m - \frac{1}{3} \delta_{ij} L_{kk}^m \quad (5.2.43)$$

$$T_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} T_{kk} = -2C \bar{\Delta}^2 |\bar{S}| \bar{S}_{ij} + L_{ij}^T - \frac{1}{3} \delta_{ij} L_{kk}^T \quad (5.2.44)$$

ここで,  $L_{ij}^m$  は式(5.1.28)で定義される修正レナード項  $L_{ij}^m = \overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j$  である。一方, テストスケール  $\bar{\Delta}$  の修正レナード項  $L_{ij}^T$  は, STS 応力  $T_{ij}$  の式(5.2.23)において, 速度を

$$u_i = \bar{u}_i + u_i' \quad (5.2.45)$$

のように分解して, 以下のように得られる。

$$T_{ij} = \overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j = L_{ij}^T + C_{ij}^T + R_{ij}^T \quad (5.2.46)$$

$$L_{ij}^T = \overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j \quad (5.2.47)$$

$$C_{ij}^T = \overline{(u_i u_j' - u_i' u_j)} - \bar{u}_i \bar{u}_j' - \bar{u}_i' \bar{u}_j \quad (5.2.48)$$

$$R_{ij}^T = \overline{u_i' u_j'} - \bar{u}_i' \bar{u}_j' \quad (5.2.49)$$

式(5.2.43)にテストフィルターをかけた式と, 式(5.2.44)を式(5.2.27)に代入すると, 以下のようになる。

$$\mathcal{G}_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \mathcal{G}_{kk} - \left( \mathcal{H}_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \mathcal{H}_{kk} \right) = -2CM_{ij} \quad (5.2.50)$$

$$\mathcal{H}_{ij} = \overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j \quad (5.2.51)$$

$$M_{ij} = \bar{\Delta}^2 \left( \alpha^2 |\bar{S}| \bar{S}_{ij} - |\bar{S}| \bar{S}_{ij} \right) \quad (5.2.52)$$

$$\alpha = \frac{\bar{\Delta}}{\Delta} \quad (5.2.53)$$

Lilly(1991)に従い, 誤差の自乗

$$Q = \left[ \mathcal{L}'_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \mathcal{L}'_{kk} - \left( \mathcal{H}'_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \mathcal{H}'_{kk} \right) + 2CM_{ij} \right]^2 \quad (5.2.54)$$

が最小となるようなモデル係数の計算式は, 以下のように導かれる.

$$C = -\frac{1}{2} \frac{(\mathcal{L}'_{ij} - \mathcal{H}'_{ij}) M_{ij}}{M_{ij} M_{ij}} = -\frac{1}{2} \frac{(\mathcal{L}'_{ij} - \mathcal{H}'_{ij}) M_{ij}}{M_{ij} M_{ij}} \quad (5.2.55)$$

$$\mathcal{L}'_{ij} = \mathcal{L}_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \mathcal{L}_{kk} \quad (5.2.56)$$

$$\mathcal{H}'_{ij} = \mathcal{H}_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \mathcal{H}_{kk} \quad (5.2.57)$$

式(5.2.55)において, 非圧縮性流体の場合,

$$(\mathcal{L}'_{ij} - \mathcal{H}'_{ij}) M_{ij} = (\mathcal{L}_{ij} - \mathcal{H}_{ij}) M_{ij}$$

である.

以上で構成された SGS モデルは, Zang 型の Dynamic mixed モデルと呼ぶことにする.

Vreman *et al.*(1994)は, Zang 型の Dynamic mixed モデルにおいて, STS 応力の渦粘性モデルの部分 $\overline{u_i u_j}$ で表現されているのに対し, 修正レナード項の部分 $\overline{u_i}$ で表現されているという数学的矛盾が含まれていることを指摘した. つまり, STS 応力 $T_{ij}$ を分解する際, 速度の分解は式(5.2.45)ではなく,

$$u_i = \overline{u_i} + u_i' \quad (5.2.58)$$

を用いる方が数学的に適合していると考えられる.

$$T_{ij} = \overline{u_i u_j} - \overline{u_i} \overline{u_j} = L_{ij}^r + C_{ij}^r + R_{ij}^r \quad (5.2.59)$$

$$L_{ij}^r = \overline{u_i u_j} - \overline{u_i} \overline{u_j} \quad (5.2.60)$$

$$C_{ij}^r = \left( \overline{u_i u_j'} - \overline{u_i'} \overline{u_j} \right) - \overline{u_i} \overline{u_j'} - \overline{u_i'} \overline{u_j} \quad (5.2.61)$$

$$R_{ij}^r = \overline{u_i' u_j'} - \overline{u_i'} \overline{u_j'} \quad (5.2.62)$$

この場合, 式(5.2.51)の $H_{ij}$ は次のように変更される.

$$\mathcal{H}_{ij} = \overline{u_i u_j} - \overline{u_i} \overline{u_j} - \left( \overline{u_i u_j'} - \overline{u_i'} \overline{u_j} \right) \quad (5.2.63)$$

$L_{ij} M_{ij}$ は, Zang 型の Dynamic mixed モデルから変更はなく, それぞれ式(5.2.50)および式(5.2.51)から計算される. また, モデル係数 $C$ を求める式も Zang 型と同じく式(5.2.55)である.

以上のように, Dynamic mixed モデルの定式化において, Vreman 型の方が Zang 型よりも数学的に自然な形で導出されていることがわかる. しかし, 後述する Dynamic multi-parameter mixed



モデルの一つである  $C_g-C_s$  モデル(Horiuti 1997)の場合, チャンネル内乱流の *a priori* テストから, Zang 型の Dynamic mixed モデルの方が適切なモデル係数値を与えるという結果もあり, 一概に Vreman 型が優れているとは言えない.

### 5.2.5 Dynamic multi-parameter mixed モデル

Horiuti(1997)は, Bardina *et al.* (1983) の Scale similarity 則を拡張して, Generalized scale similarity モデルを提案した.

$$\overline{fg} - \overline{f} \overline{g} \cong C \left\{ \overline{\overline{fg}} - \overline{\overline{f}} \overline{\overline{g}} \right\} \quad (5.2.64)$$

この Generalized scale similarity モデルの考え方は, Germano(1992)の Generalized central moment の概念と等価である. 式(5.2.64)の右辺は, ガリレイ不変性を満たしている.

修正SGSクロス応力項を Generalized scale similarity モデルを用いて近似すると以下のようになる.

$$\begin{aligned} C_{ij}^m &= \left( \overline{u_i u_j'} - \overline{u_i'} u_j' \right) - \overline{u_i u_j'} - \overline{u_i'} u_j' \\ &\cong C_c \left\{ \overline{\overline{u_i u_j' + u_i' u_j}} - \overline{\overline{u_i u_j' + u_i' u_j}} \right\} - 2 \left( \overline{\overline{u_i u_j' - u_i' u_j}} \right) \end{aligned} \quad (5.2.65)$$

同様に, 修正SGSレイノルズ応力項を Generalized scale similarity モデルを用いて近似すると以下のようになる.

$$\begin{aligned} R_{ij}^m &= \overline{u_i' u_j'} - \overline{u_i'} \overline{u_j'} \\ &\cong C_R \left( \overline{u_i' u_j'} - \overline{u_i'} \overline{u_j'} \right) = C_R I_{ij}^R \end{aligned} \quad (5.2.66)$$

$$L_{ij}^R = \left( \overline{u_i' u_j'} - \overline{u_i'} \overline{u_j'} \right) = \left( \overline{u_i - u_i'} \right) \left( \overline{u_j - u_j'} \right) - \left( \overline{u_i - u_i'} \right) \left( \overline{u_j - u_j'} \right) \quad (5.2.67)$$

ここで, 式(5.2.67)の右辺第1項は, 式(5.2.20)で与えられるSGSレイノルズ応力項に対する filtered Bardina モデル(Horiuti 1995)と等価となっている. さらに  $I_{ij}^R$  を変形すると, 次のようになる.

$$L_{ij}^R = L_{ij}^m - \left\{ \left( \overline{u_i u_j' + u_i' u_j} \right) - \left( \overline{u_i u_j' + u_i' u_j} \right) \right\} + \overline{u_i u_j'} - \overline{u_i'} \overline{u_j'} \quad (5.2.68)$$

ここで, 上式中の  $L_{ij}^m$  は修正レナード項であり, 式(5.1.28)で与えられる. 上式を用いると, 式(5.2.65)は以下のように与えられる.

$$C_{ij}^m \cong C_c \left( L_{ij}^c - L_{ij}^R \right) \quad (5.2.69)$$

$$L_{ij}^c = L_{ij}^m - \left( \overline{u_i u_j' - u_i' u_j} \right) \quad (5.2.70)$$

式(5.2.66)および式(5.2.69)から, 以下のようなSGS応力モデルが構成される.

$$\begin{aligned} \tau_{ij}^* &\cong L_{ij}^{m*} + C_c \left( L_{ij}^{c*} - L_{ij}^{R*} \right) + C_R L_{ij}^{R*} \\ &= L_{ij}^{m*} + C_c L_{ij}^{c*} + C_R L_{ij}^{R*} \end{aligned} \quad (5.2.71)$$

ここで, 上付添え字\*は,

$$f_{ij}^* = f_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} f_{kk} \quad (5.2.72)$$

を表す。また、式(5.2.71)中のモデル係数 $C_b$ は、 $C_b = C_b - C_c$ で与えられる。式(5.2.71)から、Generalized scale similarityモデルを用いて近似された修正SGSクロス応力項と修正SGSレイノルズ応力項は、互いに独立ではなく、組み合わせられてモデル化されている。

チャンネル内乱流および混合層乱流において、式(5.2.71)で与えられるSGSモデルの*a priori*テストを行った結果、 $L_{ij}^R$ は $C_b^m$ と $R_{ij}^m$ との間の相関が約0.95と0.85と、その他の $L_{ij}^m$ および $L_{ij}^c$ と比較して最も高く、 $L_{ij}^R$ は修正SGSクロス応力と修正SGSレイノルズ応力項に対する高精度なモデルであることがわかった(Horiuti 1997)。従って、Horiuti(1997)は、計算負荷を軽減されるため、式(5.3.70)で与えられる $L_{ij}^c$ の第2項を無視する事とし、Smagorinskyモデルと線形結合した以下のようなDynamic three-parameter mixedモデルを提案した。

$$\tau_{ij}^* = C_L L_{ij}^{m*} + C_b L_{ij}^{R*} - 2C_s \bar{\Delta}^2 |\bar{S}| \bar{S}_{ij} \quad (5.2.73)$$

ここで、新たなモデル係数 $C_L$ は、 $C_L = 1 + C_c$ で与えられる。

Dynamic three-parameter mixedモデルの欠点として、3つ全てのモデル係数をDynamic procedureによって決定することは、計算負荷およびメモリ使用量が増加してしまうことが挙げられる。従って、Dynamic procedureによって決定するモデル係数の数を、1つあるいは2つに限定することが考えられる。式(5.3.73)において、 $C_c = C_b = 0$ の場合、Dynamic SGSモデルであり、 $C_L = 1$ 、 $C_b = 0$ の場合、Dynamic mixedモデルである。さらに、 $C_b = 0$ の場合、Salvetti and Banerjee (1995)により提案されたDynamic two-parameter  $C_L$ - $C_b$  mixedモデルである。一方、Horiuti(1997)は、前述の*a priori*テストの結果から、 $L_{ij}^R$ が修正SGSクロス応力と修正SGSレイノルズ応力項に対する高精度なモデルであることに着目し、 $C_L = 1$ としたDynamic two-parameter  $C_L$ - $C_b$  mixedモデルを推奨している。

### 5.2.6 Lagrangian Dynamic SGS モデル

5.2.3で述べられたDynamic SGSモデルの場合、モデル係数 $C$ は、時間的、空間的に大きく変動し、負の値を持つ割合も小さくないことが、実際の計算およびDNSデータを用いた*a priori*テストから明らかになっている。しかし、負のモデル係数値は、計算の不安定性を招くため、何らかの計算安定化手法が必要となる。これまで、計算の安定化手法として最も多く用いられてきた方法は、式(5.2.42)で表されるように、モデル係数値を決定する方程式を統計的に一様な方向に平均化することである。しかし、この方法は、統計的に一様な方向がない複雑な形状に対しては適用不可能であり、乱流特有の局所的構造を無視してしまうという問題がある。また、単純に、モデル係数が負になった場合、強制的にその値をゼロとってしまう、Clippingという方法もよく使用されるが、これはGSからSGSへの正味のエネルギー輸送量に変化してしまうという問題がある。

Ghosal *et al.*(1995b)は、モデル係数値が空間的に大きく変動するにも関わらずテストフィルタ操作の外に出せるとする式(5.2.36)の数学的矛盾をなくすとともに、モデル係数値を空間的に局所化するDynamic localizationモデル(DLM)を提案した。しかし、このモデルの定式化の際には、第2種Fredholm積分方程式が導入され、この式を反復法によって解くために計算負荷が大きいという問題がある。Carati *et al.*(1995)は、Dynamic localizationモデルによってモデル係数値を計算するには、式(5.2.42)で表されるPlane平均型Dynamic SGSモデルと比較して、約4倍のCPU時間

が必要であると評価している。

Piomelli and Liu(1995)は、Dynamic SGS モデルが持つ数学的矛盾を Taylor 展開を用いて近似的に取り除くことによって、代数的にモデル係数値を求める局所化手法を提案した。Ghosal *et al.* (1995b)の Dynamic Localization モデルと比較して、モデル係数値の計算負荷は、かなり軽減され、式(5.2.42)で表される Plane 平均型 Dynamic SGS モデルとはほぼ同程度であると報告されている (Piomelli and Liu 1995)。この局所化 Dynamic SGS モデルは、スパン方向に回転軸を持つ回転チャンネル内乱流に適用され、この種の流れ場の特徴をよく再現するとともに、DNS データともよく一致する結果が得られている。しかし、この局所化 Dynamic SGS モデルにおいては、正のモデル係数値が保証されておらず、Piomelli and Liu(1995)は、全粘性(分子粘性+乱流渦粘性)が負とならないように Clipping スキームを用いている。

これらの局所化手法に対して、Meneveau *et al.*(1994, 1996)は、Dynamic SGS モデルが持つ数学的矛盾にはこだわらずに、乱流渦が流れの流跡に沿って発達するであろうというラグランジュ的考察に基づき、モデル係数値を流跡に沿って平均化する方法を提案した。このモデル係数値決定手法は、Lagrangian dynamic モデルと呼ばれる。

Lagrangian dynamic SGS モデルの定式化は、式(5.2.28)で表される Germano's identity の誤差が、流跡に沿って最小となるように行われる。従って、その導出は、ラグランジュ的に行われるのが自然であり、まず、ある時間  $t$  において空間上のある地点  $\mathbf{x}$  にある流体粒子を考える。時間  $t$  よりも前の時間  $t'$  において、その流体粒子の位置は以下のように与えられる。

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{x} - \int_{t'}^t \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{z}(t'), t') dt' \quad (5.2.74)$$

ここで、Dynamic SGS モデルの場合、ラグランジュ的に記述される Germano's identity の局所的誤差  $e_{ij}$  は、式(5.2.33)から以下のように与えられる。

$$e_{ij}(\mathbf{z}, t) = \mathcal{L}_{ij}^i(\mathbf{z}, t) + 2C(\mathbf{x}, t) M_{ij}(\mathbf{z}, t) \quad (5.2.75)$$

ここで、上式中の  $\mathcal{L}_{ij}^i$  および  $M_{ij}$  は、それぞれ式(5.2.28)および式(5.2.34)で与えられる。また、上式において、Dynamic SGS モデルの場合と同様に、モデル係数値はテストフィルターのスケールにおいて空間的に大きく変化しないことが仮定されている。最小化されるべき誤差は、局所的誤差の二乗を流跡に沿って積分したものと与えられる。

$$E = \int_{\mathbf{x}} e_{ij}(\mathbf{z}(t'), t') e_{ij}(\mathbf{z}(t'), t') W(t-t') dt' \quad (5.2.76)$$

上式中、 $W(t-t')$  は、時間  $t$  の情報がそれ以前の情報と比較してより重要であることをコントロールするための重み関数である。重み関数の時間スケールにおいて、モデル係数  $C$  の時間に対する変化が無視できると仮定すると、式(5.2.75)中の  $C(\mathbf{z}, t')$  は、 $C(\mathbf{x}, t)$  に置き換えることができる。従って、誤差  $E$  は、次式を解くことにより最小化される。

$$\frac{\partial E}{\partial C} = \int_{\mathbf{x}} 2e_{ij} \frac{\partial e_{ij}}{\partial C} W(t-t') dt' = 0 \quad (5.2.77)$$

式(5.2.75)を用いて、 $C$ について解くと以下ようになる。

$$C(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{2} \frac{I_{LM}}{I_{MM}} \quad (5.2.78)$$

$$I_{LM} = \int_{t_0}^t \mathcal{L}'_y(\mathbf{z}(t'), t') M_y(\mathbf{z}(t'), t') W(t-t') dt' \quad (5.2.79)$$

$$I_{MM} = \int_{t_0}^t M_y(\mathbf{z}(t'), t') M_y(\mathbf{z}(t'), t') W(t-t') dt' \quad (5.2.80)$$

重み関数  $W(t-t')$  に関して、特に制約はなく、いくつかの適切な重み関数が考えられるが、

$$W(t-t') = \frac{\exp\left(-\frac{t-t'}{T}\right)}{T} \quad (5.2.81)$$

で表されるような指数関数的重み関数を導入することにより、式(5.2.79)と式(5.2.80)は、次式で表されるような緩和輸送方程式に変形できる。

$$\frac{DI_{LM}}{Dt} = \frac{\partial I_{LM}}{\partial t} + u_k \frac{\partial I_{LM}}{\partial x_k} = \frac{1}{T} (\mathcal{L}'_y M_y - I_{LM}) \quad (5.2.82)$$

$$\frac{DI_{MM}}{Dt} = \frac{\partial I_{MM}}{\partial t} + u_k \frac{\partial I_{MM}}{\partial x_k} = \frac{1}{T} (M_y M_y - I_{MM}) \quad (5.2.83)$$

ここで、式(5.2.81)中の  $T$  は、ラグランジュ平均の緩和時間スケールであり、次のような選択肢が考えられている (Meneveau *et al.*, 1996)。

$$T \approx |\bar{S}|^{-1} \quad (5.2.84a)$$

$$T \approx |\hat{S}|^{-1} \quad (5.2.84b)$$

$$T \approx \Delta (M_y M_y)^{-\frac{1}{4}} \quad (5.2.84c)$$

$$T \approx \Delta (I_y M_y)^{-\frac{1}{4}} \quad (5.2.84d)$$

$$T \approx \Delta I_{MM}^{-1/4} \quad (5.2.84e)$$

$$T \approx \Delta I_{LM}^{-1/4} \quad (5.2.84f)$$

$$T \approx \Delta [I_{LM} I_{MM}]^{-1/8} \quad (5.2.84g)$$

この中で、Meneveau *et al.* (1996) は、最終的に以下に述べるような理由から、式(5.2.84g)を推奨している。まず、緩和時間スケール  $T$  が  $I_{LM}$  および  $I_{MM}$  の両方に依存するため、非線形エネルギー輸

送が大きい領域( $L_y M_y$ が大きい領域)と同様に、ひずみが大きい領域( $M_x M_y$ が大きい領域)において、 $T$ が減少し、式(5.2.82)と式(5.2.83)において、左辺と比較して右辺の効果が大きくなり、 $I_{LM}$ および $I_{MM}$ は、局所的な $L_x M_x$ および $M_x M_y$ の値から決定される。さらに、 $L_x M_x \leq 0$ の場合、 $I_{LM}$ がゼロに漸近し、 $T$ が増加する。つまり、式(5.2.82)と式(5.2.83)において、右辺と比較して左辺の対流効果が大きくなり、局所的 Backward cascade 効果が反映されにくくなる。

Lagrangian Dynamic SGS モデルは、一様等方性乱流で検証された結果、モデル係数値の空間的な大きな振動が取り除かれる一方、モデル係数値の統計的に大きなスケールの変動は捉えられることが確認され、モデル係数値の統計的に大きなスケールの変動は、一様等方性乱流において顕著な構造である Fat worm と相関が高いことが示されている (Meneveau *et al.* 1996)。また、Lagrangian Dynamic SGS モデルは、十分発達したチャンネル内乱流および乱流遷移するチャンネル内流れに適用され、Plane 平均型 Dynamic SGS モデルと比較して、解が若干改善される傾向が示された (Meneveau *et al.* 1996)。これは、Lagrangian Dynamic SGS モデルにおけるモデル係数値が、乱流の大スケール構造を反映するためであると考えられている。

Meneveau *et al.* (1996) の Lagrangian 平均化手法は、Dynamic SGS モデル以外にも適用可能である。坪倉(1996)は、Dynamic mixed モデルや後述する非平衡等方型渦粘性モデル等に Lagrangian 平均化手法を適用し、系統的な調査を行っている。

### 5.2.7 非平衡等方型渦粘性モデル

これまでの多くの LES において、等方型渦粘性モデルとしては、Smagorinsky モデルが適用されてきた。Smagorinsky モデルは、SGS 乱流エネルギーの生成率と散逸率が等しいとする慣性小領域において成立する局所平衡を仮定しているため、カットオフ周波数が慣性小領域のスケールにあることが、必要条件である。しかし、実際の計算では、この条件から要求される解像度よりも粗い計算格子が用いられているのが現状である。

これに対して、Yoshizawa *et al.* (1996) は、局所平衡を仮定しない等方型渦粘性モデルを提案した。等方型渦粘性モデルは、SGS 渦間の相互干渉を表す SGS レイノルズ応力項に対するモデル化手法として考えられ (坪倉 1996)、まず、SGS レイノルズ応力の輸送方程式が考慮される。ここで、SGS の運動量方程式(5.1.33)に $u_j^*$ を乗じた式と、式(5.1.33)のインデックス $i$ を $j$ に置き換えて $u_j^*$ を乗じた式との和をとり、グリッドフィルター操作を施すことにより、SGS レイノルズ応力の輸送方程式が導出できる。

$$\frac{\partial}{\partial t} (\overline{u_j^* u_i^*}) + u_k \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u_j^* u_i^*}) = P_{ij} + \Pi_{ij} + \varepsilon_{ij} + D_{ij} + F_{ij} \quad (5.2.85)$$

$$P_{ij} = -\overline{u_j^* u_k^*} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \overline{u_i^* u_k^*} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \quad (5.2.86)$$

$$\Pi_{ij} = \frac{p'}{\rho} \left( \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^*}{\partial x_i} \right) \quad (5.2.87)$$

$$\varepsilon_{ij} = -2\nu \frac{\partial u_i'}{\partial x_k} \frac{\partial u_j'}{\partial x_k} \quad (5.2.88)$$

$$D_{ij} = -\frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \overline{u_i' u_j' u_k'} + \frac{p}{\rho} (u_i' \delta_{jk} + u_j' \delta_{ik}) - \nu \frac{\partial}{\partial x_k} (u_i' u_j') \right] \quad (5.2.89)$$

$$F_{ij} = \overline{u_j' \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_k}} + u_i' \frac{\partial \tau_{jk}}{\partial x_k} \quad (5.2.90)$$

RANS モデリングにおける WET (Wealth  $\propto$  Earnings  $\times$  Time) の考え方に基づき、式(5.2.85)の右辺の中で生成項の寄与が最も大きく、SGSレイノルズ応力  $u_i' u_j'$  の対流を表す左辺は、時間スケール  $T$  で表現できると仮定すると、SGSレイノルズ応力は、生成項  $P_{ij}$  にある時間スケール  $T$  をかけることでモデル化される。式(5.2.86)で表される生成項  $P_{ij}$  は、Bardina *et al.* (1983) の Scale similarity 則の概念から、次のように変形できる。

$$P_{ij} = -C_1 \left( \overline{u_j' u_k' \frac{\partial u_i}{\partial x_k}} + \overline{u_i' u_k' \frac{\partial u_j}{\partial x_k}} \right) \quad (5.2.91)$$

上式中、 $C_1$  は Scale similarity 則による近似を導入したことによるモデル係数である。式(5.2.91)右辺中の SGS レイノルズ応力は、そのせん断成分  $\overline{u_i' u_j'}$  ( $i \neq j$ ) についてはゼロとし、垂直成分  $\overline{u_i' u_j'}$  ( $i = j$ ) については3成分とも等価であるとする、弱い非等方性を持つと仮定すると、生成項  $P_{ij}$  は、さらに以下のように変形される。

$$P_{ij} = -\frac{1}{3} C_1 \overline{u_i' u_k' u_k'} \left( \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) = -\frac{2}{3} C_1 \overline{u_i' u_k' S_{ij}} \quad (5.2.92)$$

WET モデルの概念に基づき、SGSレイノルズ応力  $\overline{u_i' u_j'}$  は、以下のようにモデル化される。

$$\overline{u_i' u_j'} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \overline{u_k' u_k'} = -T \frac{2}{3} C_1 \overline{u_i' u_k' S_{ij}} \quad (5.2.93)$$

ここで、時間スケール  $T$  として、Yoshizawa *et al.* (1996) は、以下のように与えている。

$$T = \frac{C_2 \bar{\Delta}}{\sqrt{\overline{u_i' u_i'}}} \quad (5.2.94)$$

式(5.2.94)を式(5.2.93)に代入し、SGSレイノルズ応力の垂直成分  $\overline{u_k' u_k'}$  に対して、Scale similarity 則を適用すると、SGSレイノルズ応力は、最終的に次のようにモデル化される。

$$\overline{u_i' u_j'} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \overline{u_k' u_k'} = -2C_2 \bar{\Delta} \sqrt{(\overline{u_k - u_k})(\overline{u_k - u_k})} \overline{S_{ij}} \quad (5.2.95)$$

式(5.1.30)で表される修正SGSレイノルズ応力項に対するモデル化も同様に可能である。修正SGSレイノルズ応力  $R_{ij}^m = \overline{u_i' u_j'} - \overline{u_i' u_j'}$  の輸送方程式中の生成項  $P_{ij}$  を導出し、Scale similarity 則を適用すると、以下ようになる。

$$\begin{aligned}
 P_{ij} &= -C_3 \left[ \overline{(u'_i u'_k - \overline{u'_i u'_k})} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} + \overline{(u'_i u'_k - \overline{u'_i u'_k})} \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_k} \right] \\
 &= C_3 \left( R_{ik}^m \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} + R_{jk}^m \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_k} \right) \quad (5.2.96)
 \end{aligned}$$

式(5.2.96)右辺中の修正SGSレイノルズ応力に対して弱い非等方性を仮定すると、次のように変形できる。

$$P_{ij} = \frac{1}{3} C_3 R_{ik}^m \left( \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) = -\frac{2}{3} C_3 R_{ik}^m \overline{S_{ij}} \quad (5.2.97)$$

