論文審査の結果の要旨

氏　名　神 谷　亮

可積分系は，その名の通り，本来は求積法によって解を構成することが可能な方程式系を意味する．非線形微分方程式において，例えば Liouville-Arnold 可積分性や葉層構造による定義などにより，可積分性は厳密に定義されている．しかしながら，非線形離散力学系（非線形差分方程式）の可積分性については，未だに様々な議論がある．２ 階の有理形の差分方程式（３項間漸化式）については，可積分性の判定法として，特異点閉じ込めテストが提案され，一連の離散 Painlevé 方程式系が構成された．しかしながら，Hietarinta-Viallet 方程式のように，特異点閉じ込めテストを通過するものの，その軌道がカオスを示すものがあり，より精密な判定法として，「代数的エントロピーが零である」ことが提案された．現在では「代数的エントロピーが零である」ことが自律的な 2 階の有理形の差分方程式の可積分性の定義と考えられているが，非律的な場合や，高階・高次元の離散方程式系の場合には，未だ確立された定義はない．その理由のひとつとして，特異点閉じ込めテストや代数的エントロピーの概念を，直接高次元化し，計算することが困難であることが挙げられる．最近，特異点閉じ込めテストの一つの再定式化として，co-primeness 条件が提案された．co-primeness 条件とは，時間発展して得られる各項を初期値の有理式と捉えたときに，適当な環の上で互いに素になるという性質であり，特異点閉じ込めの代数的再定式化とも考えられる．実際，典型的な可積分格子系である離散 KdV 方程式や，１次元離散戸田格子方程式は，離散可積分方程式の持つ特徴である co-primeness property を満たすことが示されている．co-primeness 条件を満たしながら，Lax 形式や Poisson 構造が見出せず，十分な数の保存量を持たない系（多くの場合その簡約の系の代数的エントロピーが正となるもの）は，可積分系に近い性質を持っており，準可積分系(quasi-integrable system）と呼んでいる．２年ほど前に，神