WETモデルの概念を導入すると、修正SGSレイノルズ応力 $R_{ij}^m$ は、以下のようにモデル化される。

$$R_{ij}^m - \frac{1}{3} \delta_{ij} R_{kk}^m = -T \frac{2}{3} C_3 R_{ik}^m \overline{S_{ij}} \quad (5.2.98)$$

時間スケール $T$ は、式(5.2.94)で表されるSGSレイノルズ応力のモデル化の際の時間スケール $T$ との類推から、

$$T = \frac{C_4 \overline{\Delta}}{\sqrt{R_{kk}^m}} \quad (5.2.99)$$

と置き、式(5.2.98)右辺の修正SGSレイノルズ応力の垂直成分に対してScale similarity則を導入すると、修正SGSレイノルズ応力 $R_{ij}^m$ は次のようにモデル化される。

$$R_{ij}^m - \frac{1}{3} \delta_{ij} R_{kk}^m = -2C_4 \overline{\Delta} \sqrt{(\overline{u_k - u_k})(\overline{u_k - u_k})} \overline{S_{ij}} \quad (5.2.100)$$

従って、修正SGSレイノルズ応力に対するモデル式は、SGSレイノルズ応力のモデル式(5.2.95)と等価となる。

一方、より一般的に、SGS応力 $\tau(u_i, u_j) = \overline{u_i u_j} - \overline{u_i} \overline{u_j} = \tau_{ij}$ の輸送方程式(5.1.34)からも非平衡等方型渦粘性モデルを導出することができる。 $\tau_{ij} = \overline{u'_i u'_j}$ を仮定すると、式(5.1.34)右辺第4,5項の生産項は次のように近似できる。

$$P_{ij} = -\overline{u'_i u'_k} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} - \overline{u'_i u'_k} \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_k} \quad (5.2.101)$$

式(5.2.91)に対してと同様に、式(5.2.96)において、弱い非等方性を仮定するとともに、WETモデルの概念に基づき、SGSレイノルズ応力の評価式を導出すると以下のようになる。

$$\overline{u'_i u'_j} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \overline{u'_k u'_k} = -T \frac{2}{3} C_1 \overline{u'_k u'_k} \overline{S_{ij}} \quad (5.2.102)$$

上式と式(5.2.95)の相違点は、ひずみテンソルに対してグリッドフィルターが1重か2重かのみで

ある。SGS応力に対するモデル式(5.3.102)は、SGSレイノルズ応力に対するモデル式(5.2.95)よりも一般的な渦粘性近似の概念に即していると考えられるが、式(5.2.95)は2重フィルターが施されるため、より明白なスケール分離がされていると解釈する事もできる(坪倉 1996)。

モデル係数値  $C$  の決定手法として、Yoshizawa *et al.* (1996) は、Germano *et al.* (1991) の Dynamic procedure を用いている。式(5.2.49)で表される STS 応力  $T_{ij}$  中の STS レイノルズ応力項  $R_{ij}^T$  に対して、修正 SGS レイノルズ応力  $R_{ij}^m$  と同様なモデルリング手法を適用すると、STS レイノルズ応力項  $R_{ij}^T$  は、以下のようにモデル化される。

$$R_{ij}^T - \frac{1}{3} \delta_{ij} R_{kk}^T = -2C \bar{\Delta} \sqrt{\left( \overline{u_k - u_k} \right) \left( \overline{u_k - u_k} \right)} \bar{S}_{ij} \quad (5.2.103)$$

SGS レイノルズ応力  $R_{ij}^m$  のモデル式(5.2.100)および STS レイノルズ応力  $R_{ij}^T$  のモデル式(5.2.103)をそれぞれ、SGS 応力  $\tau_{ij}$  および STS 応力  $T_{ij}$  のモデル式

$$\tau_{ij}^r - \frac{1}{3} \delta_{ij} \tau_{kk}^r = -2C \bar{\Delta} \sqrt{\left( \overline{u_k - u_k} \right) \left( \overline{u_k - u_k} \right)} \bar{S}_{ij} \quad (5.2.104)$$

$$T_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} T_{kk} = -2C \bar{\Delta} \sqrt{\left( \overline{u_k - u_k} \right) \left( \overline{u_k - u_k} \right)} \bar{S}_{ij} \quad (5.2.105)$$

として考慮し、Germano *et al.* (1991) の Dynamic procedure を適用すると、以下のようなモデル式が構成される (Yoshizawa *et al.* 1996)。

$$C = -\frac{1}{2} \frac{\mathcal{T}_{ij} M_{ij}}{M_{ij} M_{ij}} \quad (5.2.106)$$

$$\mathcal{T}_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \mathcal{T}_{kk} = \overline{u_i u_j} - \overline{u_i} \overline{u_j} \quad (5.2.107)$$

$$M_{ij} = \bar{\Delta} \left| \alpha \sqrt{\left( \overline{u_k - u_k} \right) \left( \overline{u_k - u_k} \right)} \bar{S}_{ij} - \sqrt{\left( \overline{u_k - u_k} \right) \left( \overline{u_k - u_k} \right)} \bar{S}_{ij} \right| \quad (5.2.108)$$

$$\alpha = \frac{\bar{\Delta}}{\Delta} \quad (5.2.109)$$

この Yoshizawa *et al.* の非平衡等方型渦粘性モデルは、坪倉(1996a, b, c)によって、平行平板間内流れおよび壁面衝突噴流のラージエディシミュレーションに適用され、Smagorinsky モデルと比較して、流れ方向の平均流速および乱流強度の分布が改善されるとともに、モデルパラメータに対する依存性が減少する傾向があることが確認されている。

### 5.3 差分法による陽的フィルター操作

5.2 で紹介した Bardina *et al.* (1983) の Scale similarity モデルや Germano *et al.* (1991) の Dynamic SGS モデルとその改良型においては、グリッドフィルターとそれよりも大きなフィルタ幅を持つ



テストフィルター操作を陽的に行う必要がある。スペクトル法においては、その計算手法の特性から、フィルター関数として Sharp cutoff フィルターを用いた陽的フィルター操作の定式化は容易である。有限差分法により、フィルター操作を陽的に行う手法については、まず、堀内(1990)が Bardina モデルにおける陽的なグリッドフィルター操作を Simpson 則を用いて定式化している。また、谷口(1995)は、高波数域の Aliasing 誤差をより効果的に抑える定式化を提案している。

1次元の Top-hat フィルター操作

$$\bar{\Phi} = \frac{1}{\Delta} \int_{\Delta/2}^{\Delta/2} \Phi dx \quad (5.3.1)$$

において、被積分関数  $\Phi$  をインデックス  $i$  点周りで Taylor 展開を用いて近似すると、以下のようになる。

$$\Phi = \Phi_i + x \frac{d\Phi}{dx} + \frac{x^2}{2!} \frac{d^2\Phi}{dx^2} + \frac{x^3}{3!} \frac{d^3\Phi}{dx^3} + \frac{x^4}{4!} \frac{d^4\Phi}{dx^4} + \dots \quad (5.3.2)$$

上式を式(5.3.1)に代入すると、フィルター関数として Top-hat フィルターを仮定したフィルター操作は、以下のように近似される。

$$\bar{\Phi} = \Phi_i + \frac{\bar{\Delta}^2}{24} \frac{d^2\Phi}{dx^2} + \frac{\bar{\Delta}^4}{1920} \frac{d^4\Phi}{dx^4} + \dots \quad (5.3.3)$$

ここで、簡単のため、格子幅  $h$  は等間隔であるとし、2階微分に対して2次精度中心差分

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} = \frac{\Phi_{i-1} - 2\Phi_i + \Phi_{i+1}}{h^2} + O(h^2) \quad (5.3.4)$$

を適用すると、以下のような差分式が得られる。

$$\bar{\Phi} = \Phi_i + \frac{\bar{\Delta}^2}{h^2} \frac{\Phi_{i-1} - 2\Phi_i + \Phi_{i+1}}{24} + O(\bar{\Delta}^2 h^2) + O(\bar{\Delta}^4) \quad (5.3.5)$$

上式は、誤差の Leading term が  $\bar{\Delta}^2 h^2$  と  $\bar{\Delta}^4$  のオーダーであるため、フィルター関数として Top-hat フィルターを仮定したフィルター操作の空間4次精度の差分式として解釈できる。また、堀内(1990)と同様に、式(5.3.1)の積分を Simpson 則を用いて評価した場合も式(5.3.5)と全く同じ差分式が構成される。他次元のフィルター操作は、式(5.3.5)を各座標方向に順次適用すればよい。

式(5.3.3)において、高次の中心差分式を適用することにより、さらに高次のフィルター操作差分式が構成可能である。例えば、Top-hat フィルター操作の6次精度差分式は、2階微分の4次精度中心差分および4階微分の2次精度中心差分

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} = \frac{-\Phi_{i-2} + 16\Phi_{i-1} - 30\Phi_i + 16\Phi_{i+1} - \Phi_{i+2}}{12h^2} + O(h^4) \quad (5.3.6)$$

$$\frac{d^4\Phi}{dx^4} = \frac{\Phi_{i-2} - 4\Phi_{i-1} + 6\Phi_i - 4\Phi_{i+1} + \Phi_{i+2}}{h^4} + O(h^2) \quad (5.3.7)$$

を式(5.3.3)に適用して、以下のように構成される。

$$\begin{aligned} \bar{\Phi} = \Phi_i + \frac{\bar{\Delta}^2 - \Phi_{i-2} + 16\Phi_{i-1} - 30\Phi_i + 16\Phi_{i+1} - \Phi_{i+2}}{h^2} \\ + \frac{\bar{\Delta}^4 \Phi_{i-2} - 4\Phi_{i-1} + 6\Phi_i - 4\Phi_{i+1} + \Phi_{i+2}}{h^4} + O(\bar{\Delta}^2 h^4) + O(\bar{\Delta}^4 h^2) + O(\bar{\Delta}^6) \end{aligned} \quad (5.3.8)$$

Gaussianフィルタ操作の差分式もTop-hatフィルタ操作の差分式と同様に構成可能である。  
1次元のGaussianフィルタ操作

$$\bar{\Phi} = \sqrt{\frac{6}{\pi}} \frac{1}{\bar{\Delta}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{6x^2}{\bar{\Delta}^2}\right) \Phi dx \quad (5.3.9)$$

に式(5.4.2)を代入すると、フィルタ関数としてGaussianフィルタを仮定したフィルタ操作は、以下のように近似される。

$$\bar{\Phi} = \Phi_i + \frac{\bar{\Delta}^2 d^2 \Phi}{24 dx^2} + \frac{\bar{\Delta}^4 d^4 \Phi}{1152 dx^4} + \dots \quad (5.3.10)$$

上式と式(5.4.3)を比較すると、Gaussianフィルタ操作とTop-hatフィルタ操作の近似式は、 $\bar{\Delta}^2$ のオーダーまで同じ形式であることがわかる。従って、Gaussianフィルタ操作の空間4次精度の差分式は、式(5.4.5)と同じ形式で構成される。

Gaussianフィルタ操作の6次精度差分式は、式(5.4.6)および式(5.4.7)を式(5.4.10)に代入して以下のように構成される。

$$\begin{aligned} \bar{\Phi} = \Phi_i + \frac{\bar{\Delta}^2 - \Phi_{i-2} + 16\Phi_{i-1} - 30\Phi_i + 16\Phi_{i+1} - \Phi_{i+2}}{h^2} \\ + \frac{\bar{\Delta}^4 \Phi_{i-2} - 4\Phi_{i-1} + 6\Phi_i - 4\Phi_{i+1} + \Phi_{i+2}}{h^4} + O(\bar{\Delta}^2 h^4) + O(\bar{\Delta}^4 h^2) + O(\bar{\Delta}^6) \end{aligned} \quad (5.3.11)$$

陽的フィルタ操作においては、Aliasing誤差を抑えるために計算格子の最大波数  $k = \pi/h$  のモードが十分除去されていることが望ましい(谷口 1995)。式(5.4.3)において、格子幅とフィルタ幅の比  $\Delta h$  が小さい場合、最大波数モードの除去が十分ではないことが、谷口(1997)により示されている。これに対して、谷口(1995)は、偶数、奇数ノードの重み和を等しくした、次式のような陽的フィルタ操作を提案している。

$$\begin{aligned} \bar{\Phi} = \Phi_i + 6 \frac{\Phi_{i-1} - 2\Phi_i + \Phi_{i+1}}{24} + \left(\frac{\bar{\Delta}^2}{h^2} - 6\right) \frac{\Phi_{i-2} - 2\Phi_i + \Phi_{i+2}}{96} \\ + O(\bar{\Delta}^2 h^2) + O(\bar{\Delta}^4) \end{aligned} \quad (5.3.12)$$

この陽的フィルター操作の定式化は、一様等方性乱流のラージエディシミュレーションに適用され、式(5.4.3)と比較して改善されることが確認されている(谷口, 1995)。

#### 5.4 一般座標系におけるラージエディシミュレーションの基礎方程式

一般座標系におけるラージエディシミュレーションの基礎方程式の定式化には、

- (i) 座標変換とフィルター操作の取り扱い
- (ii) フィルター操作と微分操作の交換性

といったことが問題となる。一般座標系におけるラージエディシミュレーションのFiltered Navier-Stokes 方程式の導出は、座標変換とフィルター操作の順番から、図5.4.1で示される3つの方法が考えられる。最終的に得られる方程式は同じであるが、導出方法が違うため、実際の計算において陽的フィルター操作やSGSモデル等の取り扱いに注意すべき点が生じる。以下では、それぞれのケースにおけるFiltered Navier-Stokes 方程式の導出を行う。

##### 5.4.1 Case 1, 座標変換⇒フィルター操作(計算空間)

Case 1の場合、まず物理空間におけるNavier-Stokes方程式に対して座標変換が施された後、計算空間にてフィルター操作が施される。

物理空間におけるNavier-Stokes方程式

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j u_i) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad (5.4.1)$$

に対して、座標変換を施すと、以下のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{u_i}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_m} (U_m u_i) = -\frac{\partial}{\partial \xi_m} \left( \frac{1}{J} \frac{\partial \xi_m p}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left( \nu G^{mn} \frac{\partial u_i}{\partial \xi_n} \right) \quad (5.4.2)$$

上式に対し、計算空間におけるフィルター操作

$$\bar{f}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \prod_{m=1}^3 G_m(\xi_m - \xi'_m, \Delta_i) f(\xi'_1, \xi'_2, \xi'_3, t) d\xi'_1 d\xi'_2 d\xi'_3 \quad (5.4.3)$$

を施すと、以下のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\bar{u}_i}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_m} (\bar{U}_m \bar{u}_i) = -\frac{\partial}{\partial \xi_m} \left( \frac{1}{J} \frac{\partial \xi_m \bar{p}}{\partial x_i} \right) + \nu \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left( \bar{G}^{mn} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \xi_n} \right) - \frac{\partial}{\partial \xi_m} (\bar{U}_m \bar{u}_i - \bar{U}_m u_i) \quad (5.4.4)$$

上式において、フィルター操作は、計算空間において一様なフィルターを仮定しているため、計算空間におけるフィルター操作と計算空間における微分との交換性

$$\left( \frac{\partial \bar{f}}{\partial \xi_m} \right) = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \xi_m} \quad (5.4.5)$$

には問題ない。ここで、ヤコビアンやメトリックといった座標変換に関係する量の空間的変動が速度や圧力の空間的変動と比較すると十分なめらかであると仮定し、フィルター操作の積分においてヤコビアンやメトリックを定数として取り扱えると仮定し、以下のような近似を導入する (Kaltenbach, 1993)。

$$\frac{\partial}{\partial \xi_m} \left( \frac{1}{J} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} f \right) = \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left( \frac{1}{J} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \bar{f} \right) \quad (5.4.6)$$

上式の近似を式(5.4.4)に適用すると、一般座標系におけるFiltered Navier-Stokes 方程式は以下のよう  
に得られる。

$$\frac{1}{J} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left( \frac{1}{J} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \bar{u}_j \bar{u}_i \right) = - \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left( \frac{1}{J} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \bar{p} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left( \nu G^{mn} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \xi_n} \right) - \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left( \frac{1}{J} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \tau_{ij} \right) \quad (5.4.7)$$

$$\tau_{ij} = \bar{u}_i \bar{u}_j - \bar{u}_i \bar{u}_j \quad (5.4.8)$$

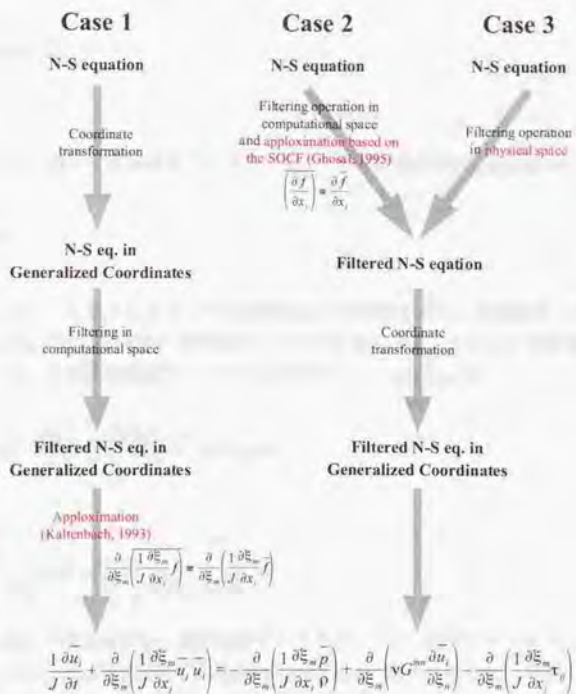


FIGURE 5.4.1 Derivation of the filtered Navier-Stokes equation in generalized coordinates.

## 5.4.2 Case 2, フィルター操作(計算空間)⇒座標変換

Case 2においては, Case 1の場合と異なり, まず物理空間における Navier-Stokes 方程式に対してフィルター操作が施され, Filtered Navier-Stokes 方程式が導かれる. しかし, フィルター操作は計算空間において一様なフィルターを仮定しているため, 数学的に厳密にはフィルター操作と微分との交換性は成立しない.

$$\overline{\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)} \neq \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i} \quad (5.4.9)$$

これに対し, Ghosal and Moin (1995)は, 新しいフィルター操作(2次精度交換フィルター, Second-Order Commuting Filter, SOCF)の定義に基いて, 非一様なフィルター操作と微分の交換性の誤差がフィルター幅の2乗のオーダーであることを数学的に証明している. Ghosal(1995a)の2次精度交換フィルターは以下のように定義される.

一般的に, 領域  $([a, b], a \leq x \leq b)$  における任意の不等間隔格子は, 任意の写像関数を用いて領域  $[-\infty, \infty]$  における間隔  $\Delta$  の等間隔格子に写像できる.

$$\xi = f(x) \quad (5.4.10)$$

ここで, 写像関数  $f$  は,

$$f(a) = -\infty \quad (5.4.11)$$

$$f(b) = \infty \quad (5.4.12)$$

であるような単調で微分可能な関数であるとする. 不等間隔格子の格子間隔  $\delta x$  は, 次式で表される.

$$\delta(x) = \frac{\Delta}{f'(x)} \quad (5.4.13)$$

不等間隔座標において定義されるある任意関数  $\psi(x)$  を等間隔座標  $\xi$  に変数変換して, 新たな変数  $\phi(\xi)$  を得た後,  $\phi(\xi)$  に対して通常の等間隔フィルター操作を施し, それを不等間隔座標に変数変換する事により, 2次精度交換フィルターが次のように定義される.

$$\bar{\psi}(x) = \bar{\phi}(\xi) = \frac{1}{\Delta} \int_{-\infty}^{\infty} G\left(\frac{f(x) - \eta}{\Delta}\right) \phi(\eta) d\eta \quad (5.4.14)$$

または,

$$\bar{\psi}(x) = \int_a^b G\left(\frac{f(x) - f(y)}{\Delta}\right) \psi(y) f'(y) dy \quad (5.4.15)$$

式(5.4.15)を  $x$  に関して微分を行い, 部分積分を行うことにより, 微分とフィルター操作の交換性の誤差を評価すると,  $O(\Delta^2)$  と評価できる(Ghosal and Moin 1995). 従って, 実際のラージエディシミュレーションの計算において, 微分を2次精度の差分スキームで近似した場合, フィルター操作と微分の交換性の誤差は, 差分スキームの誤差とほぼ同じオーダーであるので, 計算誤差

の範囲内ではフィルター操作が微分操作と交換可能であると見なすことができる。さらにGhosal and Moin (1995)は、高次精度のLES計算において交換性の誤差が離散化の誤差のオーダーを越えないように、漸近級数展開を用いて交換性の誤差を任意精度に高次化する修正法を提案している。また、van der Ven (1995)は、フィルター操作と微分操作の交換性が任意精度で成立する不等間隔非直交系における陽的フィルター操作を構成している。しかし、van der Ven (1995)の陽的フィルター操作は、フィルター関数に制限があるため非周期的境界での取り扱いに問題があった。Vasilyev and Lund (1996)は、こうした問題を克服し、任意の複雑形状乱流場のラージエディシミュレーションに適した陽的フィルター操作を構成している。

Ghosal and Moin (1995)、van der Ven (1995)およびVasilyev and Lund (1996)の交換フィルターの概念に基づくと、Filtered Navier-Stokes 方程式は、以下のように得られる。

$$\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_j \bar{u}_i) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (5.4.16)$$

上式に座標変換を施すと、結局、一般座標系における Filtered Navier-Stokes 方程式は Case 1 の場合と同じ式(5.5.7)となる。

#### 5.4.3 Case 3. 座標変換⇒フィルター操作(物理空間)

Case 3において、まず Navier-Stokes 方程式に対してフィルター操作が施されることは Case 2 と同じである。しかし、そのフィルター操作は、計算空間ではなく物理空間において一様なフィルターが仮定される。

物理空間における Navier-Stokes 方程式(5.5.1)に対して、物理空間においてフィルター操作

$$\bar{f}(x_1, x_2, x_3, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{j=1}^3 G(x_j - x'_j, \Delta_j) f(x'_1, x'_2, x'_3, t) dx'_1 dx'_2 dx'_3 \quad (5.4.17)$$

を施すと、式(5.5.16)が得られる。この場合、物理空間におけるフィルター操作と物理空間における微分との交換性

$$\left( \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i} \quad (5.4.18)$$

には問題ない。式(5.4.16)に座標変換を施すと、結局、一般座標系における Filtered Navier-Stokes 方程式は Case 1 および 2 の場合と同じ式(5.4.7)となる。ただし、Case 1 と 2 では計算空間にて一様なフィルターが仮定されていたのに対し、Case 3 では、物理空間において一様なフィルターが仮定されていることに注意する。Dynamic SGSモデルなどの陽的なフィルター操作を必要とする場合、その陽的フィルター操作は、式(5.3.3)または式(5.3.10)を座標変換して適用すれば物理空間において一様なフィルター操作を施すことと解釈できるが、その妥当性は明らかではない。また、実際の複雑形状乱流場においては、解像すべき渦の最小スケールが流れの領域によって異なっているので、流れ場全域において等幅フィルターを施すことは適切ではないと考えられる (Vasilyev and Lund 1997)。

## 5.5 一般座標系における SGS モデル

渦粘性タイプのSGSモデルにおいては、フィルター操作の影響として長さスケールを指定する必要があるが、アスペクト比の大きい非等方な計算格子の使用を考えた場合、この長さスケールの定義が問題となる。この問題に対して、Scotti *et al.* (1993)は等方性乱流のエネルギー平衡仮説から、格子の非等方性を考慮するGeneralized Smagorinskyモデルを提案している。このモデルは、次式で表されるように、壁付近での乱流粘性の漸近挙動を補正するため壁面減衰関数を導入することと類似してSGS応力 $\tau_{ij}$ の長さスケールを格子アスペクト比の関数 $f(a_1, a_2)$ を用いて補正することで格子非等方性の影響を考慮したモデルである。

$$\tau_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\tau_{kk} = -2\left[C_s\bar{\Delta}_{eq}f(a_1, a_2)\right]^2\bar{S}_{ij} \quad (5.5.1)$$

ここで、 $C_s$ はSmagorinsky定数であり、 $\bar{\Delta}_{eq}$ は等価長さスケール(equivalent length scale, Deardorff 1970)であり次のように表される。

$$\bar{\Delta}_{eq} = (\bar{\Delta}_1\bar{\Delta}_2\bar{\Delta}_3)^{1/3} \quad (5.5.2)$$

また、格子アスペクト比は、次のように与えられる。

$$a_1 = \frac{\bar{\Delta}_1}{\bar{\Delta}_{\max}} \quad (5.5.3)$$

$$a_2 = \frac{\bar{\Delta}_2}{\bar{\Delta}_{\max}} \quad (5.5.4)$$

$$\bar{\Delta}_{\max} = \max\{\bar{\Delta}_1, \bar{\Delta}_2, \bar{\Delta}_3\} \quad (5.5.5)$$

ここで、関数 $f(a_1, a_2)$ は、混合 Gauss-Gauss-Kronrod 則(mixed Gauss-Gauss-Kronrod rule)を用いて数値的に次のように評価される。

$$f(a_1, a_2) = (a_1 a_2)^{-1/3} \left| \frac{L(\bar{\Delta})}{L(\bar{\Delta}, \bar{\Delta}, \bar{\Delta})} \right| \quad (5.5.6)$$

ここで、 $L(\Delta)$ はSGSモデル中の長さスケールを表している。さらに、関数 $f(a_1, a_2)$ を簡単に評価するために、 $a_1$ と $a_2$ の広い範囲で $f(a_1, a_2)$ の分布を再現するように経験的な近似式を構成すると、以下のように得られる。

$$f(a_1, a_2) \cong 1.736(a_1 a_2)^{1/3} \left[ 4P_1(\beta_1)a_1^{1/3} + 0.222P_2(\beta_1)a_1^{5/3} + 0.077P_3(\beta_1)a_1^{11/3} - 3\beta_1 + 4P_1(\beta_2)a_2^{-1/3} + 0.222P_2(\beta_2)a_2^{5/3} + 0.077P_3(\beta_2)a_2^{11/3} - 3\beta_2 \right]^{-3/4} \quad (5.5.7)$$

$$\beta_1 = \arctan\left(\frac{a_1}{a_2}\right), \quad \beta_2 = \arctan\left(\frac{\bar{a}_2}{a_1}\right) \quad (5.5.8)$$

ここで、多項式  $P_i (i=1,2,3)$  は以下のように定義される。

$$P_1(z) = 2.5P_3(z) - 1.5(\cos z)^{23} \sin z \quad (5.5.9)$$

$$P_2(z) = 0.986z + 0.073z^2 - 0.418z^3 + 0.120z^4 \quad (5.5.10)$$

$$P_3(z) = 0.976z + 0.188z^2 - 1.169z^3 + 0.755z^4 - 0.151z^5 \quad (5.5.11)$$

式(5.5.7)で与えられる近似式の最大誤差は、全領域において4%以下である (Scotti *et al.* 1993)。

一方、Germano *et al.* (1991) が提案した Dynamic procedure は、長さスケールを陽的に指定する必要がなく流れ場の状況によって長さスケールが自動的に決定される手法であると考え、一般座標系においては、流れ場の状況だけでなく計算格子の不等間隔非直交性およびアスペクト比の影響も含めて長さスケールが自動的に決定されていると解釈できる。そのように考えると、次の段階として、Dynamic procedure によって決定された長さスケールが計算格子の非等方性の影響を正しく考慮しているかが疑問として生じる。この疑問に対して、Scotti *et al.* (1996) は、従来の Smagorinsky モデル、Generalized Smagorinsky モデル (Scotti *et al.* 1993) および Dynamic SGS モデルのそれぞれの場合において、等方性乱流を非等方な計算格子を用いて正しく計算できるかどうかを検証している。その結果、流れの大きな構造の再現性に関しては、全てのモデルがほぼ満足できる程度であったが、カットオフ波数に近いスケールにおけるモデルの性能に関しては、ハンケーキ型計算格子(2つの格子アスペクトのうち、1つの格子アスペクト比が1から極端に大きいかまたは小さい)において従来の Smagorinsky モデルが、またペンシル型計算格子(2つの格子アスペクト比が1から極端に大きいかまたは小さい)において Dynamic SGS モデルに問題があることが明らかにされた。ペンシル型の非等方計算格子において、Dynamic SGS モデルがうまく作用しない原因として、Dynamic SGS モデルは解像できる最も小さいスケールの情報を用いて未知数であるモデル係数を決定しているが、そのスケールが方向により異なることによって解像される非線形的相互作用が影響され、部分的に流れが2次元的になってしまっていることが考えられている (Scotti *et al.* 1996)。

また、一般座標系において Dynamic procedure を用いる場合には、グリッドフィルターとテストフィルターとの間でフィルター関数の相似性が成立しているかどうかの問題となる。まず、計算空間で一様なフィルター操作を仮定した Case 1 および Case 2 においてこの問題を検討する。図 5.5.1(b) のように計算空間上で一様なグリッドフィルターとテストフィルターとの間の相似性が成り立つ一様なフィルター操作は、計算格子が滑らかであれば、図 5.5.1(a) のように物理空間上でも相似性がほぼ成り立っていると考えられる。次に、Case 3 においては、物理空間において一様なフィルター操作が導入されているが、そのフィルター操作の定式化が正しく行われ、グリッドフィルターとテストフィルターとの間で同じフィルター関数が仮定されていれば相似性については問題ない。



## 5.6 一般座標系におけるラージエディシミュレーション手法の選定

## 5.6.1 解析手法概要

5.4および5.5では、ラージエディシミュレーションを一般座標系に拡張する際に問題となる事項について考察した。ここでは、実際にチャンネル内乱流の計算を行い、一般座標系におけるラージエディシミュレーションの手法を選定する。

計算方法の概要は、4.3.1とほぼ同様である。離散化手法としては一般座標系における空間2次精度修正コロケート格子系差分スキームを用いる。4.3の検証から明らかになったように、この方法は、任意の不等間隔非直交計算格子を用いた場合でも、運動エネルギーの保存特性の誤差がほぼ満足できる範囲であり、平均流速分布、乱流強度およびReynolds応力収支といった量が計算格子の不等間隔・非直交性の影響をほとんど受けない優れた特性を持つ。従って、この方法にSGSモデルを導入し不等間隔・非直交性の異なる計算格子を用いて計算を行った結果、統計量に差違が生じた場合、その違いはSGSモデルによるものであると解釈できる。SGSモデルとしては、Smagorinskyモデル(図中、SMと略記)、Dynamic SGSモデル(DS)、Plane平均型Dynamic mixedモデル(DM)およびLagrangian平均型Dynamic mixedモデル(LDM)が用いられる。

計算格子の不等間隔(壁方向のみ、流れ方向およびスパン方向は等間隔)・非直交性の影響を系統的に調べるため、図5.6.1で示されるような不等間隔非直交性の異なる5つの計算格子が使用される。計算格子の記号として、不等間隔直交格子は $CnS0(n=1\sim 3)$ で表され、 $n$ が小さいほど壁から第1格子点までの距離が小さくなり不等間隔の度合いが大きい。また、不等間隔非直交格子 $C2Sn(n=1\sim 2)$ は、壁から第1格子点までの距離が $C2S0$ と等しく、 $n$ が大きくなるほど計算格子の非直交性が強くなる。ただし、壁付近では計算格子はほぼ直交している。壁方向の格子点配置には双曲線正接(Tangent hyperbolic)分布関数を用いられている。計算格子の概要を表5.6.1に示す。

5.4において、一般座標系におけるラージエディシミュレーションの基礎方程式の取り扱いに

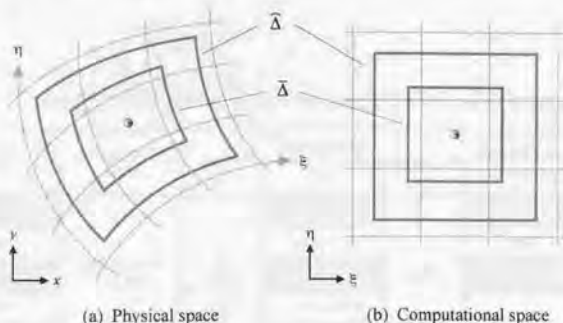


FIGURE 5.5.1 The similarity of filter function between the grid and the test filter operation in generalized coordinates.

関して、3通りの方法が再確認された。物理空間において一様で等幅であるフィルター操作を仮定するCase 3は、陽的フィルター操作の取り扱いや流れ場全域において同じ幅のフィルターを施すことの妥当性が明らかになっていない。従って、ここでは、計算空間において一様なフィルター操作を仮定するCase 1またはCase 2を選択する。さらに、Case 1とCase 2を比較した場合、実質的に得られた基礎方程式系およびその定式化には全く違いはないものの、近似の誤差評価が明らかになっているCase 2を採用した方が計算精度を論じる上で都合がよいと考える。従って、ここでは、名目上、Case 2に従って一般座標系のラージエディシミュレーションが行われていると考える。

Dynamic procedureが導入されているSGSモデルを適用した計算においては、陽的フィルター操作が必要となる。本研究では、5.4において示された谷口(1995)の4次精度差分フィルターを採用する。陽的なグリッドフィルターおよびテストフィルター操作は、それぞれ以下の式で与えられる。

$$\bar{\Phi} = \Phi_i + 6 \frac{\Phi_{i-1} - 2\Phi_i + \Phi_{i+1}}{24} + (\gamma_G - 6) \frac{(\Phi_{i-2} - 2\Phi_i + \Phi_{i+2})}{96} \quad (5.6.1)$$

$$\bar{\Phi} = \Phi_i + 6 \frac{\Phi_{i-1} - 2\Phi_i + \Phi_{i+1}}{24} + (\gamma_T - 6) \frac{(\Phi_{i-2} - 2\Phi_i + \Phi_{i+2})}{96} \quad (5.6.2)$$

式(5.6.1)および式(5.6.2)は、それぞれ1次元のフィルター操作を表す式であるが、3次元の場合、各方向に順次フィルター操作を施す。ここで、テストフィルター幅と計算空間における格子間隔との比 $\gamma_T = \bar{\Delta} / \Delta \xi$  ( $\Delta \xi$ : 計算空間における格子間隔、実際の計算上では $\Delta \xi = 1$ とされる)は谷口(1995)および坪倉(1996)によって最適化された $\gamma_T = \sqrt{6}$ を使用する。また、式(5.3.35)、式(5.3.53)および式(5.3.109)で与えられるテストフィルター幅とグリッドフィルター幅の比 $\alpha = \bar{\Delta} / \Delta$ をモデルパラメータとして指定する必要があるが、本研究では、Germano *et al.* (1991)によって採用された $\alpha = 2$ とする。フィルター関数としてGaussianフィルターを想定した場合、異なるフィルター幅のフィルター操作の間には以下のような関係がある。

$$\bar{\Delta}^2 = \bar{\Delta}^+ + \bar{\Delta}^- \quad (5.6.3)$$

TABLE 5.6.1 The specification of the computational grids for a turbulent channel flow.

Grid	Number of grid points	Mesh resolution			Maximum aspect ratio (= $x^*/y^*_{\min}$ )	Orthogonality (degree)
		$x^*$	$y^*$	$z^*$		
C1S0	33 × 65 × 33 = 70,785	35.3	0.457 ~ 13.89	17.7	77.2	90.0
C2S0			1.001 ~ .2		35.3	
C3S0			2.00 ~ 8.89		17.7	
C2S1			1.00 ~ 11.9		35.3	62.9
C2S2			1.00 ~ 12.0			48.5

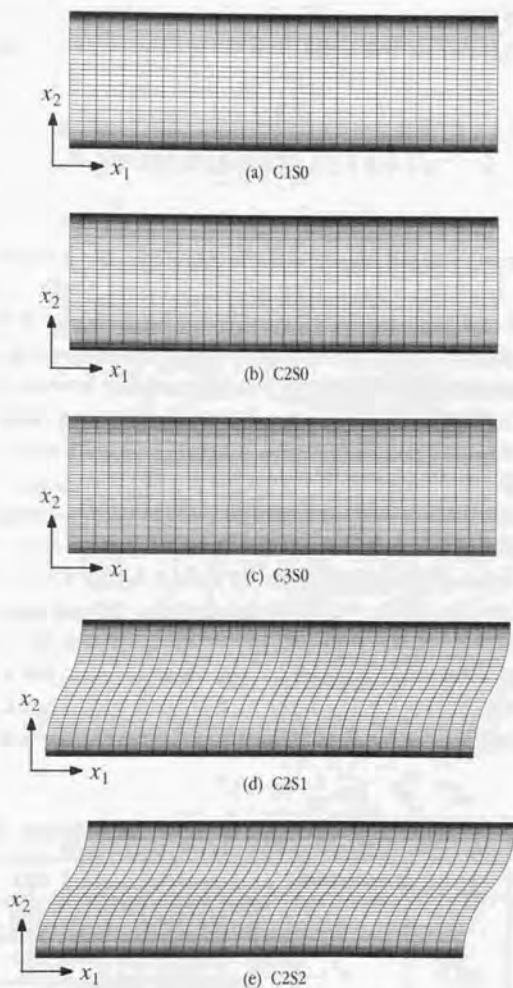


FIGURE 5.6.1 The computational grids for turbulent channel flow with different nonuniformity and nonorthogonality.

従って、グリッドフィルター幅と格子間隔との比  $\gamma_G = \bar{\Delta} / \Delta \xi$  は、 $\gamma_G = \sqrt{2}$  となる。

Lagrangian dynamic mixed モデルの場合、新たに  $I_{LM}$  と  $I_{MM}$  の輸送方程式(5.2.82)および式(5.2.83)を解かなければならない。この輸送方程式の計算はあまり計算精度を必要としないと考えられるので、対流項に1次精度風上差分を用い、時間進行法としてEuler陽解法を用いて計算する。従って、Dynamic SGS モデルや Dynamic mixed SGS モデルの場合と比較して、新たに  $I_{LM}$  と  $I_{MM}$  の輸

送方程式を解くことによる計算量の増加はそれほど大きくない。ラグランジュ平均の緩和時間スケール  $T$  は, Meneveau *et al.* (1996) が推奨する(5.3.84g)を採用し, 以下のように与える。

$$T = \theta \Delta \left[ I_{LM} I_{MM} \right]^{-1/8} \quad (5.6.3)$$

上式中,  $\theta$  は無次元係数であり, Meneveau *et al.* (1996) の推奨値  $\theta=1.5$  を使用する。

実行されるチャンネル内流れの計算条件が表 5.5.2 にまとめられている。

### 5.6.2 各種 SGS モデルの比較

SGS モデルを決定するため, まず, 各種の SGS モデルの計算結果を比較する。SGS モデルとして Smagorinsky モデル(図中 SM2; 2 は 2 次精度の計算であることを示す), Dynamic SGS モデル(DS2), Plane 平均型 Dynamic mixed モデル(DM2)および Lagrangian 平均型 Dynamic mixed モデル(LDM2)を用いた場合の流れ方向の時間平均流速分布を図 5.6.2 に示す, SGS モデル以外の条件は全て等しい。まず, 従来から指摘されているように離散化の精度が 2 次精度の場合, Dynamic SGS モデルは対数則領域において流速が DNS や Smagorinsky モデルの計算結果と比較して大きくなる傾向が本計算でも再確認される。この傾向は, Plane 平均型 Dynamic mixed モデルによって改善されている。一方, Lagrangian Dynamic mixed モデルの場合, Plane 平均型と比較して, 若干対数則で流速が大きく DNS との対応が悪いが, Dynamic SGS モデルよりは改善されている。

各種 SGS モデルを用いた場合の乱流強度を図 5.6.3 に示す。ここで, LES における乱流強度は, 3.8.1 で述べられたように GS 成分に加えて SGS 成分が近似的に求められ加えられている。乱流強度の場合も, Dynamic SGS モデルは流れ方向成分を過大に, その他の成分を過小評価し最も DNS との対応が悪い。一方, Dynamic mixed モデルは, Plane 平均型およびラグランジュ平均型ともに, 流れ方向乱流強度が減少した分その他の成分に再分配され, DNS の結果に近くなり改善されている。これは, 修正 Leonard 項の効果が影響しているものと考えられる。また, Dynamic mixed モデルにおいて, モデル係数の平均化手法を Plane 平均からラグランジュ平均に変えた場合, 乱流

TABLE 5.6.2 The computational cases of large eddy simulation of turbulent channel flow using various SGS models.

Case	SGS model	Discretization	Grid	Dt
SM2	Smagorinsky	the second-order accurate modified FDS in collocated grid layout	C1S0	0.00025
DS2	Dynamic SGS			
DM2	Dynamic mixed			
LDM2 (C1S0)	Lagrangian dynamic mixed		C2S0	
LDM2 (C2S0)			C3S0	
LDM2 (C3S0)			C2S1	
LDM2 (C2S1)			C2S2	
LDM2 (C2S2)				

強度の分布に大きな違いは見られない。

Dynamic procedureに基づくSGSモデルを用いた場合のモデル係数値 $C$ の分布を図5.6.3に示す。同図中、太実線はSmagorinsky定数 $C_s=0.1$ に壁面減衰関数をかけた値を示されている。 $y^+$ が約12以下の粘性底層領域では、3種類のSGSモデルにおいてモデル係数値の分布にあまり大きな違いはなく、壁面近傍の漸近挙動を適切に予測している。一方、 $y^+$ が20以上では、Dynamic SGSモデルにおけるモデル係数値が大きく、Plane平均型およびラグランジュ平均型Dynamic mixedモデルのモデル係数値は減少している。これは、後者のケースにおいて、ベースモデルがMixedモデル

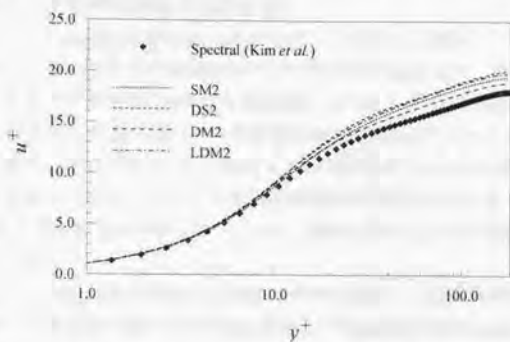


FIGURE 5.6.2 Time averaged streamwise velocity profiles by the various SGS models.

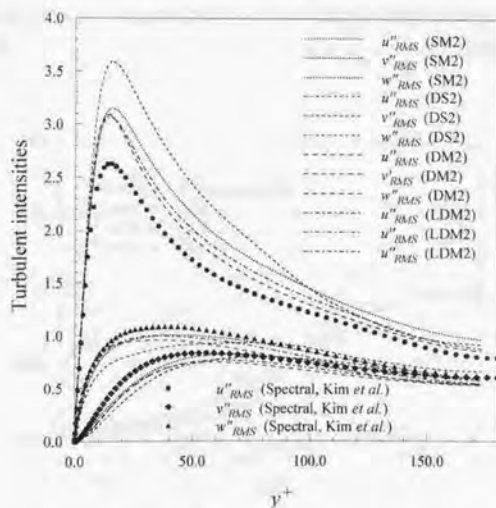


FIGURE 5.6.3 Time averaged velocity fluctuations by the various SGS models.

ルになったことによりSGSモデルが渦粘性型モデル+修正Leonard項として作用することによって、渦粘性型モデルの役割が小さくなったためであると考えられる。

以上のように、流れ方向平均流速分布や乱流強度分布といった結果から、Dynamic mixedモデルが最もDNSの結果に近く、SGSモデルとして高精度であると判断される。ここでは、複雑な形状のラージエディシミュレーション方の確立を想定しているため、流れ場に一樣な方向がない複雑形状乱流場にも適用可能なLagrangian dynamic mixedモデルを一般座標系におけるSGSモデルとして採用する。

### 5.6.3 計算格子の不等間隔非直交性の影響

SGSモデルとしてLagrangian dynamic mixedモデルを使用し5種類の不等間隔非直交性の異なる計算格子を用いて得られたモデル係数値 $C^2$ の分布を図5.6.4に示す。計算格子の不等間隔・非直交性の違いによるモデル係数 $C$ の有意な差は認められない。これは、Dynamic procedureによって流れ場の状況のみならず、計算格子の不等間隔非直交性およびアスペクト比の影響を含めて長さスケールが自動的に決定されていると考えることの妥当性を示すものである。また、特に、計算格子が不等間隔直交の場合において、不等間隔の度合いを変化させてもモデル係数値が変化しなかったことは、不等間隔方向に対してフィルター操作を施すことの妥当性も示されていることにも注意すべきである。

SGSモデルとしてLagrangian dynamic mixedモデルを使用し5種類の不等間隔非直交性の異なる計算格子を用いて得られた流れ方向平均流速および乱流強度を図5.6.6および図5.6.7に示す。Lagrangian dynamic mixedモデルの場合、SGSモデルの効果として渦粘性モデルと修正レナード項の作用があるので一概に論じることはできないが、モデル係数値 $C$ がほぼ同じであるため、流れ方向平均流速(図5.6.6)および乱流強度(図5.6.7)は計算格子の不等間隔非直交性によらずほとんど一定である。従って、ここで考えたラージエディシミュレーションの定式化は、一般座標系に

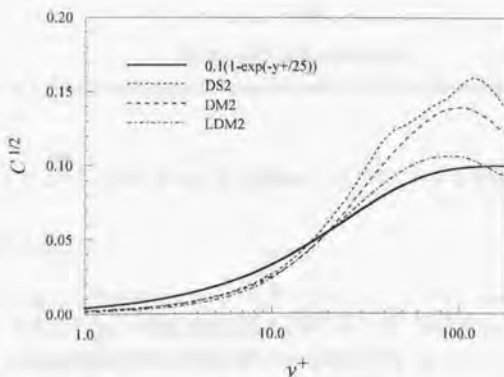
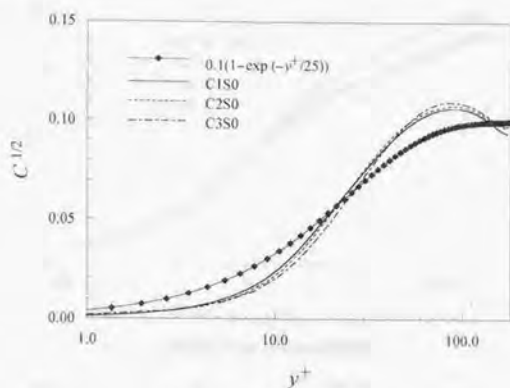
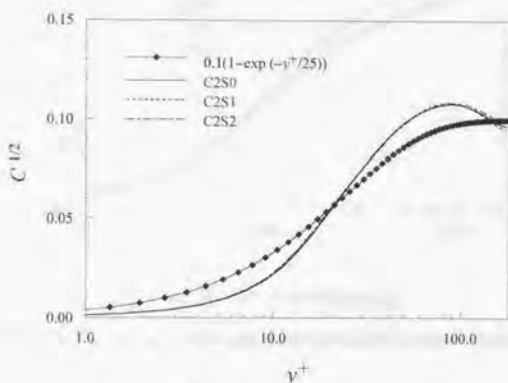


FIGURE 5.6.4 Time averaged value of Smagorinsky model coefficient by the various SGS models.



(a) The effect of nonuniformity.



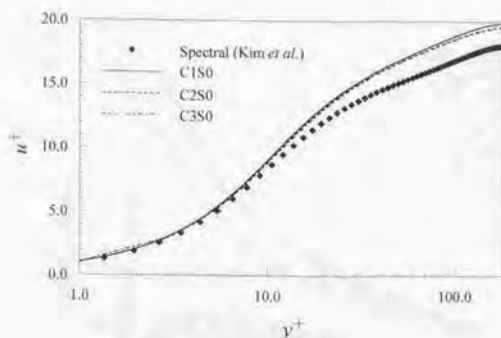
(b) The effect of nonorthogonality.

FIGURE 5.6.5 Time averaged value of Smagorinsky model coefficient by the various computational grids.

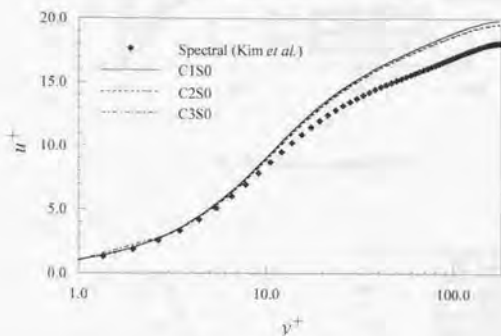
におけるラージエディシミュレーションの定式化として適切であると考える。

## 5.7 本章のまとめ

本章では、これまでに構成されたラージエディシミュレーションにおけるSGSモデルを再確認するとともに、これまであまり明確に論じられていなかった一般座標系におけるラージエディシミュレーションの問題点について考察を行った。本研究では、以下のような考えに基づき一般座標系におけるラージエディシミュレーションの定式化を行った。



(a) The effect of nonuniformity.



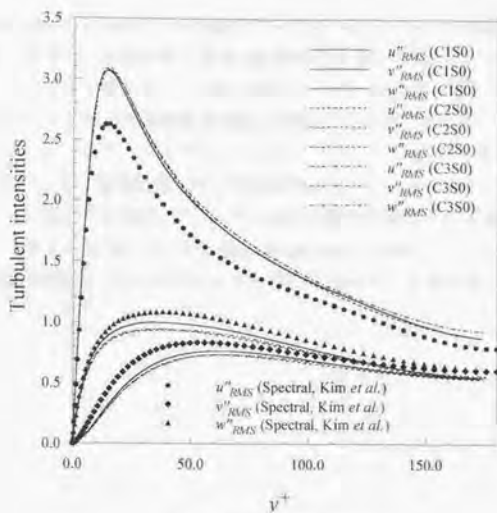
(b) The effect of nonorthogonality.

FIGURE 5.6.6 Time averaged streamwise velocity profiles by the various computational grids.

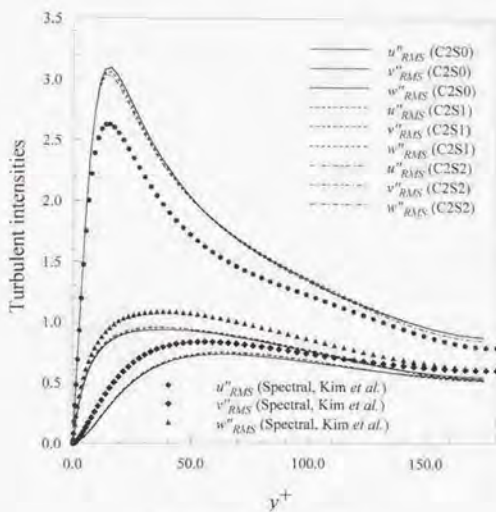
1. 物理空間における Navier-Stokes 方程式に対して、計算空間で一様なフィルター幅のフィルター操作を施す。
2. 1において、数学的に厳密にはフィルター操作と微分との交換性が成立しないが、Ghosal and Moin (1995), van der Ven (1995)および Vasilyev and Lund (1996)の交換フィルターの概念に基づき、基礎方程式の離散化精度の範囲内でフィルター操作と微分との交換性が成り立つと仮定し、Filtered Navier-Stokes 方程式を得る。
3. 物理空間における Filtered Navier-Stokes 方程式に座標変換を施し、計算空間における Filtered Navier-Stokes 方程式を導出する。

本研究で採用した一般座標系におけるラージエディシミュレーションの妥当性を検証するため、





(a) The effect of nonuniformity.



(b) The effect of nonorthogonality.

FIGURE 5.6.7 Time averaged velocity fluctuations by the various computational grids.

SGSモデルとしてLagrangian dynamic mixed SGSモデルを用いたチャンネル内乱流のラージエディシミュレーションを不等間隔・非直交性の異なる計算格子を用いて行った。その結果、チャンネル内流れという限定された流れ場においてではあるが、モデル係数値、流れ方向平均流速、乱流強度といった分布が計算格子の不等間隔非直交性に依存せずほぼ一定であった。従って、本研究で採用した一般座標系におけるラージエディシミュレーションの手法の妥当性が確認された。ただし、ここでは、基礎方程式の空間離散化は2次精度差分スキームを想定していたが、さらに高次精度の差分スキームに変更する場合、フィルター操作と微分の交換性の誤差が空間離散化の誤差のオーダーよりも大きくならないように、Ghosal and Moin (1995)、van der Ven (1995)またはVasilyev and Lund (1996)が提案しているフィルター操作を導入する必要がある。

## 目次

# 円柱周りの流れのラージエディシミュレーション

### 1. 問題の概要

円柱周りの流れのラージエディシミュレーション (LES) は、流体の運動方程式を、空間的に粗いメッシュで離散化し、時間的に粗い時間ステップで計算を行う。このとき、メッシュサイズよりも小さいスケールの流れの構造は、フィルタリングによって除去され、その影響はサブグリッドスケール (SGS) モデルによって補償される。円柱周りの流れは、典型的な非定常流れであり、円柱の前後で渦が生成され、円柱の周囲を循環する。この流れは、円柱の前後で渦が生成され、円柱の周囲を循環する。この流れは、円柱の前後で渦が生成され、円柱の周囲を循環する。

円柱周りの流れのラージエディシミュレーション (LES) は、流体の運動方程式を、空間的に粗いメッシュで離散化し、時間的に粗い時間ステップで計算を行う。このとき、メッシュサイズよりも小さいスケールの流れの構造は、フィルタリングによって除去され、その影響はサブグリッドスケール (SGS) モデルによって補償される。円柱周りの流れは、典型的な非定常流れであり、円柱の前後で渦が生成され、円柱の周囲を循環する。この流れは、円柱の前後で渦が生成され、円柱の周囲を循環する。

## 第6章

# 円柱周りの流れのラージエディシミュレーション

### 6.1 数値計算方法概要

円柱周りの流れのラージエディシミュレーションの計算方法は、第5章で検証された一般座標系におけるラージエディシミュレーションの方法とほぼ同様である。離散化手法および計算アルゴリズムには、第2章で構成した一般座標系における空間2次精度の修正コロケート格子系差分スキームを用いる。この差分スキームは、第4章で検証されたように、任意の不等間隔非直交格子において運動量および運動エネルギーの保存特性が実際の計算上ほぼ適切である。Filtered Navier-Stokes 方程式中の対流項は、運動量を厳密に保存する発散型で離散化されている。時間進行法は、対流項に2次精度 Adams-Bashforth 法、拡散項に Crank-Nicolson スキームを用いた半陰解法である。圧力方程式は、van der Vorst (1992) の Bi-CGStab 法(藤野 1991)を用いて解き、残差ベクトルの大きさが  $10^{-7}$  程度になるまで収束させる。このときの連続の式の残差は  $10^{-8}$  程度である。円柱周りの流れのラージエディシミュレーションの計算ケースを表6.1.1に示す。計算条件として、計算格子、計算領域およびモデルを変えて4ケース行った。

計算格子を図6.1.1および図6.1.2に示す。Case 1の計算格子は、総格子点数が195,536点( $101 \times 121 \times 16$ )の円筒座標系における直交格子である。Case 2~4の計算格子は、総格子点数が549,153点( $101 \times 121 \times 16$ )で、後流での解像度を改善するために円柱背後に格子点を集中的に分布させている。両計算格子ともに、最小格子幅は円柱表面における壁面垂直方向の格子間隔で  $5 \times 10^{-6}$  である。全ケースにおいて、計算格子の解像度は対流項に空間2次精度中心差分を用いた計算としては十分ではなく、実際のラージエディシミュレーションの計算において速度場に Wiggle が発生した。Wiggle 発生の影響を軽減するため、3.6で述べられ

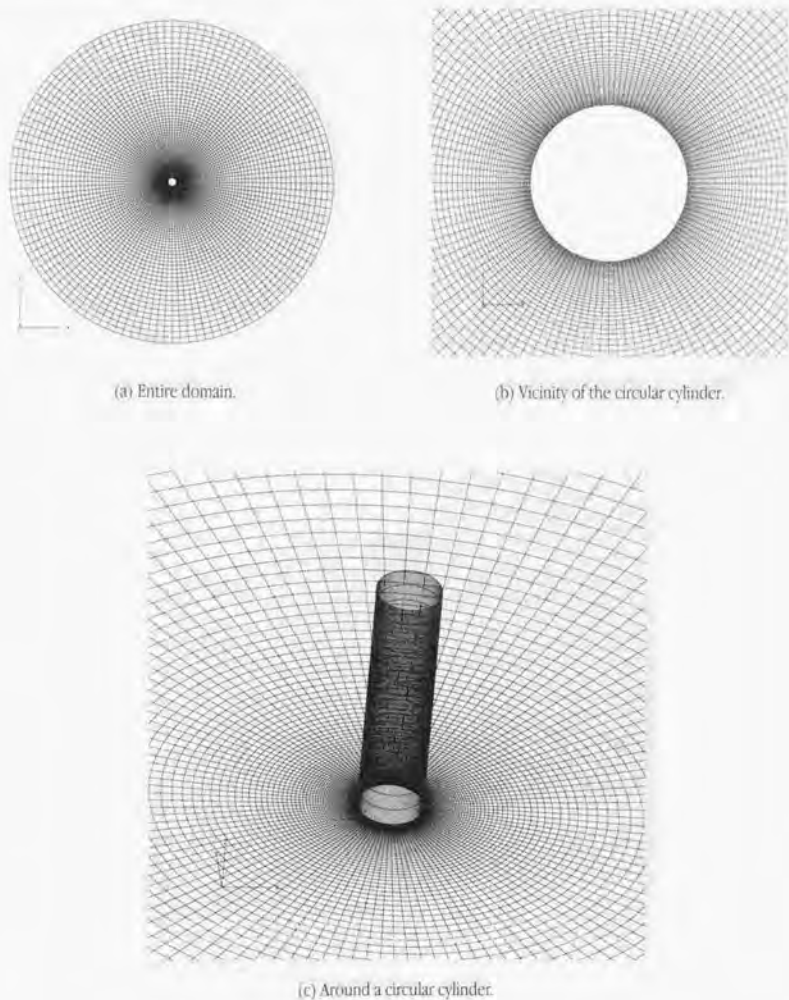
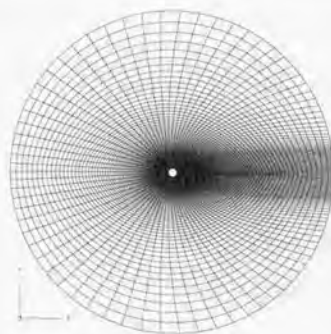
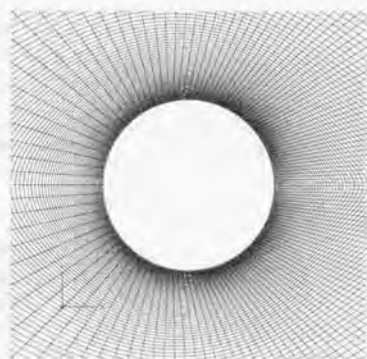


FIGURE 6.1.1 A computational grid for case 1.

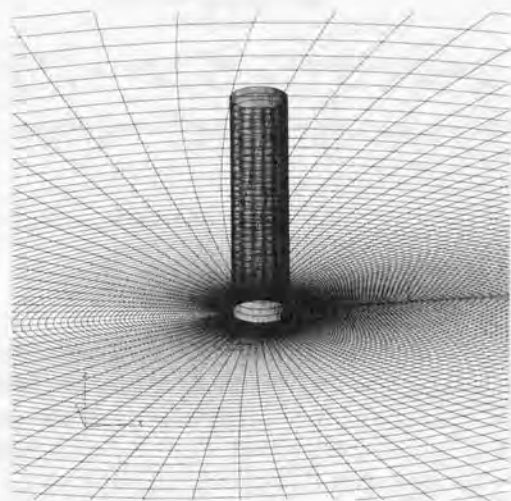
たLele (1992)の6次精度陽的フィルター(境界付近では4次精度)を20ステップ毎に適用し、計算を安定化させている。このフィルター操作は、運動エネルギーを散逸する効果を持つため、運動エネルギーの保存性が厳密には失われている。



(a) Entire domain.



(b) Vicinity of the circular cylinder.



(c) Around a circular cylinder.

FIGURE 6.1.2 A computational grid for case 2.

一般座標系のラージエディシミュレーションの定式化は、5.4.2で説明された Case 2 に基づいて行っている。すなわち、図 6.1.3 に示されるように、まず物理空間における Navier-Stokes 方程式に対してフィルターを施した後、座標変換を施して以下のような一般座標系に

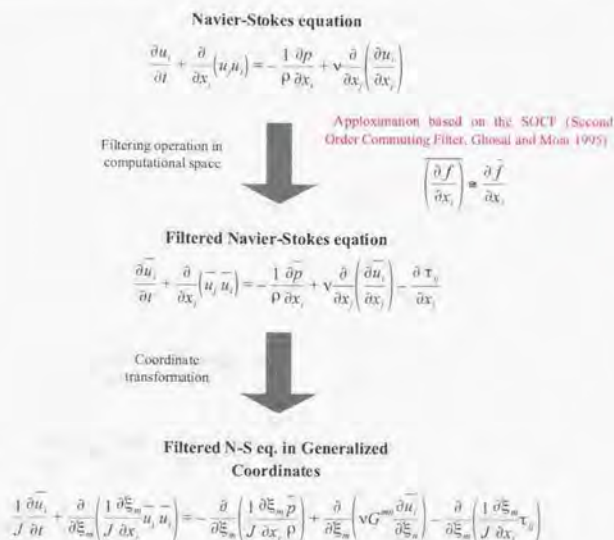


FIGURE 6.1.3 The idea for derivation of the filtered Navier-Stokes equation in generalized coordinates.

における Filtered Navier-Stokes 方程式を得る.

$$\frac{1}{J} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left( \frac{1}{J} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \bar{u}_j \bar{u}_i \right) = -\frac{\partial}{\partial \xi_m} \left( \frac{1}{J} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \bar{p} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left( \nu G^{mn} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \xi_n} \right) - \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left( \frac{1}{J} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \tau_{ij} \right) \quad (6.1.1)$$

フィルター操作は計算空間において一様なフィルターを仮定しているの、数学的に厳密にはフィルター操作と微分との交換性が成り立たないが<sup>3</sup>, Ghosal and Moin (1995), van der Ven (1995)および Vasilyev and Lund (1996)の交換フィルターの概念に基づくと、支配方程式の空間離散化精度の範囲内でフィルター操作と微分との交換性が成り立つと考えられる。

SGS モデルは、流れ場に一様な方向がない場合でも安定に計算可能で、モデル係数値が乱流の比較的大きなスケール構造を反映する Lagrangian dynamic mixed SGSモデルを使用する。

TABLE 6.1.1 The computational cases of large eddy simulation of flow around a circular cylinder.

Case	Grid	Domain	SGS model	Scheme	Time advancement	Time increment, $\Delta t$
LES (Case 1)	101 × 121 × 16	20D × 20D × 4D	Lagrangian dynamic mixed model	the modified FDS in collocated grid layout	the second-order Adams-Bashforth method - Crank-Nicolson Scheme	0.004
LES (Case 2)		20D × 20D × 4D				0.0025
LES (Case 3)	129 × 129 × 33	20D × 20D × 2D	no model			0.0025
LES (Case 4)		20D × 20D × 2D				0.0025

$$\tau_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \tau_{kk} = -2C\bar{\Delta}^2 |\bar{S}| \bar{S}_{ij} + L_{ij}^m - \frac{1}{3} \delta_{ij} L_{kk}^m \quad (6.1.2)$$

$$\bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (6.1.3)$$

$$|\bar{S}| = \sqrt{2\bar{S}_{ij}\bar{S}_{ij}} \quad (6.1.4)$$

$$C = -\frac{1}{2} \frac{I_{LM}}{I_{MM}} \quad (6.1.5)$$

$$\frac{DI_{LM}}{Dt} = \frac{\partial I_{LM}}{\partial t} + u_k \frac{\partial I_{LM}}{\partial x_k} = \frac{1}{T} (\mathcal{Y}_{ij} M_{ij} - I_{LM}) \quad (6.1.6)$$

$$\frac{DI_{MM}}{Dt} = \frac{\partial I_{MM}}{\partial t} + u_k \frac{\partial I_{MM}}{\partial x_k} = \frac{1}{T} (M_{ij} M_{ij} - I_{MM}) \quad (6.1.7)$$

$$\mathcal{Y}_{ij} = \overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j \quad (6.1.8)$$

$$M_{ij} = \bar{\Delta}^2 \left( \alpha^2 |\bar{S}| \bar{S}_{ij} - |\bar{S}| \bar{S}_{ij} \right) \quad (6.1.9)$$

$$\bar{\Delta} = J^{-1/3} \quad (6.1.10)$$

式(6.1.10)中のテストフィルター幅とグリッドフィルター幅の比  $\alpha = \bar{\Delta} / \Delta$  は, Germano *et al.* (1991) によって採用された  $\alpha=2$  とする.  $I_{LM}$  と  $I_{MM}$  の輸送方程式(6.1.6)および式(6.1.7)の計算は, あまり計算精度を必要としないと考えられるので, 対流項に1次精度風上差分を用い,

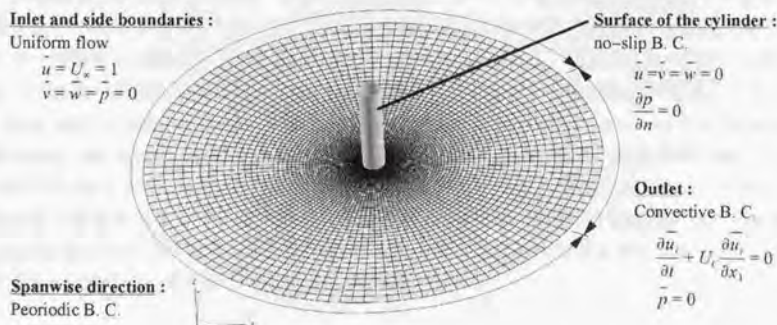


FIGURE 6.1.4 Boundary conditions for large eddy simulation of flow around a circular cylinder.



時間進行法としてEuler陽解法を用いている。従って、Dynamic SGSモデルやDynamic mixed SGSモデルの場合と比較して、新たに $I_{LM}$ と $I_{MM}$ の輸送方程式を解くことによる計算量の増加はそれほど大きくない。 $I_{LM}$ と $I_{MM}$ の輸送方程式(6.1.6)および式(6.1.7)において、ラグランジュ平均の緩和時間スケール $T$ は、Meneveau *et al.* (1996)の推奨式を用いて計算している。

$$T = \theta \Delta \left[ I_{LM}^2 I_{MM} \right]^{-1/3} \quad (6.1.11)$$

上式中、 $\theta$ は無次元係数であり、Meneveau *et al.* (1996)の推奨値は $\theta=1.5$ である。小林ら(1996)は、Lagrangian dynamic SGSモデルにより正方形角柱周りの流れのラージエディシミュレーションを行った結果、チャンネル内乱流に対する無次元係数 $\theta$ の推奨値をそのまま角柱周りの流れに適用した場合、緩和時間スケール $T$ が過大になり不適切であることを明らかにしている。従って、ここでは無次元係数 $\theta$ をMeneveau *et al.* (1996)の推奨値の10分の1である $\theta=0.15$ とした。層流域においては、 $I_{LM}$ がゼロに近くなる一方、 $I_{MM}$ の値も小さくなるので、必ずしもモデル係数値の値がゼロとはならず、ある領域においては擬似的に大きくなる。そこで本研究では、 $I_{MM}$ の値が $1 \times 10^{-3}$ 以下の場合、その場所は層流状態であるとみなし、モデル係数値を強制的にゼロとしている。

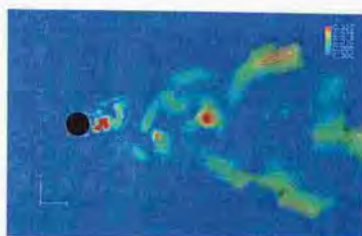
境界条件を図6.1.4に示す。無限遠であると仮定する計算領域入口および円柱側方境界に一様流の条件( $\bar{u}=1, \bar{v}=\bar{w}=\bar{p}=0$ )を与える。計算領域出口には、対流境界条件(Pauley *et al.* 1990, 戴・小林 1992)を課し、その際の対流速度 $U_c$ は入口平均流速と等しくしている。固体壁である円柱表面には、No-slip条件が課されている。スパン方向には周期境界条件を課している。入口平均流速 $U$ および円柱直径 $D$ を用いたReynolds数 $Re$ は、Beaudan and Moin (1994)およびMittal (1995, 1996)の計算と同じ $Re=3,900$ である。

## 6.2 比較実験の概要

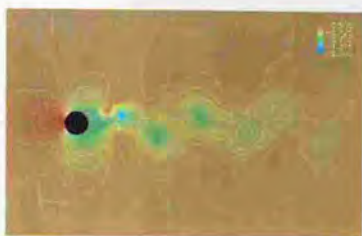
円柱のラージエディシミュレーションの解析結果を検証するために、主としてLourenco and Shih (1993)およびOng and Wallace (1996)の実験結果が用いられる。

Lourenco and Shih (1993)は、直径1.905 cmおよびスパン長39 cmの円柱周りの流れを水槽を用いて実験を行っている。水槽中に取り付けられた台車の速度は20.67 cm/sであり、レイノルズ数は3,900である。流速測定には、PIV(Particle Image Velocimetry)が用いられている。約29回の渦放出にわたる93フレームの瞬時データから、各種統計量が算出されている。

Ong and Wallace (1996)は、直径が14.3 mmの円柱周りの流れをMaryland大学Turbulence Research Laboratoryにおける風洞を用いて実験を行っている。風洞の検査領域の断面寸法は1.2 m × 0.7 mである。4.2 m/sの一様流速中に含まれている乱れ強度は0.67%以下である。円柱直径で定義されるレイノルズ数は3,900である。渦放出周波数は約64 Hzで、この場合、Strouhal数は約0.21である。流速の計測は、主としてX型熱線流速計を用いて行われ、6912 Hzで120 sec間のデータをサンプリングしている。

(a) Contours of the model coefficient,  $C$ .

(b) Velocity vectors.



(c) Contours of the pressure.



(d) Contours of the streamwise vorticity component.

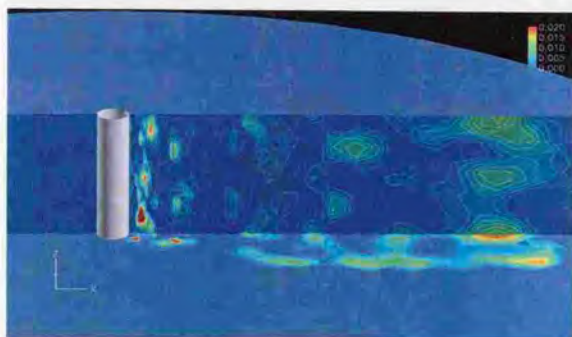
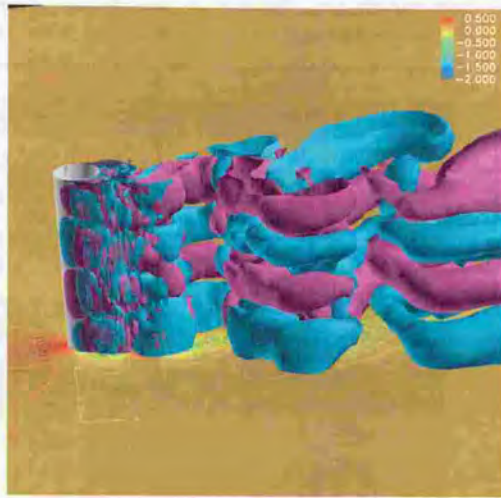
(e) Three-dimensional distribution of the model coefficient,  $C$ .

FIGURE 6.3.1 Instantaneous flow field of a flow around a circular cylinder. (Case 1)

### 6.3 計算結果および考察

計算結果として、Case 1 の場合の瞬時モデル係数値  $C$ 、速度ベクトル、圧力およびスパン方向渦度成分の  $(x, y)$  断面における分布図およびモデル係数値の 3 次元分布を図 6.3.1 に示す。



(a) Case 1.



(a) Case 2.

FIGURE 6.3.2 Isosurfaces of the streamwise vorticity component and contours of pressure.

TABLE 6.3.1 Comparison of Strouhal numbers  $St$ , separation angles  $\theta_s$ , drag coefficients  $C_d$ , root mean square values of drag coefficient  $C_{d,rms}$ , lift coefficients  $C_l$ , root mean square values of lift coefficient  $C_{l,rms}$ , pressure coefficients at the stagnation point  $C_{p,s}$  and base pressure coefficients  $C_{p,b}$  with experimental values.

Case	$St$	$\theta_s$	$C_d$	$C_{d,rms}$	$C_l$	$C_{l,rms}$	$C_{p,s}$	$-C_{p,b}$
LES (Case 1)	0.205	88.9	1.28	0.148	0.011	0.600	0.983	1.36
LES (Case 2)	0.20	83.5	0.87	0.0172	0.00483	0.0327	0.978	0.703
LES (Case 3)	0.213	85.2	0.92	0.0430	0.00147	0.0527	0.990	0.770
LES (Case 4)	0.224	84.3	0.90	0.0178	0.00439	0.0361	0.980	0.749
Exp. (Son <i>et al.</i> 1969)	—	$85 \pm 2$	—	—	—	—	—	—
Exp. (Nörberg 1987)	—	—	$0.98 \pm 0.05$	—	—	—	—	$0.90 \pm 0.05$
Exp. (Cardell 1993)	$0.215 \pm 0.005$	—	—	—	—	—	—	—
LES. (Beaudan 1994)	0.203	85.8	1.0	—	—	—	—	0.95
LES. (Mittal 1996)	0.209	86.9	1.0	—	—	—	—	0.93

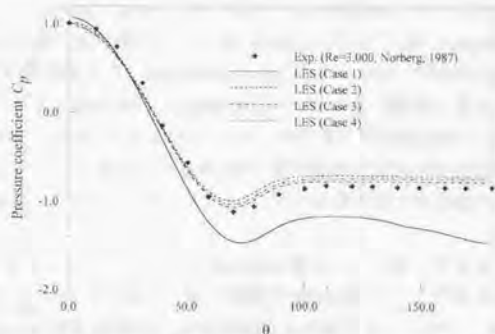


FIGURE 6.3.3 Pressure coefficient  $C_p$  on the surface of the cylinder.

モデル係数値はポテンシャル流れの領域においてはほぼゼロとなっているとともに、自由せん断領域である後流において大きな値を持っているので、Lagrangian dynamic mixedモデルによりほぼ適切にモデル係数値が評価されている。図6.3.1(e)で示される円柱中心軸線上のモデル係数値分布を見ると、モデル係数値は3次元的な分布を持っている。従って、一様な方向にモデル係数値を平均化して計算の安定化を図る事は、後流の3次元構造を無視したモデル係数値の評価であり適切ではない。本計算では、Wiggleの発生を抑制するためにLele (1992)の6次精度陽的フィルターを20ステップ毎に適用しているが、図6.3.1(c)の圧力分布においてWiggleの発生がほとんど観察されず、安定に計算が実行されていることがわかる。

流れ方向渦度成分の瞬時等値面図および圧力の等高線図を図6.3.2に示す。Appendix Aの

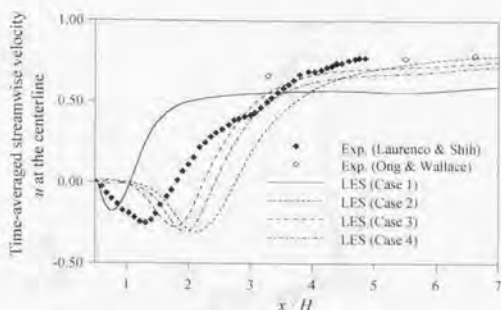


FIGURE 6.3.4 Streamwise velocity component at the centerline.

角柱周りの流れと同様に、混合層流れで観察されているようなコヒーレント構造あるいはリブ構造(Bernal and Roshko 1986)と呼ばれる縦渦構造がスパン方向渦構造に重畳している。スパン方向の格子解像度は、Case 1 および Case 2 のそれぞれの計算ケースにおいて  $4D/16$  points および  $4D/33$  points である。円柱背後の3次元構造は、スパン方向の格子点数に大きく影響され、1対の流れ方向渦のサイズは、Case 1 において  $2D$ 、Case 2 において  $1D$  であることが図 6.3.2 から観察される。Bays-Muchmore and Ahmed (1993)の実験において、1対の流れ方向渦のサイズは、 $Re=320 \sim 21,000$  の広いレイノルズ数域において円柱直径  $D$  に等しいことが確認されているので、Case 1 のスパン方向格子解像度は粗すぎると思われる。しかし、Case 2 において、円柱中心から約  $3D$  下流の領域で流れ方向渦の合体が観察され、流れ方向渦構造が安定していないので、Case 2 のスパン方向格子解像度でも不十分である可能性がある。

表 6.3.1 に、本計算において得られた Strouhal 数  $St$ 、はく離点位置  $\theta$ 、抗力係数  $C_D$ 、抗力係数の RMS 値  $C_{D,RMS}$ 、揚力係数  $C_L$ 、揚力係数の RMS 値  $C_{L,RMS}$ 、円柱前方よみ点における圧力係数値  $C_{p,m}$  および背圧係数値  $C_{p,b}$  の実験値との比較を示す。全ケースにおいて Strouhal 数は実験とよく一致しているのに対して、抗力係数値は Case 1 の場合実験よりも大きめに、Case 2 ~ 4 の場合小さめに評価されている。これは、円柱前方よみ点圧が全ケースにおいてほぼ一定であるのに対して、背圧係数値が Case 1 の場合小さめに、Case 2 ~ 4 の場合大きになっていることに対応している。Case 2 と Case 3 を比較した場合、スパン方向の領域を半分にしてスパン方向の格子解像度を改善することにより、抗力係数が若干増加し改善が見られる。SGS モデルが導入されているかいないかのみが異なる Case 3 と Case 4 を比較すると、SGS モデルが入っていない Case 4 の場合、Case 3 と比較して抗力係数が僅かに減少し、実験との対応が悪くなっている。Case 2 ~ 4 の結果を総合すると、抗力係数が実験よりも小さくなるのは、スパン方向の格子解像度不足や SGS モデルが原因ではなく、 $(x, y)$  断面における計算格子解像度不足が考えられる。また、Case 2 ~ 4 の場合における揚力の RMS 値は、Case 1 と比較してかなり小さくなっている。はく離点位置については、報告されている実験値にはばらつきが見られるが、Case 1 をのぞき実験値のばらつきの範囲内に収まっている。

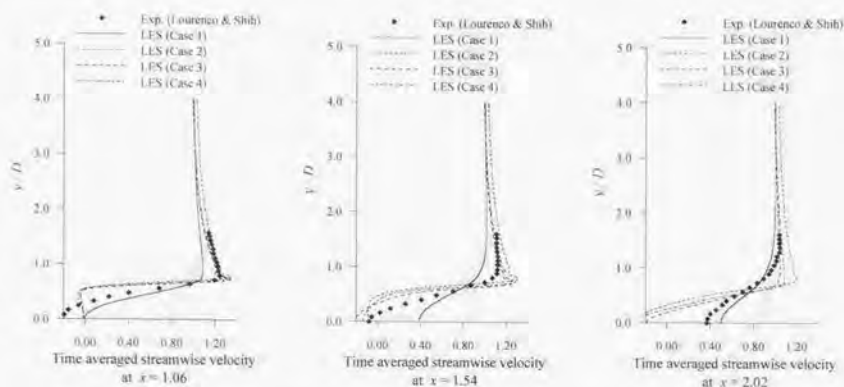


FIGURE 6.3.5 Profiles of the time-averaged streamwise velocity component behind the cylinder.

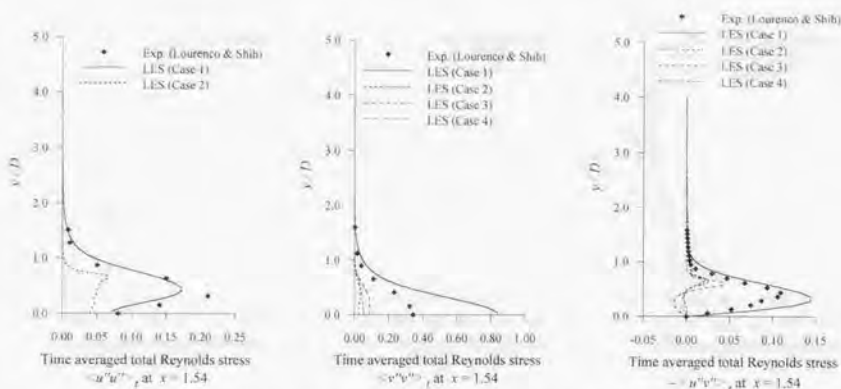


FIGURE 6.3.6 Profiles of the time-averaged total Reynolds stresses behind the cylinder.

抗力係数値が実験とあまりよく一致していない理由は、図6.3.3に示される円柱表面における圧力係数分布から説明できる。Case 1は円柱側面から円柱背後において、実験値よりも圧力係数値がかなり小さく、2次元計算(Beaudan and Moin 1994)と同様な傾向を示している。3次元計算でありながらスパン方向格子解像度が不足しているCase 1においては、後流における3次元構造が十分発達できないため、2次元計算と類似した圧力係数分布となったと考えられる。Case 2～4においては、はく離点位置である $\theta=85$ 度付近までは実験とよく一致しているが、円柱側面から円柱背後において、Case 1とは反対に実験値よりも圧力係数値が若干大きめになっている。円柱中心軸線上の流れ方向速度分布を図6.3.4に示す。円柱背後に形

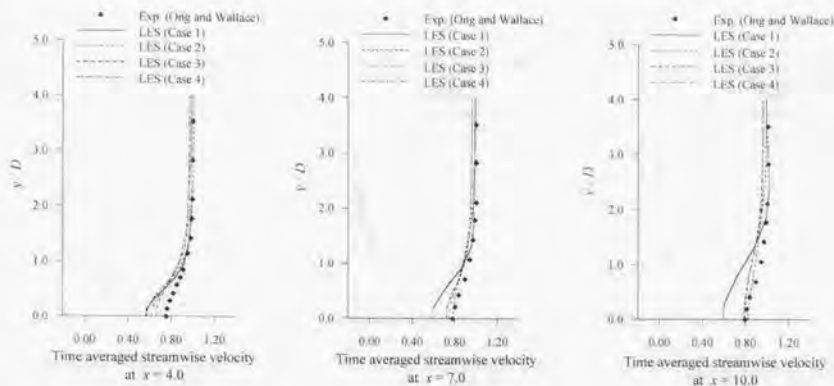
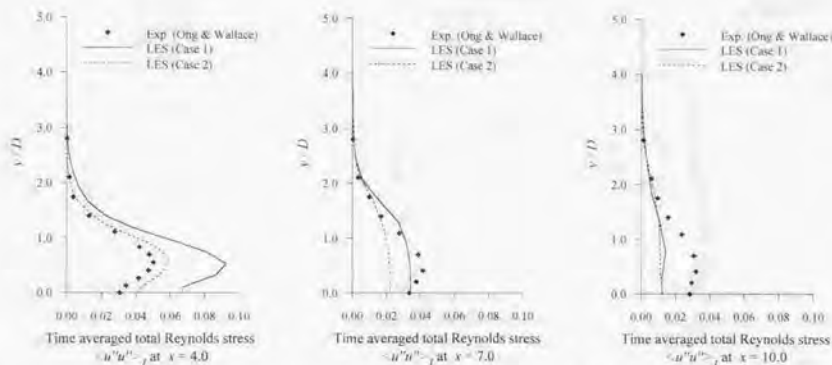
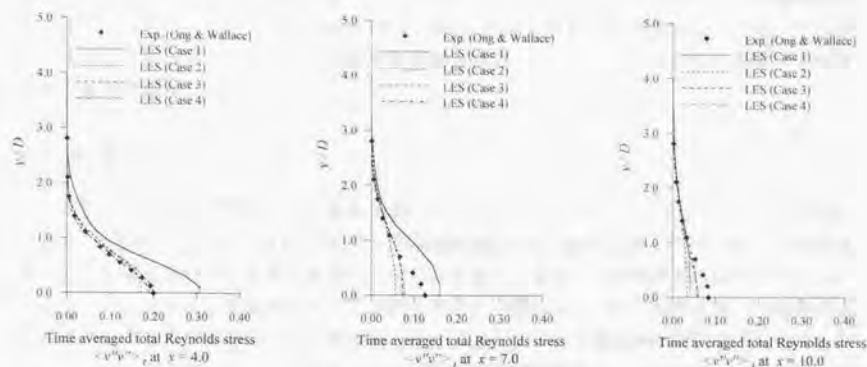
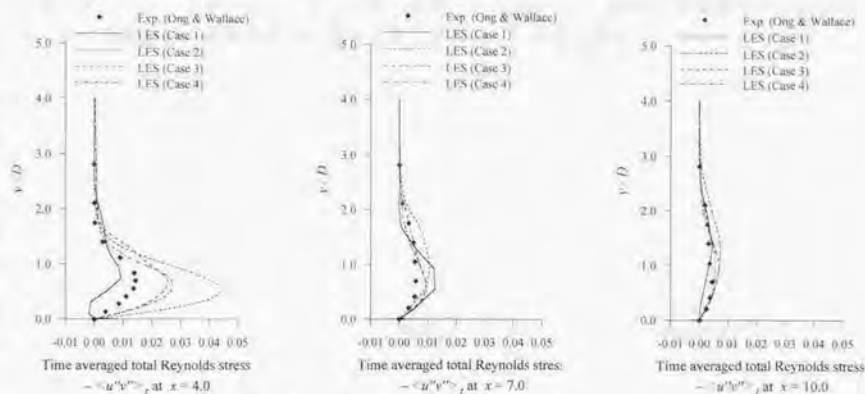


FIGURE 6.3.7 Profiles of the time-averaged streamwise velocity component in the near-wake region.

FIGURE 6.3.8 Profiles of the time-averaged total Reynolds stresses  $\langle u'u' \rangle$  in the near-wake region.

成される再循環領域は、実験(Laurencio and Shih 1993)と比較して Case 1 の場合かなり小さめに、Case 2~4 の場合かなり大きになっている。Case 2~4 の中では、計算格子の解像度が最も高く SGS モデルが導入されている Case 3 の結果がもっとも良い。抗力係数値が実験値と一致していないことは、時間平均流で観察される円柱背後に形成される 1 対の双子渦の渦中心の位置が大ききずれていることと対応している。円柱背後に形成される再循環領域の大きさは、瞬時の流れ場としては、円柱側方ではく離れたせん断層の乱流遷移および渦への巻き上がりの位置によって変化する。Case 1 においては、スパン方向格子解像度の著しい不足のため、はく離れたせん断層の乱流遷移過程が正しく再現されず、はく離れたせん断層が乱流に遷移する前に巻き上がって放出渦が形成されてしまっていると考えられる。一方、Case 2 にお

FIGURE 6.3.9 Profiles of the time-averaged total Reynolds stresses  $\langle v'v' \rangle_t$ .FIGURE 6.3.10 Profiles of the time-averaged total Reynolds stresses  $-\langle u'v' \rangle_t$ .

いては、はく離したせん断層内で同位相の遷移渦が形成されるものの、はく離せん断層の巻き上がりが遅く、平均流において再循環領域が大きくなってしまっているものと考えられる。Case 2においてははく離せん断層の巻き上がりが遅い原因としては、 $(x, y)$  平面における計算格子解像度不足が原因として考えられる。

円柱に近い後流域 ( $x=1.06, 1.54$  および  $2.02$ ) における流れ方向時間平均流速の  $y$  方向分布を図6.3.5に示す。円柱に近い後流域 ( $x=1.54$ ) における全Reynolds応力成分  $\langle u'u' \rangle_t$ ,  $\langle v'v' \rangle_t$ , および  $-\langle u'v' \rangle_t$  の  $y$  方向分布を図6.3.6に示す。図6.3.5および図6.3.6において、Case 1 ~ 4の計算結果は、はく離せん断層の乱流遷移および渦放出過程の計算精度の悪さから、いずれも実験値との相違が大きい。また、円柱から若干離れた後流域 ( $x=4, 7$  および  $10$ ) における



流れ方向平均流速、時間平均 Reynolds 応力  $\langle u''u'' \rangle$ ,  $\langle v''v'' \rangle$ , および  $\langle u''v'' \rangle$  の  $y$  方向分布をそれぞれ図 6.3.7 ~ 10 に示す。図 6.3.7 ~ 10 におけるいずれの統計量においても、はく離せん断層の乱流遷移および渦放出過程の計算精度の悪さから、全ケースともに実験との実験値との相違が観察される。

#### 6.4 本章のまとめ

本章では、本研究で構築した一般座標系におけるラージエディシミュレーションの方法、すなわち、離散化法としては計算格子の不等間隔非直交性に対する依存性の小さい一般座標系における修正コロケート格子系差分スキームを用い、また、一般座標系におけるラージエディシミュレーションの定式化としては計算空間で一様なフィルター操作を施した後座標変換するという考え方に基づいた方法の応用として、レイノルズ数 3,900 の円柱周りの流れのラージエディシミュレーションを行った。従来の実験値や計算との比較を通じ、実際の工学的な流れ場における本計算方法の妥当性を検証した。残念ながら、本章で行った 4 ケースの計算においては、実験とよく一致する結果は得られていない。これは、計算格子の  $(x, y)$  平面における計算格子解像度不足が最も主要な原因として考えられる。

## 第7章

### 結 論

本研究は、複雑形状複雑乱流場に適用可能な非定常乱流計算手法を確立することを目的として、一般座標系におけるラージエディシミュレーションの実用化のための基礎研究を行った。特に、一般座標系における信頼性の高い差分スキームの構築と一般座標系におけるラージエディシミュレーションの定式化が主な課題であると考え研究を行った。

一般的に、RANSモデルに基づく乱流計算と比較すると、直接数値シミュレーションやラージエディシミュレーションは乱流モデリングの効果が小さくなる（あるいは全くない）ため、計算方法に対する依存性が強く、高精度な解を得るために信頼性の高い計算方法が要求される。従って、直接数値シミュレーションやラージエディシミュレーションにおいて高精度な解を得るためには信頼性の高い差分スキームを使用しなければならない。ここでは、近年、森西(1996a～c; 1998a～b)が展開した差分スキームの保存特性の議論に着目した。これは、基礎方程式系(連続の式、Navier-Stokes方程式、速度二乗量および運動エネルギーの輸送方程式)の解析的な保存特性が離散化式においても適切に近似されていなければならないと考えるものである。本研究でもこの森西の議論に従い、一般座標系において運動量、速度二乗量および運動エネルギーが適切に保存される差分スキームの構成を試みた。そのためにまず、座標変換を施した非圧縮粘性流れの基礎方程式の解析的保存特性が、座標変換前の基礎方程式系と全く同じになることに着目し、等間隔正規直交座標系において基礎方程式の解析的保存特性を適切に近似する差分スキームが、比較的簡単に一般座標系へ拡張できることが明らかになった。この事実に基づき、等間隔正規直交座標系において基礎方程式の解析的保存特性を適切に近似する差分スキームを拡張して、Maliskaのスタガード格子系、レギュラ格子系およびコロケート格子系における一般座標系差分スキームを構成した。ここで、これらの一般座標系差分スキームは、以下のような特徴を持つ。

- 構成された一般座標系差分スキームの中で、形式上、保存特性が適切であるのは、Maliskaのスタガード格子系差分スキームおよびレギュラ格子系差分スキームである。

- 森西(1998a～b)により提案された修正コロケート格子系差分スキームが一般座標系に拡張できることを示し、その結果、構成された一般座標系における修正コロケート格子系差分スキームの圧力項の運動エネルギー保存特性は時間2次精度に改善されている。

しかし、基礎方程式の解析的保存特性を適切に近似する差分スキームを一般座標系に拡張する際、明示されない補間を導入したことや圧力項の差分スキームにおいて保存形式と非保存形式を離散的にも等しいと仮定したことなどから、差分スキームの保存特性に関する厳密性が失われてしまった。従って、本研究で構成した一般座標系における差分スキームの保存特性を2次元周期的非粘性流の数値実験によって検証した。その結果、以下のようなことがわかった。

- 第2章において構成した一般座標系差分スキームの中で、不等間隔非直交の任意の一般座標系格子において、運動量のみならず運動エネルギーの保存特性が実際の計算上、ほぼ満足できる精度で適切であると言えるのは、修正コロケート格子系差分スキームのみである。
- 計算格子が直交である場合は、従来のスタガード格子系差分スキームも運動量および運動エネルギーの保存特性が適切である。

また、本研究で構成した一般座標系差分スキームの実際の乱流場への適用例として、チャンネル幅と壁面摩擦速度を用いたレイノルズ数 $Re_\tau = 180$ のチャンネル内乱流の計算を行い、DNS データ (Kim *et al.* 1987; Mansour *et al.* 1988; Horiuti 1992) と比較した結果、以下のような知見を得た。

- 一般座標系における修正コロケート格子系差分スキームは、計算格子の非直交性、不等間隔の影響を受けにくい優れた特性を持つ。これは、一般座標系における修正コロケート格子系差分スキームが、計算格子の直交性、等間隔性に関係なく運動量および運動エネルギーを適切に保存するためである。
- 一方、Maliskaのスタガード格子系差分スキームの場合、計算格子が非直交だと運動エネルギーの保存特性に問題があるので、実際の乱流計算においては、流れ方向平均流速や乱流強度といった統計量が計算格子の非直交性に大きく影響されてしまう。
- 一般座標系における修正コロケート格子系差分スキームは、レイノルズ応力収支式の圧力ひずみ相関項の計算精度が改善され、統計量の信頼性が向上する。これは、計算格子が非直交である場合も同様である。
- 一般座標系における修正コロケート格子系差分スキームは、境界条件の取り扱いに注意すれば、スタガード格子系差分スキームと同様、安定な計算が実行可能である。

以上の結果から、本研究では、高精度なDNSあるいはLESに適した一般座標系差分スキームとして、修正コロケート格子系差分スキームを推奨する。

さらに、本研究では、これまでに構成されたラージエディシミュレーションにおけるSGSモデルを再確認するとともに、これまであまり明確に論じられていなかった一般座標系におけるラージエディシミュレーションの問題点について考察を行った。本研究では、以下のような考えに基づき一般座標系におけるラージエディシミュレーションの定式化を行った。

- 物理空間におけるNavier-Stokes方程式に対して、計算空間で一様なフィルター幅のフィルター操作を施す。
- 前項において、数学的に厳密にはフィルター操作と微分との交換性が成立しないが、Ghosal and Moin (1995)、van der Ven (1995)およびVasilyev and Lund (1996)の交換フィルターの概念に基づき、基礎方程式の離散化精度の範囲内でフィルター操作と微分との交換性が成り立つと仮定し、Filtered Navier-Stokes方程式を得る。
- 物理空間におけるFiltered Navier-Stokes方程式に座標変換を施し、計算空間におけるFiltered Navier-Stokes方程式を導出する。

本研究で採用した一般座標系におけるラージエディシミュレーションの妥当性を検証するため、SGSモデルとしてLagrangian dynamic mixed SGSモデルを用いたチャンネル内乱流のラージエディシミュレーションを不等間隔・非直交性の異なる計算格子を用いて行った。その結果、チャンネル内流れという限定された流れ場においてはあるが、モデル係数値、流れ方向平均流速、乱流強度といった分布が計算格子の不等間隔非直交性に依存せずほぼ一定であった。従って、本研究で採用した一般座標系におけるラージエディシミュレーションの手法の妥当性が確認された。ここでは、基礎方程式の空間離散化は2次精度差分スキームを想定していたが、さらに高次精度の差分スキームに変更する場合、フィルター操作と微分の交換性の誤差が空間離散化の誤差のオーダーよりも大きくならないように、Ghosal and Moin (1995)、van der Ven (1995)またはVasilyev and Lund (1996)が提案しているフィルター操作を導入する必要がある。

また、本研究で構築した一般座標系におけるラージエディシミュレーション法の応用として、レイノルズ数3900の円柱周りの流れのラージエディシミュレーションを行った。従来の実験値や計算との比較を通じ、実際の工学的な流れ場における本計算方法の妥当性を検証し、以下のような知見を得た。

- スパン方向の計算格子解像度が不足すると、円柱側面ではなく離れたせん断層が乱流遷移する前に巻き上がり放出渦を形成してしまう(Case 1)。一方、スパン方向の計算格子解像度を改善した場合(Case 2~4)、両側のはく離自由せん断層中に同位相の遷移渦が形成され、乱流遷移過程が定性的に再現された。
- 計算格子、計算領域およびモデルを変えて4ケースの計算を行ったが、実験とよく一致する結果は得られていない。これは、計算格子の(x, y)平面における計算格子解像度不足が最も主要な原因として考えられる。

参考文献

ラジエテイクシミュレーションにおける誤差の削減

本論文は、モンテカルロシミュレーションにおいて、放射線輸送計算の誤差を削減するための新しい手法を提案する。従来の手法では、粒子の追跡が完了するまで計算を続ける必要があるが、本論文では、粒子の追跡が完了する前に、その結果を推定し、計算を打ち切ることができる。この手法は、計算時間を大幅に削減し、結果の精度も向上させることができる。また、本論文では、粒子の追跡が完了する前に、その結果を推定するための新しい手法を提案する。この手法は、計算時間を大幅に削減し、結果の精度も向上させることができる。

1. はじめに

放射線輸送計算は、原子力工学や医療工学など多くの分野で重要な役割を果たしている。しかし、従来の手法では、計算時間が非常に長いという問題がある。本論文では、この問題を解決するために、新しい手法を提案する。この手法は、粒子の追跡が完了する前に、その結果を推定し、計算を打ち切ることができる。この手法は、計算時間を大幅に削減し、結果の精度も向上させることができる。

項目	従来の手法	提案手法
計算時間	長い	短い
結果の精度	高い	高い
メモリ使用量	多い	少ない

## 付録 A

# ラージエディシミュレーションにおける風上差分の影響

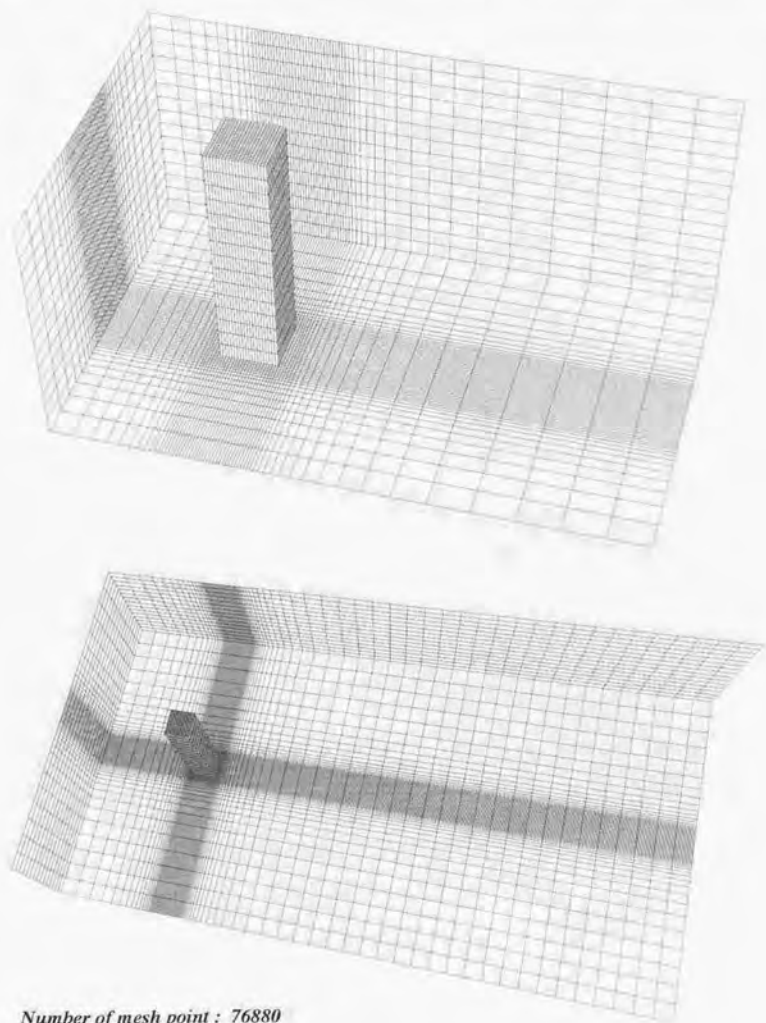
複雑な形状の流れ場に対してラージエディシミュレーション (large eddy simulation, LES) を適用する場合, 計算をいかに安定に進めるかということが問題となる。特に角部を有する形状の場合, 速度場あるいは圧力場に数値振動が発生し, これが計算結果に悪影響を及ぼす場合がある (Rodi and Ferziger 1995)。その対策の一つとして対流項スキームの風上化がある。風上差分はSGSモデルと同様なエネルギー散逸効果を持つため, LESにおける風上差分の使用は問題視されてきたが, その影響については今のところよくわかっていない。そこで本章では, 2次精度および5次精度風上差分を用いて2次元角柱周りの流れのLESを行い, 対流項スキームの風上化に伴う人工的な分散・散逸効果の影響を調べる。

### A.1 数値計算方法概要

各計算ケースにおける計算領域, 計算格子解像度, SGSモデルおよび計算スキームを表A.1.1に示す。解析領域は, ワークショップ (Rodi and Ferziger 1995) で指定された条件を満たしている。ただし, 出口境界条件の影響を小さくするため, 角柱中心から出口までの距離は20.0D以上に拡張されている。計算格子を図A.1.1(a)~(c)に示す。ケースC16 (Coarse mesh on  $(x, y)$ -plane, 16 node points in spanwise direction) と C32 (Coarse mesh on  $(x, y)$ -plane, 32

TABLE A.1.1 The computational grid cases.

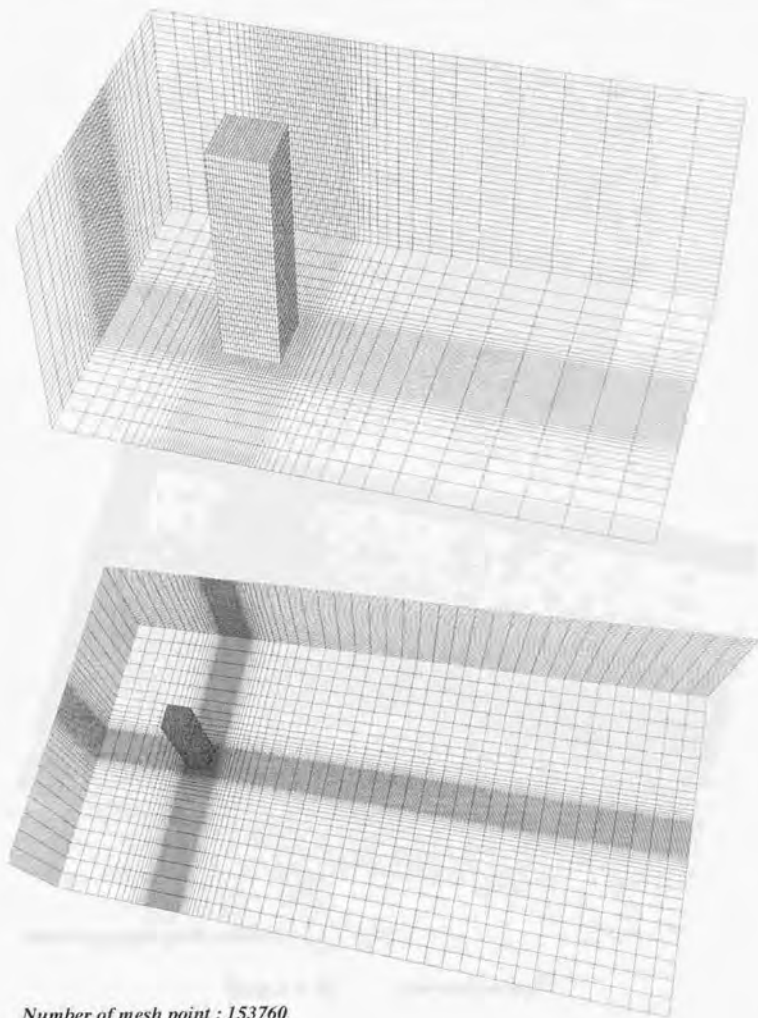
Case	Domain	Resolution	SGS model	Scheme
C16	21.1D × 14.0D × 4.0D	76,880 (82 × 63 × 16)	Smagorinsky	QUICK + 2nd order CDS
C32	21.1D × 14.0D × 4.0D	153,760 (82 × 63 × 32)	Smagorinsky	QUICK + 2nd order CDS
S32D	20.4D × 14.0D × 4.0D	347,648 (112 × 104 × 32)	DMM	5th order UDS + 4th order CDS



*Number of mesh point : 76880*

FIGURE A. 1. 1(a) The computational grid (C16).

node points in spanwise direction)は、 $(x, y)$  平面で同じ格子解像度であり、スパン方向の格子点数のみが異なる。ケース S32D(Standard mesh on  $(x, y)$ -plane, 32 node points in spanwise direction, Dynmic mixed model)は、ワークショップ (Chollet *et al.* 1996) で標準格子とされ



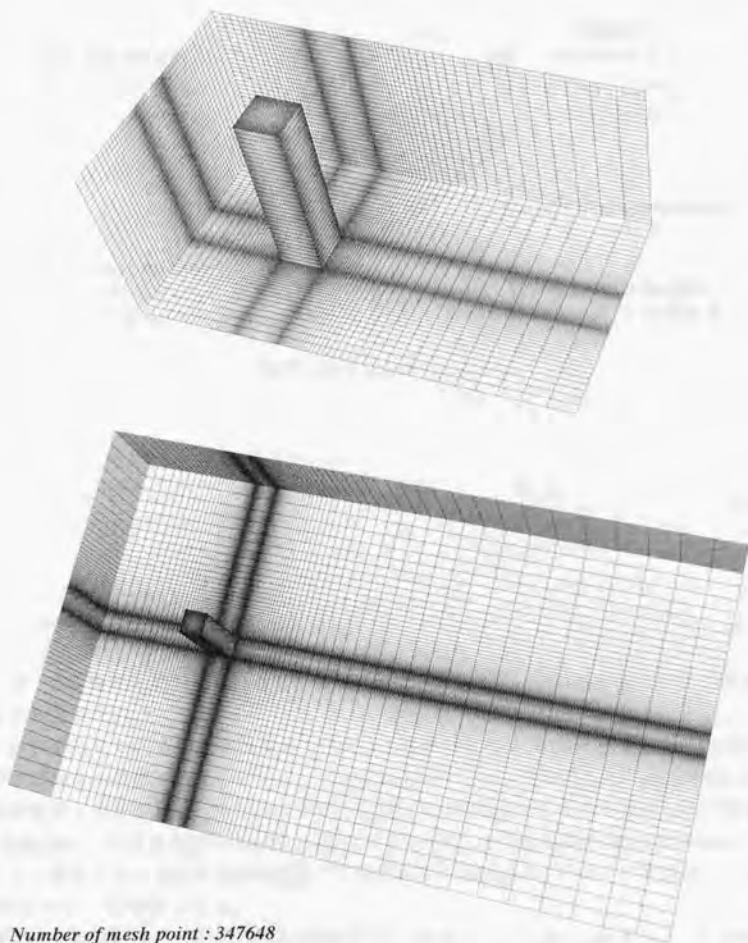
*Number of mesh point : 153760*

FIGURE A. 1. 1(b) The computational grid (C32).

た計算格子と  $(x, y)$  平面上で同じ計算解像度である。全ての計算格子において、スパン方向の格子間隔は等間隔である。

圧力と連続の式のカップリング・アルゴリズムはHSMAC法(Highly Simplified MAC, Hirt





*Number of mesh point : 347648*

FIGURE A. 1. I(c) The computational grid (S32D).

1972)に準じている。HSMAC法において、連続の式を満足させるため、圧力 Poisson 方程式を解くかわりに、次のような反復プロセスが使用される。

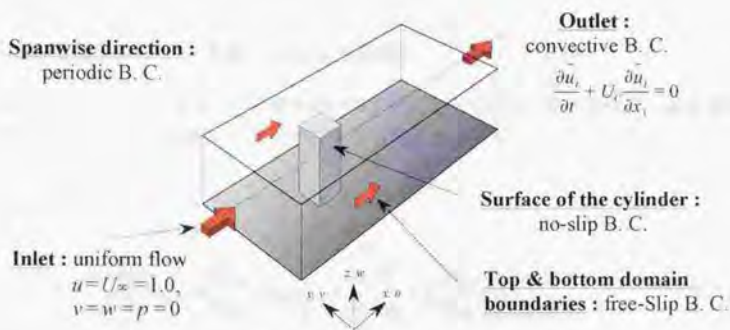


FIGURE A.1.2 Boundary conditions.

$$\Delta p = -\omega \frac{D}{2\delta t \cdot \left( \frac{1}{\Delta x_i \Delta x_j} \right)} \quad (\text{A.1.1})$$

$$u_i = \Delta t \frac{\Delta p}{\partial x_i} \quad (\text{A.1.2})$$

ここで、 $\omega$  は緩和係数であり、ここでは  $\omega=0.8$  とした。また、 $D$  は各計算セルにおける連続の式の残差である。

C16 と C32 において、対流項に 2 次精度風上差分である QUICK を使用し、拡散項および圧力項には 2 次精度中心差分を使用した。S32D においては、対流項に Rai and Moin (1991) の 5 次精度風上差分を用い、拡散項および圧力項には 4 次精度中心差分を使用した。時間進行は、対流項を 2 次精度 Adams-Bashforth 法により陽的に、その他の項を Crank-Nicolson スキームにより陰的に取り扱う半陰の解法とし、無次元時間間隔  $dt$  は、C16 と C32 において 0.002、S32D において 0.0002 とした。

境界条件を図 A.1.2 に示す。計算領域入口に一様流 ( $\bar{u}=1.0, \bar{v}=0, \bar{w}=0$ ) を与え、計算領域側面境界に free-slip 条件、角柱壁面に no-slip 条件を課している。出口には対流境界条件 (Pauley *et al.* 1990, 戴・小林 1992) を課し、対流速度は、入口平均流速と等しくした。スパン方向には周期境界条件を課している。入口平均流速  $U$  および正四角柱一辺の長さ  $H$  を用いた Reynolds 数  $Re$  は、ワークショップ (Rodi and Ferziger 1995, Chollet *et al.* 1996) で指定された値と等しく、 $Re=22,000$  としている。

この LES 計算コードは、静止および振動角柱周りの流れに適用され、渦放出周波数と角柱の振動周波数が一致する Lock-in 現象を精度良く再現することに成功している (小垣ら 1996)。

## A.2 対流項差分スキームの風上化による影響

対流項差分スキームの風上化の影響を調べるため、ここでは風上化に伴う人工的数値散逸・分散効果を考慮したGS運動エネルギーの輸送方程式を考える。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial K_{GS}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{u}_k k_{GS}) \\ &= - \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \frac{\bar{p}}{\rho} \bar{u}_k \delta_{\mu k} - \mathbf{v} \frac{\partial k_{GS}}{\partial x_k} + \bar{u}_j \tau_{jk} \right] - \mathbf{v} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + \tau_{jk} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + E_{upwind} \end{aligned} \quad (\text{A.2.1})$$

ここで、上式中の右辺第2項は分子粘性散逸、第3項はSGSモデルによる乱流粘性散逸を表している。第4項 $E_{upwind}$ は、対流項差分スキームの風上化により付加される人工的な項である。本計算で使用されるQUICKは、1階微分の4次精度中心差分に、3階微分の2次精度中心差分形式に格子間隔 $\Delta x$ の2乗を係数としてかけた人工的分散項および4階微分の2次精度中心差分形式に格子間隔 $\Delta x$ の3乗を係数としてかけた人工的散逸項を加えたものとして解釈できる。

$$\begin{aligned} U \frac{\partial u}{\partial x} &= U \frac{1u_2 - 8u_1 + 8u_0 - 1u_2}{60\Delta x} \\ &+ U \frac{\Delta x^2}{24} \frac{-u_2 + 2u_1 - 2u_0 + u_2}{\Delta x^4} \\ &+ |U| \frac{\Delta x^3}{16} \frac{u_2 - 4u_1 + 6u_0 - 4u_1 + u_2}{\Delta x^4} + O(\Delta x^4) \\ &= U \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + O(\Delta x^4) \right] + U \frac{\Delta x^2}{24} \left[ \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + O(\Delta x^2) \right] + |U| \frac{\Delta x^3}{16} \left[ \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + O(\Delta x^2) \right] \\ &+ O(\Delta x^4) \end{aligned} \quad (\text{A.2.2})$$

一方、Rai and Moinの5次精度風上差分スキームは、1階微分の6次精度中心差分に人工散逸項として6階微分の2次精度中心差分形式に格子間隔 $\Delta x$ の5乗を係数としてかけた項を加えた形式として解釈できる。

$$\begin{aligned} U \frac{\partial u}{\partial x} &= U \frac{-u_3 + 9u_2 - 45u_1 + 45u_0 + 9u_2 - u_3}{60\Delta x} \\ &- |U| \frac{\Delta x^5}{60} \frac{u_3 - 6u_2 + 15u_1 - 20u_0 + 15u_1 - 6u_2 + u_3}{\Delta x^4} + O(\Delta x^6) \end{aligned}$$

$$= U \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + O(\Delta x^6) \right] + |U| \left[ \frac{\Delta x^5}{60} \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + O(\Delta x^2) \right] + O(\Delta x^6) \quad (\text{A.2.3})$$

従って、QUICKと5次精度風上差分スキームの場合、 $E_{\text{spinning}}$ はそれぞれ以下の式で与えられる。

$$E_Q = -\bar{u}_i \bar{u}_j \frac{\Delta x^2}{24} \frac{\delta^3 \bar{u}_i}{\delta x^3} - \bar{u}_i \bar{u}_j \frac{\Delta x^3}{16} \frac{\delta^4 \bar{u}_i}{\delta x^4} \quad (\text{A.2.4})$$

$$E_{RM} = \bar{u}_i \bar{u}_j \frac{\Delta x^5}{60} \frac{\delta^6 \bar{u}_i}{\delta x^6} \quad (\text{A.2.5})$$

QUICKの人工的付加項 $E_Q$ は、分散と散逸の両方の効果を持つのにに対し、5次精度風上差分スキームの人工的付加項 $E_{RM}$ は散逸効果のみである。信頼性の高いLES解析を行うためには、これら対流項差分スキームの風上化に伴うGS運動エネルギーの分散・散逸誤差が、分子粘性およびSGSモデルの乱流粘性による散逸よりも十分小さくなければならない。

### A.3 位相平均操作

計算データの位相平均操作は、Lyn *et al.* (1995)の実験において用いられた方法を模倣して

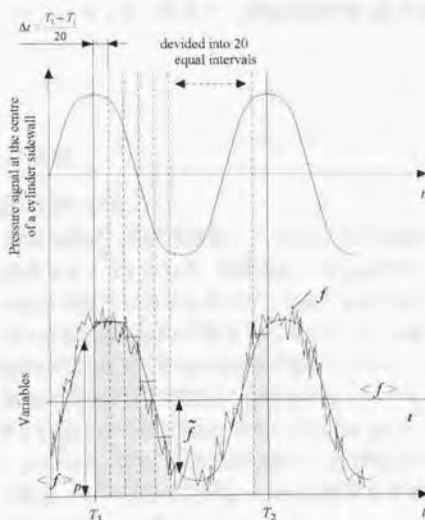


FIGURE A.3.1 Phase averaging procedure and decomposition of variables.

TABLE A.4.1 Comparison of drag coefficients  $C_d$ , base pressure coefficients  $C_{pb}$ , root mean square values of the lift coefficient  $C_{l,RMS}$  and Strouhal numbers  $St$  with experimental values.

Case	$C_d$	$C_{pb}$	$C_{l,RMS}$	$St$
C16	2.041	-1.483	1.31	0.13
C32	2.067	-1.333	1.23	0.13
S32D	2.31	-1.80	1.53	0.13
Exp. (Lyn <i>et al.</i> )	2.05 ~ 2.25	-	-	0.132
Exp. (Okajima)	2.128	-1.640	-	0.13
Exp. (Vickery)	2.05	-	0.68 ~ 1.32	-

いる。位相平均操作の概念を図A.1.1に示す。角柱の側面の中心における圧力を位相平均の参照信号として、連続する圧力信号の最大値の間を20等分する。図A.1.1において、 $T_1$ から $T_1+\Delta t$ の間がPhase01、 $T_1+\Delta t$ から $T_1+2\Delta t$ の間がPhase02というように、連続した時間間隔がPhase01からPhase20まで割り当てられる。角柱からの渦放出は厳密に周期的ではないので、時間間隔 $\Delta t$ は連続する周期において異なる。速度成分や乱流統計量が各位相の中で平均化され、その平均された値が各位相における位相平均値とされる。

速度成分や乱流統計量といった変数の瞬時値 $f(t)$ は、位相平均を施された周期的成分 $\langle f \rangle_p$ とその成分からのずれ $f'''$ に分解できる。周期的成分 $\langle f \rangle_p$ は、さらに時間平均成分 $\langle f \rangle$ と平均値ゼロの周期的成分 $\tilde{f}$ に分解され、最終的に変数の瞬時値 $f(t)$ は次のように3重分解される。

$$f(t) = \langle f \rangle + f''' = \langle f \rangle + \tilde{f} + f''' \quad (\text{A.3.1})$$

## A.4 計算結果および考察

### A.4.1 各種流体力の比較

各計算における抗力係数 $C_d$ 、背圧係数 $C_{pb}$ 、揚力係数のRMS値 $C_{l,RMS}$ およびストロウハル数 $St$ の実験との比較を表A.4.1に示す。全般的に、本LES解析で得られた各種流体力係数値は、実験のばらつきの範囲内に収まっていて、実験とかなりよく一致している。計算条件として、スパン方向の格子解像度のみが異なるC16とC32を比較した場合、抗力係数値が若干増加し、背圧係数値および揚力係数のRMS値が僅かに減少しているが、その差異は小さく、流体力に対するスパン方向の格子解像度の影響は小さい。一方、S32Dの場合、C32と比較して、抗力係数値および揚力係数のRMS値がそれぞれ約0.25および0.3増加するとともに背圧係数が約0.5減少している。従って、S32Dにおいて計算格子の(x,y)平面の解像度が改善されたこと、およびSGSモデルとしてDynamic mixedモデルが適用された影響が、各種流体力に対して顕著に現れている。

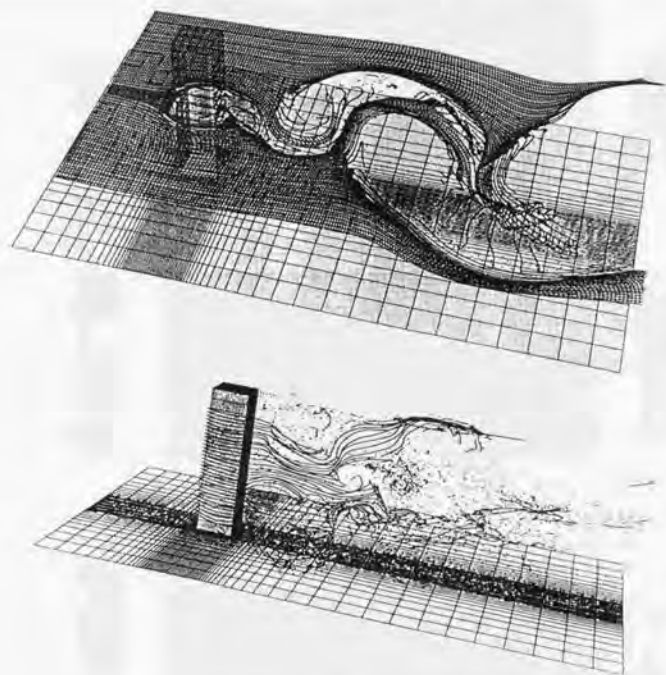


FIGURE A.4.1 The Kármán vortex street behind the square cylinder and the three-dimensional structure of the wake in case of C16.

#### A.4.2 後流の3次元性

C16の場合における流脈線を図A.4.1に示す。角柱背後には、Kármán渦列が形成されている。角柱背後に放出された渦が下流に流れていく過程で、層流域の流れを取り込むエントレインメントの作用によって、角柱背後の後流域の幅が徐々に広がっていることがわかる。レイノルズ数 $Re=22,000$ という高レイノルズ数においては、2次元物体周りの流れであっても、角柱背後の後流は、強い3次元性を持つことが図A.4.1の下図からわかる。

計算格子のスパン方向解像度が角柱後流の構造に及ぼす影響を調べるため、角柱中心線上の $(x, z)$ 断面における瞬時流れ方向渦度の分布図を図A.4.2に示す。混合層流れで観察されたようなコヒーレント構造あるいはリブ構造(Bernal and Roshko 1986)と呼ばれる縦渦構造が、それよりも大きなスケールのスパン方向渦構造に重畳していることが観察される。類似した構造は、スペクトル有限要素法を用いた円柱周りの低レイノルズ数流れの解析(Karniadakis and Triantafyllou 1992)でも観察されている。C16とC32を比較すると、1対の流れ方向渦のサイズは、スパン方向の格子解像度に大きく影響されていることがわかる。角柱背後 $x=2$ ～

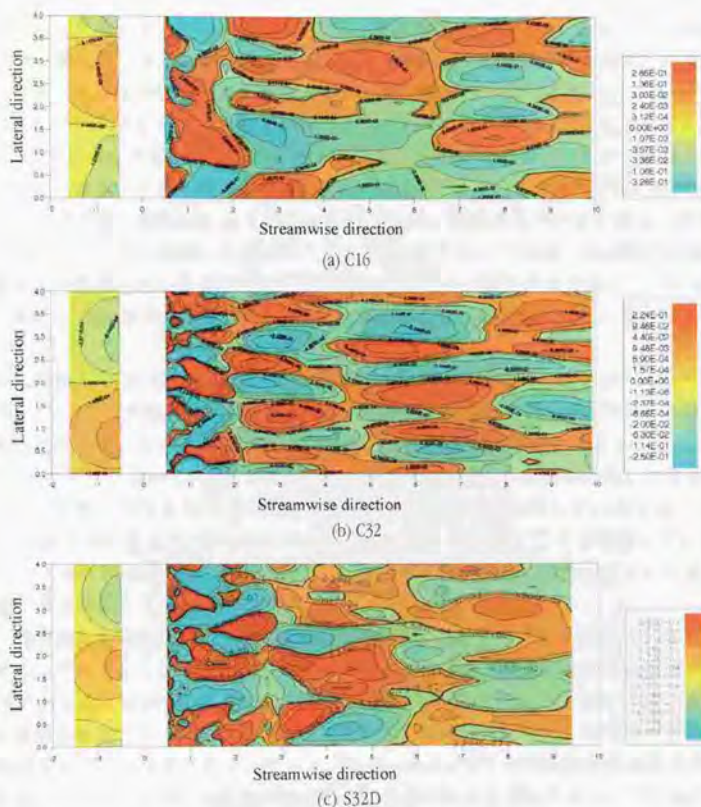


FIGURE A.3.2 Contours of the streamwise component of the velocity vector  $q_x$  on the  $(x, z)$ -plane sliced at the centerline.

8 の領域において、1 対の流れ方向渦のサイズは、C16 と C32 の場合それぞれ  $2H$  と  $H$  であり、スパン方向の解像度を 2 倍に改善しただけでスパン方向の構造が大きく変化していることがわかる。円柱周りの流れの場合、1 対の流れ方向渦の幅は、 $Re=320 \sim 21,000$  の広いレイノルズ数域においてほぼシリンダー直径に等しいことが実験で確認されている (Bays-Muchmore and Ahmed 1993)。角柱の場合、1 対の流れ方向渦の幅がどの程度であるか実験的に確認されていないが、円柱との類似性から、角柱一辺の長さ  $H$  程度の幅を持つ 1 対の流れ方向渦が形成されるものと推察される。従って、スパン方向の計算格子数は少なくとも  $32$  点  $/4H$  程度は確保すべきである。

#### A.4.3 時間・位相平均を施した速度場および乱流統計量

時間平均を施した GS 速度場  $\langle \bar{u} \rangle$ ,  $\langle \bar{v} \rangle$  および GS 乱流応力  $\langle \bar{u}''\bar{u}'' \rangle$ ,  $\langle \bar{v}''\bar{v}'' \rangle$ ,  $\langle \bar{u}''\bar{v}'' \rangle$  の  $(x, y)$

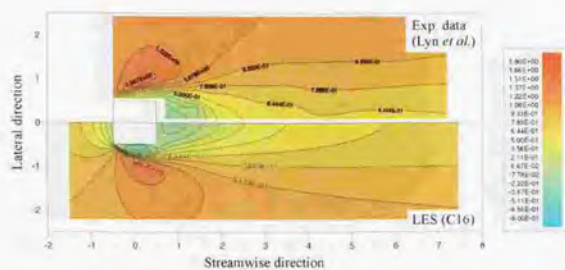
平面上での分布を図 A.4.3 ~ 7 に示す, ここで, 各分布図の上半分は, Lyn *et al.* (1995) の実験データから得られた等高線図である. 図 A.4.3 ~ 4 から, 速度場の分布図は, 定性的に実験とよく一致した結果が得られていることがわかる. 図 A.4.5 ~ 7 の乱流応力の場合, LES 計算結果と実験データと比較して, 若干の相違が見られる. まず, 図 A.3.5 において, LES から得られた GS 乱流応力  $\langle \bar{u}'\bar{u}' \rangle$  の分布の場合, 角柱側方の乱れの強い領域が角柱後方への巻き込みが実験と比較して強い傾向がある. また, 図 A.4.6 において, 角柱背後の後流域で GS 乱流応力  $\langle \bar{v}'\bar{v}' \rangle$  の強い領域が形成されているが, LES は, 後流域の角柱中心線上における GS 乱流応力  $\langle \bar{v}'\bar{v}' \rangle$  の減衰が実験よりも早いことがわかる. こうした実験と LES 解析結果の相違は, 計算格子の解像度および SGS モデルを変えた場合でも, ほぼ同様である. しかし, 全体的には, 実験と LES 解析から得られた GS 乱流応力分布は, 定性的によく一致していると言える.

位相平均を施した GS 速度場  $\langle \bar{u} \rangle_p$ ,  $\langle \bar{v} \rangle_p$  および GS 乱流応力  $\langle \bar{u}''\bar{u}'' \rangle_p$ ,  $\langle \bar{v}''\bar{v}'' \rangle_p$ ,  $\langle \bar{u}''\bar{v}'' \rangle_p$  の  $(x, y)$  平面上での分布を図 A.4.8 ~ 12 に示す. 代表的に Phase01 と Phase05 における分布が実験と比較されている. 位相平均速度場の分布は, 全体的に実験とかなりよく一致している. しかし,  $\langle \bar{v} \rangle_p$  の分布において, 角柱背後の極大・極小値の間隔が, 実験と比較して僅かに広がっている. 実験と LES 計算におけるストローハル数値がほぼ一致しているため, これは, 放出渦の下流への対流速度が計算において僅かに大きいということを意味している. 図 A.4.10 ~ 11 の GS 乱流応力  $\langle \bar{u}''\bar{u}'' \rangle_p$ ,  $\langle \bar{v}''\bar{v}'' \rangle_p$  の分布においては, 後流域において乱れの減衰が実験よりも早い.

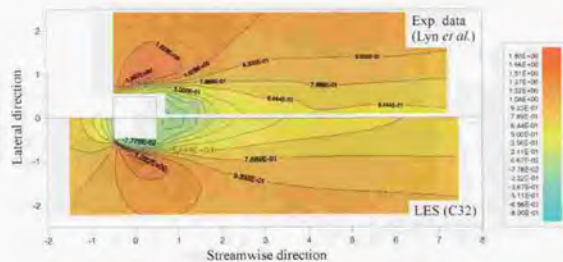
時間平均を施した流れ方向 GS 速度成分  $\langle \bar{u} \rangle$  の角柱中心線上のプロファイルを図 A.4.13 に示す. SGS モデルとして Smagorinsky モデルを使用した場合, 角柱背後の逆流領域が小さくなる傾向にあることが持田ら (1994) により報告されているが, 本 LES 解析結果 C16 および C32 でも同様な傾向であった. 角柱背後の逆流領域は, 角柱側方部のはく離領域の計算精度に大きく依存することが予想される. 従って, Smagorinsky モデルが乱流遷移過程を高精度に再現できないということが, 逆流領域の過小評価の原因であると考えられる. この欠点は, スパン方向の格子点を増加させて格子解像度を高くすることによって軽減されているが, それでも十分ではない. 乱流遷移過程を再現できると考えられている Dynamic mixed モデルを使用した S32D の場合, 逆流領域の大きさはかなり実験とよく一致する結果が得られ, Smagorinsky モデルと比較して大きく改善されている.

時間平均を施した GS 乱流応力  $\langle \bar{u}'\bar{u}' \rangle$ ,  $\langle \bar{v}'\bar{v}' \rangle$ ,  $\langle \bar{u}'\bar{v}' \rangle$  の角柱中心線上のプロファイルを図 A.4.14 に示す. C16 と C32 の場合, 乱流応力  $\langle \bar{u}'\bar{u}' \rangle$  の最大値がかなり過大評価されているが, 計算格子解像度が高く SGS モデルに Dynamic mixed モデルを使用した S32D の場合は, 実験とよく一致している. 一方, 乱流応力  $\langle \bar{v}'\bar{v}' \rangle$  の最大値は, 実験よりも過小評価され, S32D の場合でもその傾向は改善されていない. しかし, S32D の場合, 角柱背後における  $\langle \bar{v}'\bar{v}' \rangle$  の減衰が早いという欠点が改善される傾向にある. 角柱中心線上において, GS 乱流応力  $\langle \bar{u}'\bar{v}' \rangle$  は, 流れ場の左右対称性からゼロとならなければならない. LES 計算の全ケースにおいて, 角柱中心線上において, GS 乱流応力  $\langle \bar{u}'\bar{v}' \rangle$  はほぼゼロであるため, 時間平均の統計時間は十分であると考えられる.

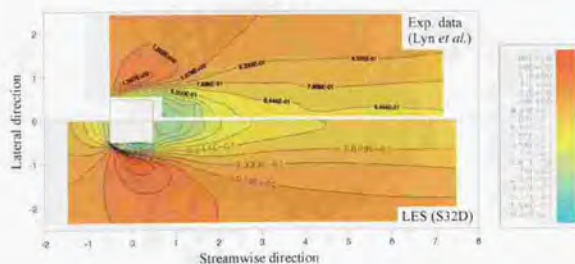




(a) C16

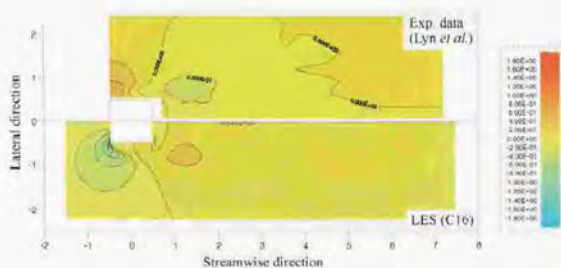


(b) C32

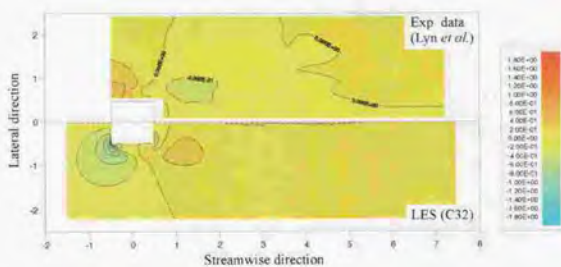


(c) S32D

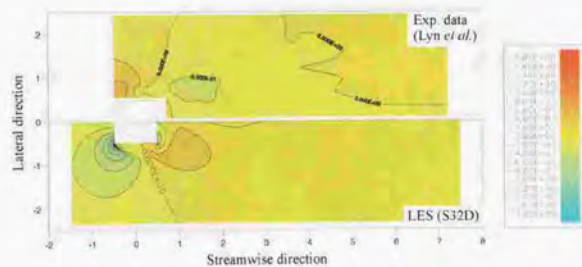
FIGURE A. 4. 3 Contours of the time-averaged streamwise velocity component  $\langle \bar{u} \rangle$ .



(a) C16

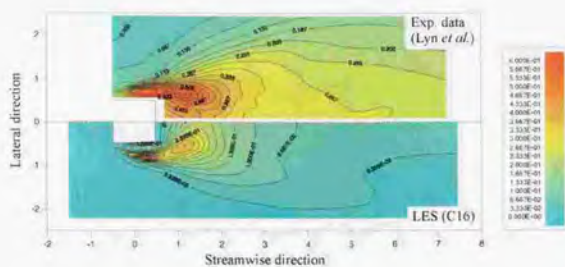


(b) C32

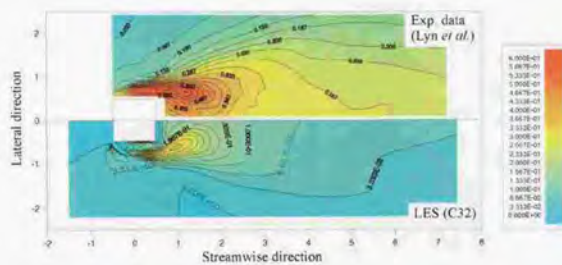


(c) S32D

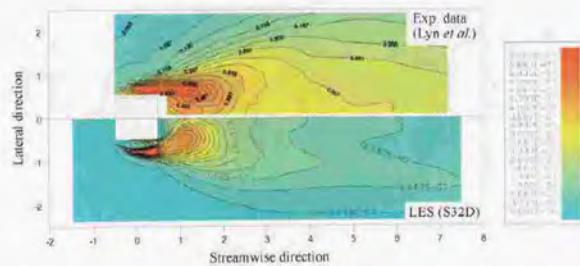
FIGURE A.4.4 Contours of the time-averaged lateral velocity component  $\langle \bar{v} \rangle$ .



(a) C16

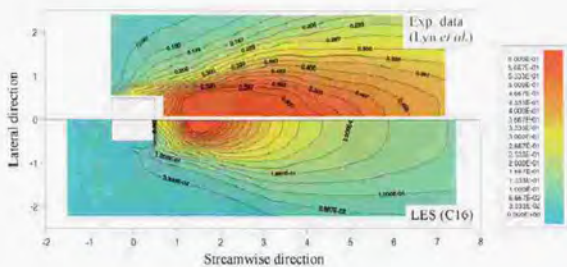


(b) C32

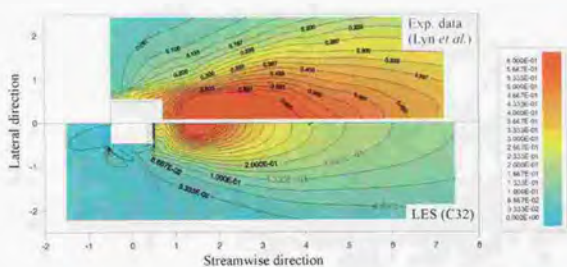


(c) S32D

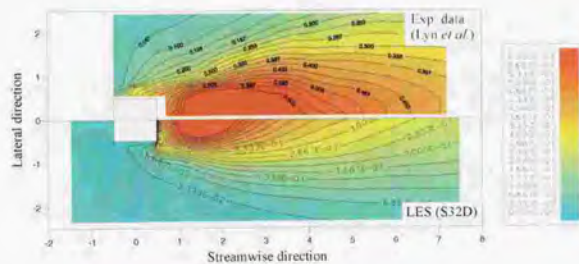
FIGURE A. 4. 5 Contours of the time-averaged turbulent stress  $\langle \bar{u}'u' \rangle$ .



(a) C16



(b) C32



(c) S32D

FIGURE A. 4. 6 Contours of the time-averaged turbulent stress  $\langle \bar{v}'v' \rangle$ .





FIGURE A. 4. 8 Contours of the phase-averaged streamwise velocity component  $\langle \bar{u} \rangle$ .

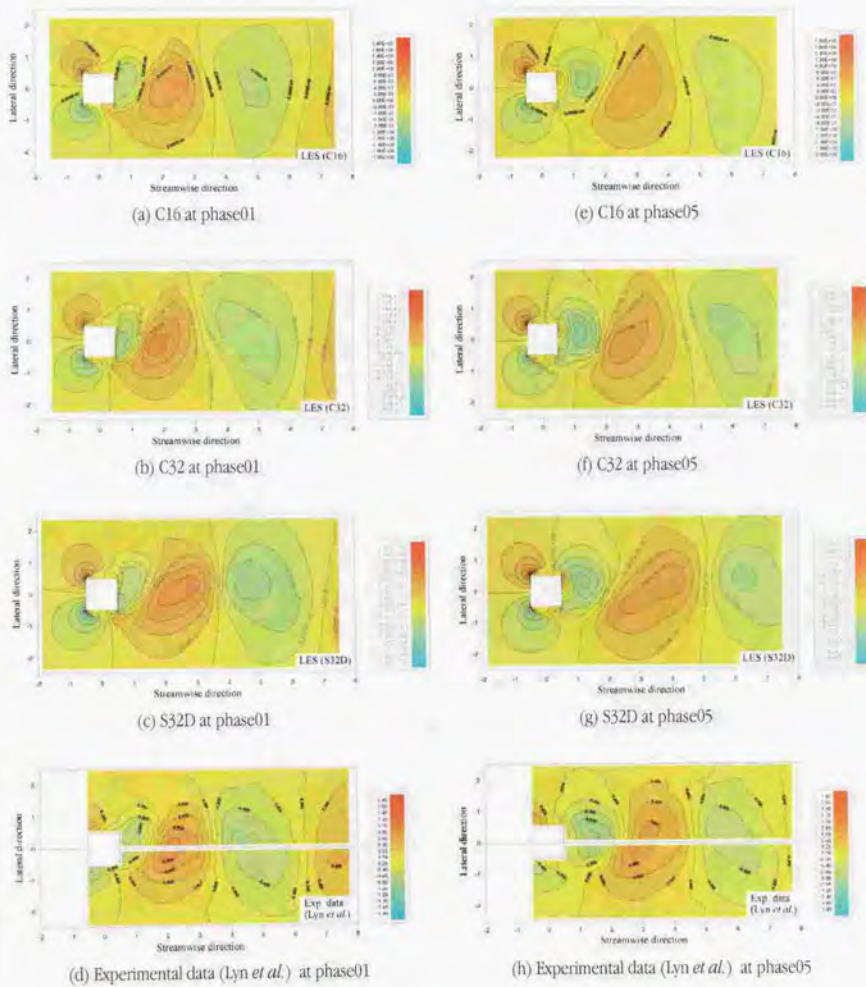


FIGURE A.4.9 Contours of the phase-averaged streamwise velocity component  $\langle \bar{u} \rangle$ .

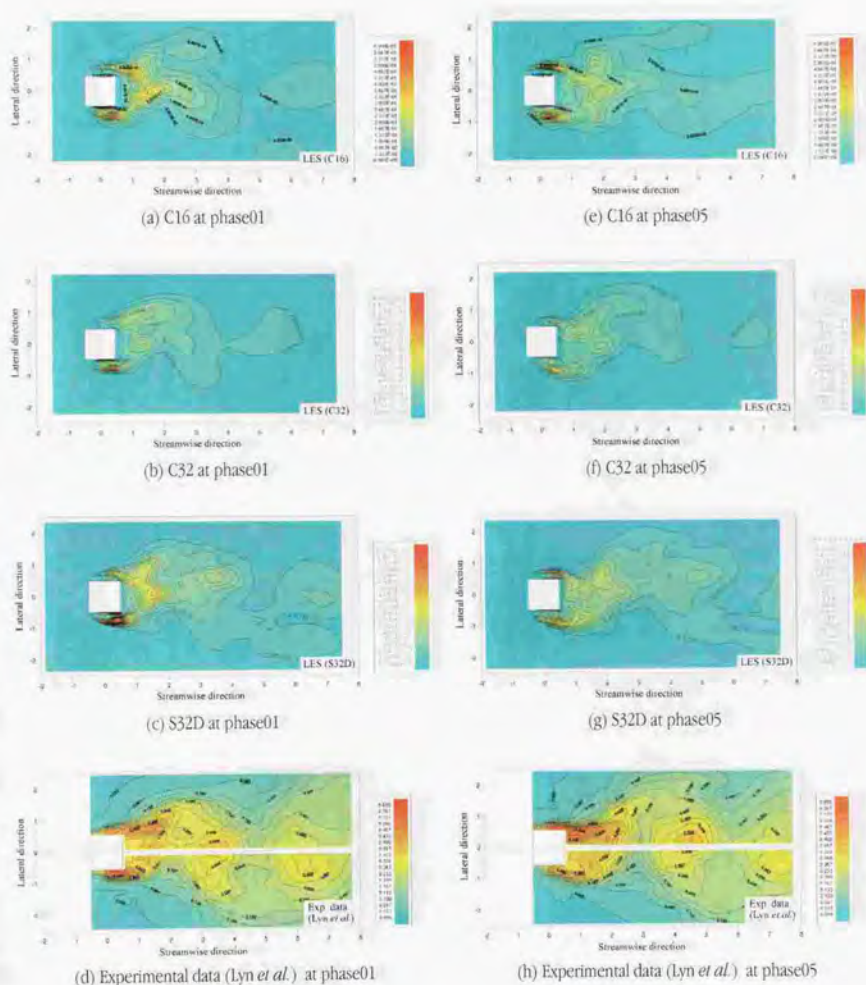


FIGURE A. 4. 10 Contours of the phase-averaged turbulent stress  $\langle \overline{u'u'} \rangle$ .



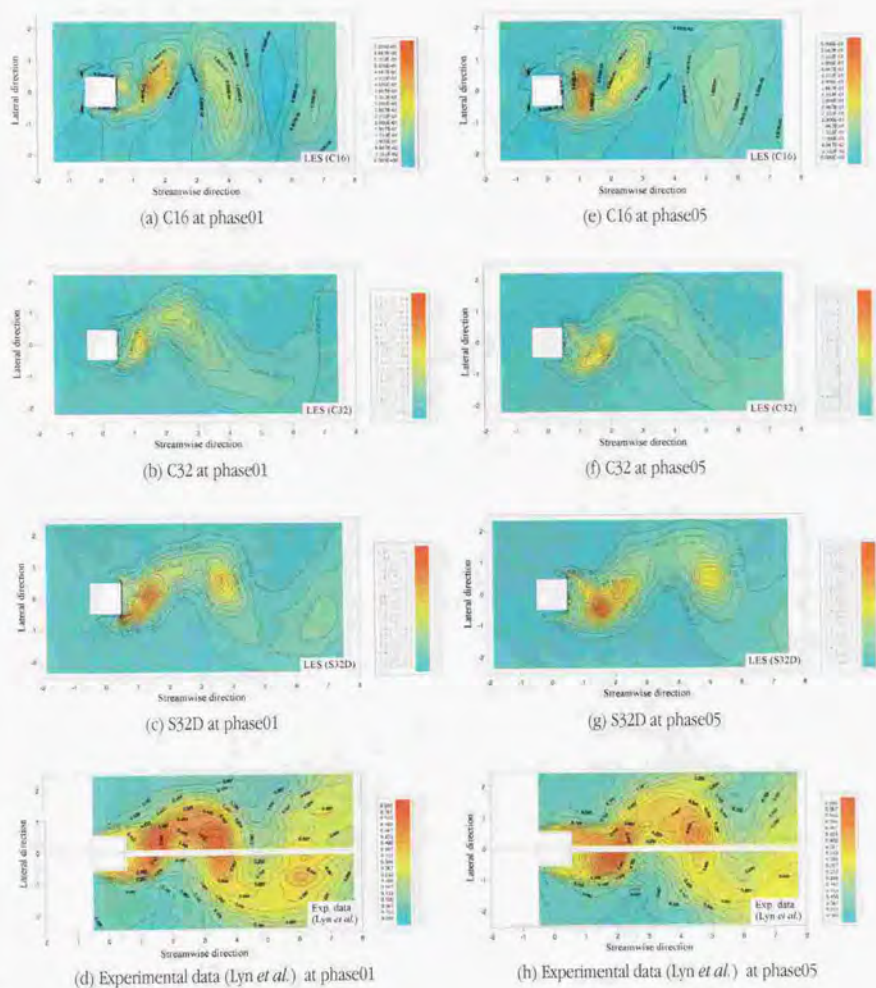


FIGURE A.4.11. Contours of the phase-averaged turbulent stress  $\langle \bar{v}'v' \rangle$ .

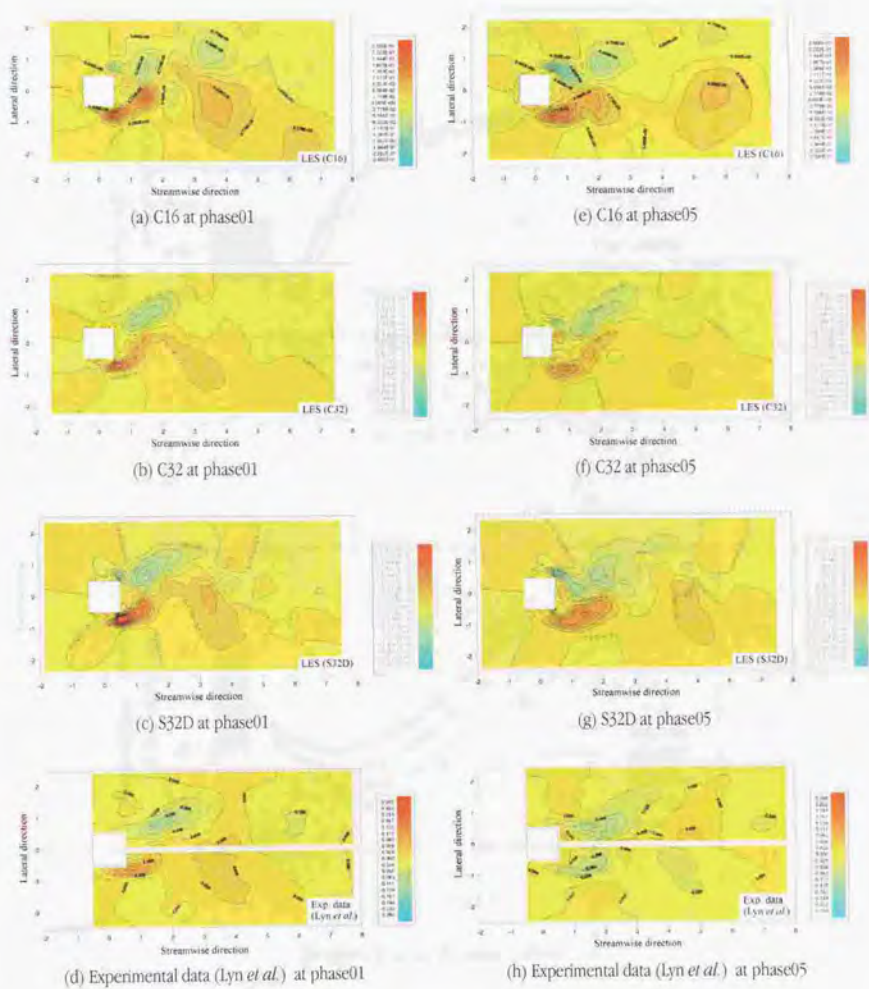
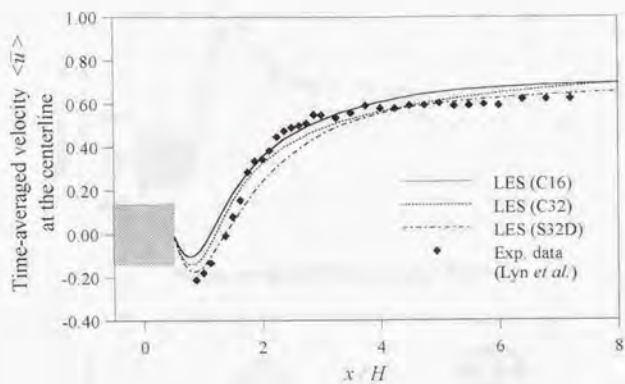
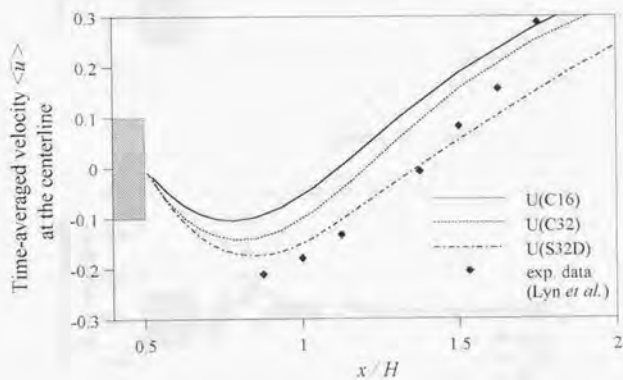


FIGURE A. 4. 12 Contours of the phase-averaged turbulent stress  $\langle \bar{u}'v' \rangle$ .

(a)  $x=0.5 \sim 8.0$ .

(b) Close-up behind the square cylinder.

FIGURE A. 4. 13 Profiles of the time-averaged GS streamwise velocity component  $\langle \bar{u} \rangle$  at the centerline.

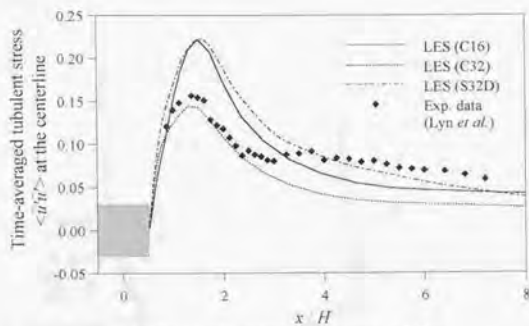
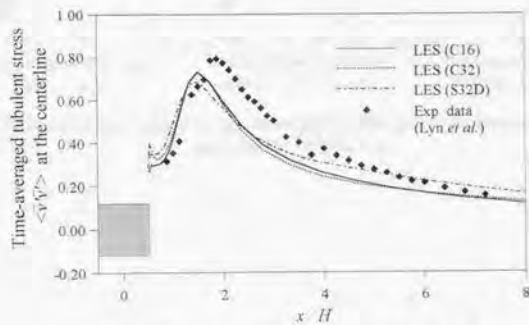
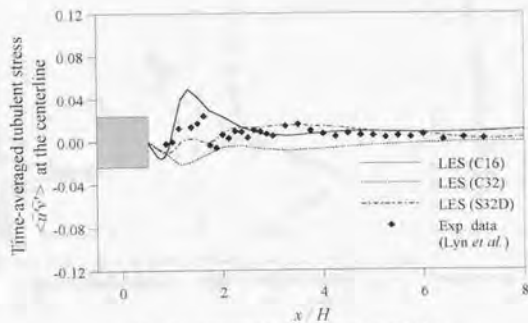
(a) Time-averaged GS turbulent stress  $\langle \tilde{u}\tilde{u} \rangle$ .(b) Time-averaged GS turbulent stress  $\langle \tilde{v}\tilde{v} \rangle$ .(c) Time-averaged GS turbulent stress  $\langle \tilde{u}\tilde{v} \rangle$ .

FIGURE A.4.14 Profiles of the time-averaged GS turbulent stresses at the centerline.

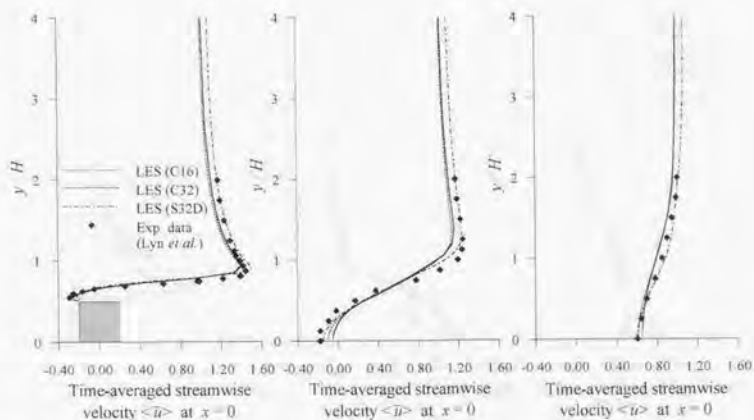


FIGURE A. 4. 15 Profiles of the time-averaged GS streamwise velocity component  $\langle \bar{u} \rangle$  at various streamwise positions. (a)  $x=0$ ; (b)  $x=1$ ; (c)  $x=5$ .

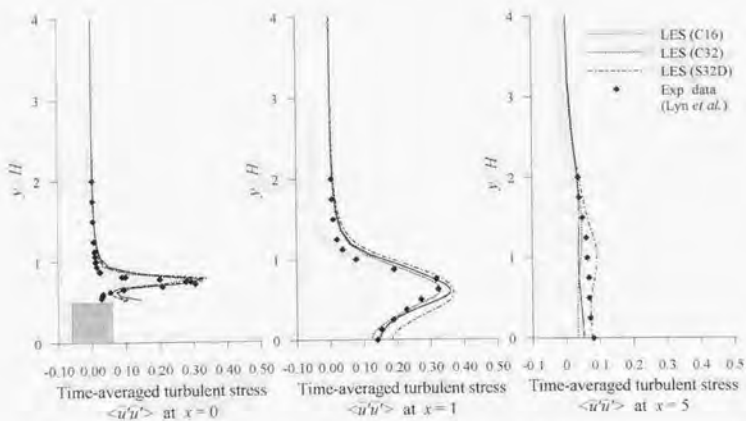


FIGURE A. 4. 16 Profiles of the time-averaged GS turbulent stress  $\langle \bar{u}'u' \rangle$  at various streamwise positions. (a)  $x=0$ ; (b)  $x=1$ ; (c)  $x=5$ .

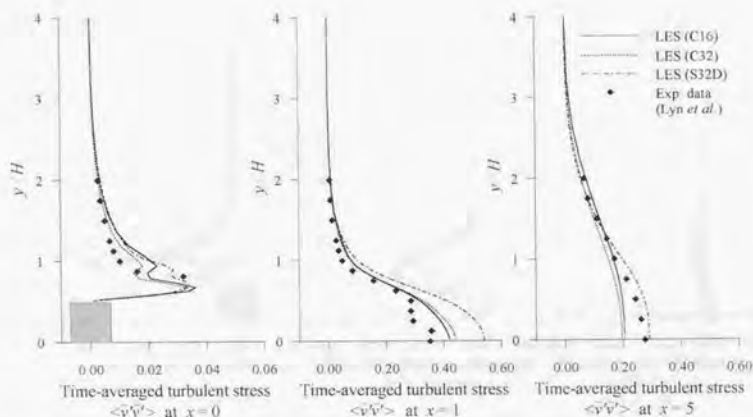


FIGURE A. 4. 17 Profiles of the time-averaged GS turbulent stress  $\langle \tilde{v}\tilde{v}' \rangle$  at various streamwise positions. (a)  $x=0$ ; (b)  $x=1$ ; (c)  $x=5$ .

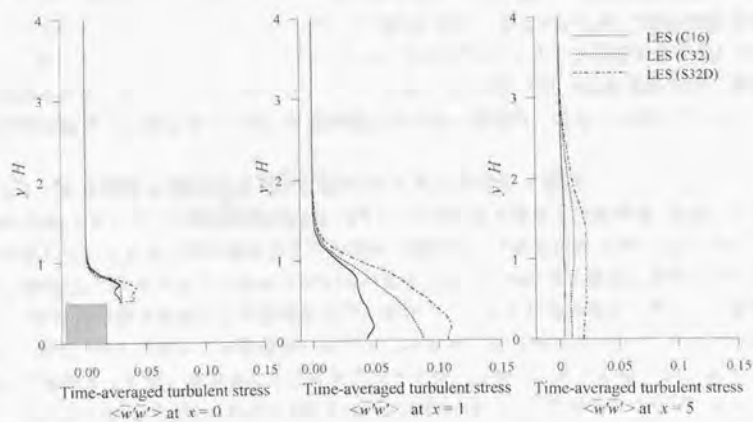


FIGURE A. 4. 18 Profiles of the time-averaged GS turbulent stress  $\langle \tilde{w}\tilde{w}' \rangle$  at various streamwise positions. (a)  $x=0$ ; (b)  $x=1$ ; (c)  $x=5$ .

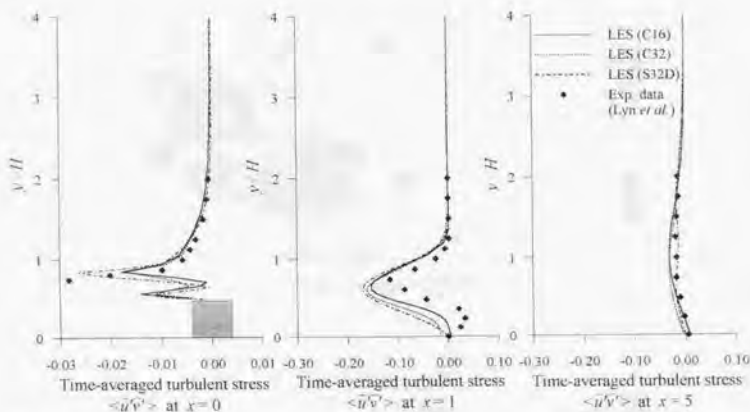


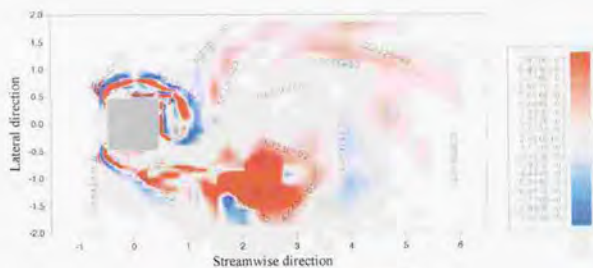
FIGURE A.4.19 Profiles of the time-averaged GS turbulent stress  $\langle \bar{u}'\bar{v}' \rangle$  at various streamwise positions. (a)  $x=0$ ; (b)  $x=1$ ; (c)  $x=5$ .

時間平均を施した流れ方向GS速度成分 $\langle \bar{u} \rangle$ およびGS乱流応力 $\langle \bar{u}'\bar{u}' \rangle$ ,  $\langle \bar{v}'\bar{v}' \rangle$ ,  $\langle \bar{u}'\bar{v}' \rangle$ の流れ方向 $x=0, 1, 5$ におけるプロファイルを図A.4.15～19に示す。図A.4.15において、流れ方向流速 $\langle \bar{u} \rangle$ は、全ケースにおいて実験と定性的によく一致しているが、S32Dが最も実験とよく一致している。特に、S32Dはせん断層の速度プロファイルを高精度に再現しており、Dynamic mixedモデルの効果が大きい。図A.4.16～19において、GS乱流応力は、定量的にLES解析結果と実験結果との間に相違が見られるが、定量的にはよく一致している。

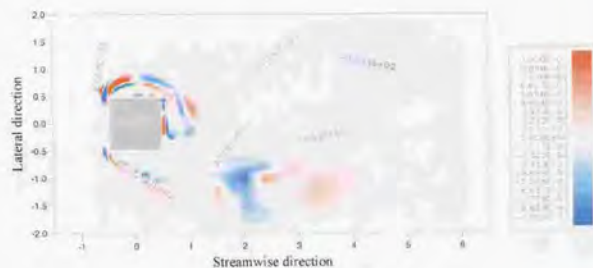
#### A.4.4 対流項風上化によるGS運動エネルギーの分散・散逸

GS運動エネルギーの輸送方程式(A.2.1)中の全粘性(分子粘性+乱流粘性)散逸および対流項の風上化による人工的分散項および散逸項の瞬時値の分布を図A.4.20～22に示す。対流項にQUICKが使用されたC16およびC32の場合、式(A.2.4)の第1項および第2項で表されるQUICKの分散誤差項および散逸誤差項の影響は、全粘性散逸の効果と比較して無視できない。特に、角柱近傍および後流域において、QUICKの散逸誤差が大きく、これらの領域で乱れが実際よりも強く減衰されることが予想される。これは、図A.4.10～11、図A.4.14において、C16およびC32におけるGS乱流応力の垂直成分が、実験値よりも早く減衰されていることと対応している。これら定性的考察から、計算格子点数をかなり増加させるか、または人工的誤差項の影響がより小さい高次の風上差分の使用が、信頼性のあるLES解析に必要なとされることがわかる。

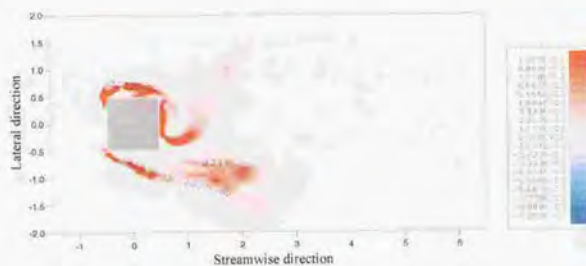
しかし、図A.4.22から、格子解像度を改善し対流項に5次精度風上差分に変更したS32D



(a) Dissipative effect of QUICK.



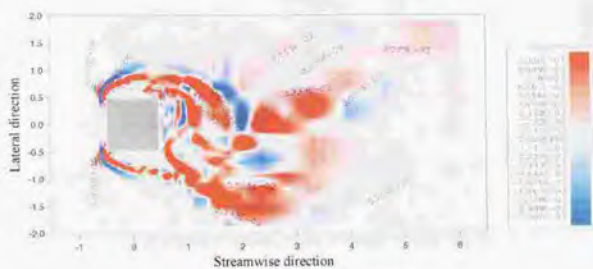
(b) Dispersive effect of QUICK.



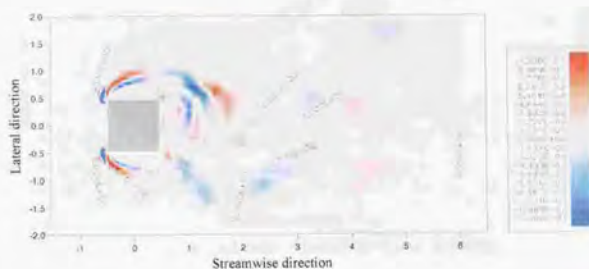
(c) Total (molecular + turbulent) viscous dissipation.

FIGURE A. 4. 20 The comparison of the instantaneous magnitude of the error term of QUICK and total viscous dissipation in transport equation of the GS kinetic energy for C16.

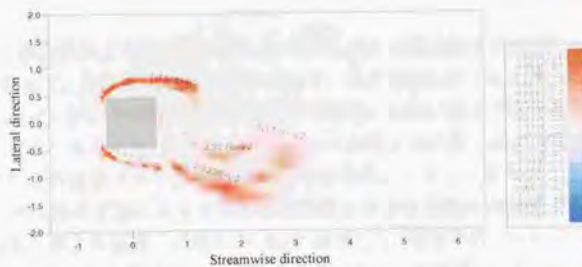




(a) Dissipative effect of QUICK.

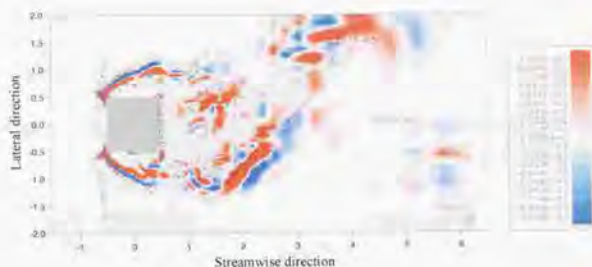


(b) Dispersive effect of QUICK

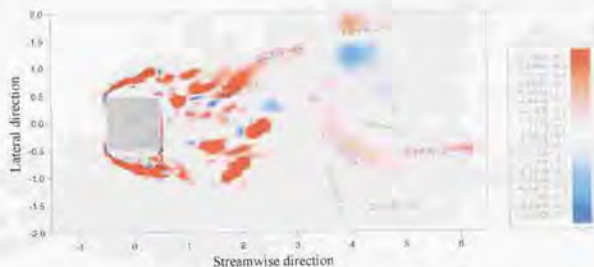


(c) Total (molecular + turbulent) viscous dissipation.

FIGURE A. 4. 21 The comparison of the instantaneous magnitude of the error term of QUICK and total viscous dissipation in transport equation of the GS kinetic energy for C32.



(a) Dissipative effect of the 5th order upwind scheme.



(b) Total (molecular + turbulent) viscous dissipation.

FIGURE A.4.22 The comparison of the instantaneous magnitude of the error term of the 5th order upwind scheme and total viscous dissipation in transport equation of the GS kinetic energy for C32.

の場合でも、風上化による散逸効果がSGSモデルによる散逸効果と比較して無視できない程度である。従って、高精度なLES解析において、風上差分スキームの導入は避けるべきである。しかし、LESを工学的応用問題へ応用する場合、少ない格子点数で安定な計算を行うということが求められるため、対流項差分スキームの風上化に伴う誤差の影響を軽減しつつ安定な計算を行える差分スキームの開発が求められる。こうした試みとして、Kawashimaら(1996)は、流れ場の状態によって人工的散逸項にかかる係数の調節する対流項風上差分スキームを開発し静止角柱周りの流れのLESに適用して、検証を行っている。また、朴ら(1996)は、ウィグルの発生する領域において風上差分スキームを使用し、それ以外の領域では通常の方法を使用する方法をチャンネル内立方体障害物周辺の流れのLESに適用し、全領域に風上差分スキームを使用する場合よりも計算結果が改善されることを報告している。

こうした風上化による悪影響にもかかわらず、全ケースにおいて、時間平均速度場および乱流統計量が実験値とかなりよく一致した結果が得られたのは、解析対象である角柱周りの流れが大スケールの渦運動、すなわちカルマン渦により支配されているため、対流項の風上化

の影響が出にくいということが考えられる。

#### A.5 付録Aのまとめ

異なる解像度の計算格子, 対流項風上差分スキーム, SGSモデルを用いて, 2次元正四角柱周りの流れのラージエディシミュレーションを行い, 以下のような知見を得た。

1. 後流のスパン方向構造は, スパン方向の計算格子解像度に大きく依存し, 1対の流れ方向のサイズが変化する。後流の3次元構造を正しく再現するためには, スパン方向に少なくとも32点/4H程度の格子解像度が必要である。
2. ラージエディシミュレーションにおいて, 対流項に風上差分スキームを適用した影響を調査するために, 対流項差分スキームの風上化に伴うGS運動エネルギーの分散・散逸誤差を評価した。その結果, 風上差分スキームの分散・散逸誤差は, 分子粘性に乱流粘性を加えた全粘性散逸と比較して無視できず, その傾向は, 風上差分スキームの高精度化および計算格子点数の増加によっても, 本質的には解決できなかった。
3. 2で述べられた風上差分スキームの悪影響にも関わらず, ストローハル数, 角柱に作用する各種流体力係数, 時間平均・位相平均速度場および乱流統計量が比較的実験データとよく一致した。これは, 角柱周りの流れが, 大きなスパン方向渦構造の影響が支配的であるためであると考えられる。

## 参考文献

- 石川正昭 (1989). 反変成分を用いた一般座標系による流れの数値解析. 東京大学修士論文.
- 大岡龍三・村上周三・持田灯 (1997). LESにおけるコロケーショングリッドのエネルギー非保存性の検討. 生産研究, 49-1, 19-26.
- 梶島岳夫・太田貴士・三宅裕 (1997a). 乱流の直接数値計算におけるスタガード格子とコロケート格子の比較. 第8回計算流体シンポジウム講演論文集, 287-288.
- 梶島岳夫・太田貴士, 岡崎和彦, 三宅裕 (1997b). コロケート格子系による非圧縮性流れの高次差分解析. 日本機化学会論文集, 63-614, B, 3247-3254.
- 越塚誠一・岡芳明・近藤駿介 (1997). 反変ベクトルの物理成分を基礎変数とする非圧縮性 Navier-Stokes 方程式のスタガード差分法. 第2回計算流体シンポジウム講演論文集, 583-586.
- 小垣哲也・岡島厚・小林敏雄 (1996). ラージエディシミュレーションによる静止および振動角柱周りの乱流数値解析. 日本機化学会論文集, 62-597, B, 1716-1724.
- 小林敏雄・戴毅 (1994). LES 乱流モデリングの動向. 生産研究, 46-2, 53-58.
- 小林光・村上周三・持田灯・Squires, K. D. (1996). Lagrangian Dynamic SGS Model による2次元角柱周辺流れの LES 解析. 生産研究, 48-2, 43-48.
- 佐竹信一 (1994). 乱流摩擦抵抗低減機構に関する基礎的研究. 東京大学博士論文.
- 鈴木哲也・河村洋 (1994). 乱流の直接数値シミュレーションにおける差分式の整合性. 日本機化学会論文集, 60-578, B, 3280-3286.
- 戴毅・小林敏雄 (1992). 一様流に流される渦の流出境界条件の検討. 日本機化学会論文集, 62-604, B, 313-320.
- 谷口伸行 (1995). Dynamic SGS モデルの差分法における定式化. 生産研究, 47-2, 120-123.
- 谷口伸行 (1997). 差分法および要素法 LES におけるダイナミック SGS モデルの評価. 生産研究, 49-1, 11-18.

- 坪倉誠 (1996a). 平面衝突噴流の LES 数値解析に関する研究. 東京大学博士論文.
- 坪倉誠 (1996b). 改良型 Dynamic sub-grid scale model のチャンネル乱流による評価. 日本機学会論文誌, 62-600, B, 3015-3022.
- 坪倉誠 (1996c). スケール相似則モデルの併用によるダイナミック SGS モデルのチャンネル乱流 LES による検証. 日本機学会論文誌, 62-601, B, 3292-3299.
- 長谷川里美・長谷川秀彦・藤野清次 (1996). 反復法 Templates. 朝倉書店.
- 朴南燮・小林敏雄・谷口伸行 (1996). チャンネル内立方体障害物周辺の流れの LES と QUICK の影響について. 第 10 回数値流体力学シンポジウム講演論文集, 172-173.
- 藤野清次・松本直樹・水藤寛 (1991). Bi-CG STAB 法の流体解析への応用. 第 5 回数値流体力学シンポジウム講演論文集, 501-504.
- 村上周三・加藤信介・須山喜美 (1994). 室内気流数値解析の診断システム—移流項差分への珉 QUICK スキーム適用に関する検討—, 生産研究, 38-12, 44-52.
- 持田灯・村上周三・富永禎秀・小林光 (1994). Dynamic Subgrid-scale Model に基づく LES による 2 次元角柱周辺流れの解析. 生産研究, 46-2, 60-66.
- 森西洋平 (1991).  $C_0$  を変数とするスマゴリンスキーモデルの最適化, レギュラ格子系の差分スキーム. 日本機学会論文誌, 62-604, B, 2601-2605.
- 森西洋平 (1996a). 非圧縮性流体解析における差分スキームの保存特性 (第 1 報, 解析的要求事項, 離散オペレータの定義, レギュラ格子系の差分スキーム). 日本機学会論文誌, 62-604, B, 4090-4097.
- 森西洋平 (1996b). 非圧縮性流体解析における差分スキームの保存特性 (第 2 報, スタガードおよびコロケート格子系の差分スキーム). 日本機学会論文誌, 62-604, B, 4098-4105.
- 森西洋平 (1996c). 非圧縮性流体解析における差分スキームの保存特性 (第 3 報, 数値計算による議論の検証). 日本機学会論文誌, 62-604, B, 4106-4112.
- 森西洋平 (1998a). コロケート格子系差分のエネルギー保存特性の改善方法. 第 13 回生研 NST シンポジウム講演論文集, 15-19.
- 森西洋平 (1998b). コロケート格子系差分の運動エネルギー保存特性の改善方法. 日本機学会論文誌, 投稿中.
- Bays-Muchmore, B and Ahmed, A. (1993). Streamwise vortex structure in plane mixing layers. *Phys. Fluids*, 170, 499-525.
- Bardina, J., Ferziger, J. H. and Reynolds, W. C. (1983). Improved turbulence models based on large eddy simulation of homogeneous, incompressible, turbulent flows. *Technical Report No. TF-19*, Stanford

University.

- Beaudan, P. and Moin, P. (1994). Numerical experiments on the flow past a circular cylinder at sub-critical Reynolds number. *Technical Report No. TF-62*, Stanford University.
- Bearman, P. W. and Obasaju, E. D. (1982). An experimental study of pressure fluctuations on fixed and oscillating square-section cylinders. *J. Fluid Mech.*, **119**, 297-321.
- Bernal, B. P. and Roshko, A. (1986). Streamwise vortex structure in plane mixing layers. *J. Fluid Mech.*, **170**, 499-525.
- Bernard, R. S. and Kapitza, H. (1992). How to discretize the pressure gradient for curvilinear MAC grids. *J. Comput. Phys.*, **99**, 288-298.
- Canuto, C., Hussaini, M. Y., Quarteroni, A. and Zang, T. A. Spectral methods in fluid dynamics. Springer-Verlag.
- Carati, D., Ghosal, S. and Moin, P. (1995). On the representation of backscatter in dynamic localization model. *Phys. Fluids*, **7**, 606-616.
- Cardell, G. S. Flow past a circular cylinder with a permeable splitter plate. *Ph. D. Thesis*, Graduate Aeronautical Laboratories, California Institute of Technology.
- Chasnov, J. R. (1991). Simulation of the Kolmogorov inertial subrange using an improved subgrid model. *Phys. Fluids*, **A3**(1), 188-200.
- Choi, H., Moin, P. and Kim, J. (1993). Direct numerical simulation of turbulent flow over riblets. *J. Fluid Mech.*, **255**, 503-539.
- Chollet, J. P., Voke, P. R. and Kleiser, L. (1996). *Proceedings of the ERCOFTAC Workshop held in Grenoble, France, 16-19 September 1996*. Kluwer Academic Publishers.
- Chorin, J. C. (1969). On the convergence of discrete approximations to the Navier-Stokes equations. *Math. Comput.*, **23**, 341-352.
- Chorin, J. C. (1969). On the convergence of discrete approximations to the Navier-Stokes equations. *Math. Comput.*, **23**, 341-352.
- Clark, R. A., Ferziger, J. H. and Reynolds, W. C. (1979). Evaluation of subgrid-scale models using an accurately simulated turbulent flow. *J. Fluid Mech.*, **91**, 1-16.
- Deardorff, J. W. (1970). A numerical study of three-dimensional turbulent channel flow at large Reynolds numbers. *J. Fluid Mech.*, **41**, 453-480.
- Germano, M. (1986). A proposal for a redefinition of the turbulent stresses in the filtered Navier-Stokes equations. *Phys. Fluids*, **29**(7), 2323-2324.

- Germano, M., Piomelli, U., Moin, P. and Cabot, W. H. (1991). A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model. *Phys. Fluids*, **A3**(7), 1760-1765.
- Germano, M. (1992). Turbulence: the filtering approach. *J. Fluid Mech.*, **238**, 325-336.
- Ghosal, S. and Moin, P. (1993). On the large eddy simulation of turbulent flows in complex geometry. *Annual Research Briefs - 1993*, Center for Turbulence Research, Stanford University /NASA Ames Research, 111-127.
- Ghosal, S. and Moin, P. (1995). The basic equations for the large eddy simulation of turbulent flows in complex geometry. *J. Comput. Phys.*, **118**, 24-37.
- Ghosal, S., Lund, T. S., Moin, P. and Akselvoll, K. (1995). A dynamic localization model for large-eddy simulation of turbulent flows. *J. Fluid Mech.*, **286**, 229-255.
- Harlow, F. H. and Welch, J. E. (1965). Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface. *Phys. Fluids.*, **8**, 2182-2189.
- Hirt, C. W. and Cook, J. L. (1972). Calculating three-dimensional flows around structures. *J. Comput. Phys.*, **10**, 324-340.
- Horiuti, K. (1989). The role of the Bardina model in large eddy simulation of turbulent channel flow. *Phys. Fluids*, **A1**(2), 426-428.
- Horiuti, K. (1992). [ftp://ftp.thtlab.t.u-tokyo.ac.jp/DNS/CH12\\_PG.WL3](ftp://ftp.thtlab.t.u-tokyo.ac.jp/DNS/CH12_PG.WL3) (DNS data base at a homepage of Kasagi laboratory in University of Tokyo)
- Horiuti, K. (1995). Backward cascade of subgrid-scale kinetic energy in wall bounded and free turbulent flows. *Proceedings of the Tenth Symposium on Turbulent Shear Flow, Pennsylvania, August 14-16, 1995*, Session 20-13-18.
- Horiuti, K. (1997). A new dynamic multi-parameter mixed model. *Advances in DNS/LES (Proceedings of the First AFOSR International Conference on DNS/LES, Ruston, Louisiana, August 4-8, 1997)*, 185-196.
- Jansen, K. (1995). Preliminary large-eddy simulations of flow around a NACA 4412 airfoil using unstructured grids. *Annual Research Briefs - 1995*, Center for Turbulence Research, Stanford University /NASA Ames Research, 61-72.
- Jansen, K. (1996). Large-eddy simulations of flow around a NACA 4412 airfoil using unstructured grids. *Annual Research Briefs - 1996*, Center for Turbulence Research, Stanford University /NASA Ames Research, 225-232.
- Jiménez, J. and Moin, P. (1991). The minimal flow unit in near-wall turbulence. *J. Fluid Mech.*, **225**, 213-240.

- Jordan, A. S. (1997). Dynamic subgrid-scale modeling in generalized curvilinear coordinates. *Advances in DNS/LES (Proceedings of the First AFOSR International Conference on DNS/LES, Ruston, Louisiana, August 4-8, 1997)*, 307-316.
- Kaltenbach, H.-J. (1993). Large-eddy simulation of flow in a plane, asymmetric diffuser. *Annual Research Briefs - 1993*, Center for Turbulence Research, Stanford University /NASA Ames Research, 101-109.
- Kaltenbach, H.-J. and Choi, H. (1995). Large-eddy simulation of flow around an airfoil on a structured mesh. *Annual Research Briefs - 1995*, Center for Turbulence Research, Stanford University /NASA Ames Research, 51-60.
- Karki, K. C. and Patankar, S. V. (1989). Pressure based calculation procedure for viscous flows at all speeds in arbitrary configurations. *AIAA J.*, **27-9**, 1167-1174.
- Kamiadakis, G. M. and Triantafyllou, G. S. (1992). Three-dimensional dynamics and transition to turbulence in the wake of bluff objects. *J. Fluid Mech.*, **238**, 1-30.
- Kim, J., Moin, P. and Moser, R. (1987). Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number. *J. Fluid Mech.*, **177**, 133-166.
- Kawashima, N. and Kawamura, H. (1996). Numerical analysis of LES of flow past a long square cylinder. *Direct and Large Eddy Simulation II (Proceedings of the ERCOFTAC Workshop, Grenoble, France, 16-19 September, 1996)*, 413-422.
- Lee, B. E. (1975). The effect of turbulence on the surface pressure field of a square prism. *J. Fluid Mech.*, **69**(2), 263-282.
- Lele, S. K. (1992). Compact finite difference schemes with spectral-like resolution. *J. Comput. Phys.*, **103**, 16-42.
- Lilly, D. K. (1967). *Proceedings of the IBM Scientific Computing Symposium on Environmental Sciences IBM form no. 321-1951*, 195.
- Lilly, D. K. (1992). A proposed modification of the Germano subgrid-scale closure method. *Phys. Fluids*, **A4**(3), 633-635.
- Lorenco, L. M. and Shih, C. (1993). Characteristics of the plane turbulent near wake of a circular cylinder. A particle image velocimetry study. (extracted from Mittal (1996))
- Lyn, D. A., Einav, S., Rodi, W. and Park, J.-H. (1994). The flapping shear layer formed by flow separation from the forward corner of a square cylinder. *J. Fluid Mech.*, **267**, 353-376.
- Lyn, D. A., Einav, S., Rodi, W. and Park, J.-H. (1995). A laser-Doppler velocimetry study of ensemble-averaged characteristics of the turbulent near wake of a square cylinder. *J. Fluid Mech.*, **304**, 285-



319.

- Majumdar (1988). Role of underrelaxation in momentum interpolation for calculation of flow with nonstaggered grids. *Numerical Heat Transfer*, **13**, 125-132.
- Maliska, C. R. and Raithby, G. D. (1984). A method for computing three dimensional flows using non-orthogonal boundary-fitted co-ordinates. *Int. J. Num. Meth. Fluids*, **4**, 519-537.
- Mansour, M. N., Kim, J. and Moin, P. (1988). Reynolds-stress and dissipation-rate budgets in a turbulent channel flow. *J. Fluid Mech.*, **194**, 15-44.
- Mansour, M. N., Ferziger, J. H. and Reynolds, W. C. (1978). Large-eddy simulation of a turbulent mixing layer. *Technical Report No. TF-11*, Stanford University.
- Meneveau, C., Lund, T. S. and Cabot, W. H. (1994). A Lagrangian dynamic subgrid-scale model of turbulence. *Proceedings of the Summer Program (Center for Turbulence Research)*, 1-29.
- Meneveau, C., Lund, T. S. and Cabot, W. H. (1996). A Lagrangian dynamic subgrid-scale model of turbulence. *J. Fluid Mech.*, **319**, 353-385.
- Mittal, R. (1995). Large-eddy simulation of flow past a circular cylinder. *Annual Research Briefs - 1995*, Center for Turbulence Research, Stanford University /NASA Ames Research, 107-116.
- Mittal, R. (1996). Progress on LES of flow past a circular cylinder. *Annual Research Briefs - 1996*, Center for Turbulence Research, Stanford University /NASA Ames Research, 233-241.
- Moin, P and Kim, J. (1982). Numerical investigation of turbulent channel flow. *J. Fluid Mech.*, **118**, 341-377.
- Morinishi, Y. and Kobayashi, T. (1990). Large eddy simulation of backward-facing step flow. *Engineering turbulence modelling and measurement*, 279-286.
- Norberg, G. (1987). Effects of Reynolds number and a low-intensity free-stream turbulence on the flow around a circular cylinder. Publication No. 87/2, Department of Applied Thermodynamics and Fluid Mechanics. Chalmers University of Technology, Gothenburg, Sweden.
- Ong, L. and Wallace, J. (1996). The velocity field of the turbulent very near wake of a circular cylinder. *Exp. Fluids*, **20**, 441-453.
- Pauley, L. L., Moin, P. and Reynolds, W. C. (1990). The structure of two-dimensional separation. *J. Fluid Mech.*, **220**, 397-411.
- Peric, M., Kessler, R. and Scheuerer, G. (1988). Comparison of finite-volume numerical methods with staggered and collocated grids. *Computers & Fluids*, **16-4**, 389-403.
- Piomelli, U. Moin, P. and Ferziger, J. H. (1988). Model consistency in large eddy simulation of turbulent

- channel flows. *Phys. Fluids*, **31**(7), 1884-1891.
- Piomelli, U. and Liu, Junhui. (1995). Large-eddy simulation of rotating channel flows using a localized dynamic model. *Phys. Fluids*, **7**(4), 839-848.
- Rai, M. M. and Moin, P. (1991). Direct simulations of turbulent flow using finite-difference schemes. *J. Comput. Phys.*, **96**, 15-53.
- Rhic, C. M. and Chow, R. L. (1983). Numerical study of the turbulent flow past an airfoil with trailing edge separation. *AIAA J.*, **21**, 1525-1532.
- Rodi, W. and Ferziger, J. H. (1995). *A document of "Workshop on Large Eddy Simulation of Flows past Bluff Bodies", Tegernsee, Germany.* not published
- Salvetti, M. V. and Banerjee, S. (1995). *A priori* tests of a new dynamic subgrid-scale model for finite-difference large-eddy simulations. *Phys. Fluids*, **7**(11), 2831-2847.
- Scotti, A., Meneveau, C. and Lilly, D. K. (1993). Generalized Smagorinsky model for anisotropic grids. *Phys. Fluids*, **A5**(9), 2306-2308.
- Scotti, A., Meneveau, C. and Fatica, M. (1996). Dynamic Smagorinsky model on anisotropic grids. *Annual Research Briefs - 1996*, Center for Turbulence Research, Stanford University/NASA Ames Research, 259-2761.
- Schumann, U. (1975). Subgrid scale model for finite difference simulations of turbulent flows in plane channels and annuli. *J. Comput. Phys.*, **18**, 376-404.
- Shyy, W. and Vu, T. C. (1991). On the adoption of velocity variable and grid system for fluid flow computation in curvilinear coordinates. *J. Comput. Phys.*, **92**, 82-105.
- Smagorinsky, J. (1963). General circulation experiments with the primitive equations I. The basic experiment. *Monthly Weather Rev.*, **91**-3, 99-165.
- Spalart, P. R., Moser, R. D. and Rogers, M. M. (1991). Spectral Methods for the Navier-Stokes Equations with one infinite and two periodic directions. *J. Comput. Phys.*, **96**, 297-324.
- Speziale, C. G. (1985). Galilean invariance of subgrid-scale stress models in the large-eddy simulation of turbulence. *J. Fluid Mech.*, **156**, 55-62.
- Thompson, J. F., Warsi, Z. U. A. and Mastine, C. W. (1985). (小国力・河村哲也訳). Numerical Grid Generation: Foundations and Applications (数值格子生成の基礎と応用). North-Holland, New York (丸善).
- Thompson, J. F., Warsi, Z. U. A. and Mastine, C. W. (1994). Order of difference expressions in curvilinear coordinate systems. *J. Fluid Eng.*, **107**, 18-33.

- van der Ven, H. (1995). A family of large eddy simulation (LES) filters with nonuniform filter width. *Phys. Fluids*, **7**(5), 1171-1172.
- van der Vorst, H. A. (1992). A fast and smoothly converging variant of Bi-CG for the solution of nonsymmetric linear systems. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, **13**, 631-644.
- Van Kan, J. (1986). A second-order accurate pressure-correction scheme for viscous incompressible flow. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, **7**-3, 870-891.
- Vasilyev, O. V. and Lund, T. S. (1997). A general theory of discrete filtering for LES in complex geometry. *Annual Research Briefs - 1997*. Center for Turbulence Research, Stanford University /NASA Ames Research, 67-95.
- Vickery, B. J. (1975). Fluctuating lift and drag on a long cylinder of square cross-section in a smooth and in a turbulent stream. *J. Fluid Mech.*, **25**, 481-494.
- Vreman, B., Geurts, B. and Kuerten, H. (1994). On the formulation of the dynamic mixed subgrid-scale model. *Phys. Fluids*, **6**(12), 4057-4059.
- Yakhot, V., Orszag, S. A. (1986). Renormalization group Analysis of Turbulence. *J. Sci. Comput.*, **1**, 3-50.
- Yakhot, A., Orszag, S. A. and Yakhot, V. (1989). Renormalization group formulation of large-eddy simulations. *J. Sci. Comput.*, **4**, 139-.
- Yoshizawa, A. (1989). Subgrid-scale modeling with a variable length scale. *Phys. Fluids*, **A1**(7), 1293-1295. The following algorithm based on the fractional step method is extended as follows:
- Yoshizawa, A., Tsubokura, M., Kobayashi, T. and Taniguchi, N. (1996). Modeling of the dynamic subgrid-scale viscosity in large eddy simulation. *Phys. Fluids*, **8**(8), 2254-2256.
- Zang, Y., Street, R. L., Koseff, J. R. (1993). A dynamic mixed subgrid-scale model and its application to turbulent recirculating flows. *Phys. Fluids*, **A5**(12), 3186-3196.
- Zang, Y., Street, R. L., Koseff, J. R. (1994). A non-staggered grid, fractional step method for time-dependent incompressible Navier-Stokes equations in curvilinear coordinates. *J. Comput. Phys.*, **114**, 18-33.
- Zdravkovich, M. M. Flow around circular cylinders. Oxford Science Publications.

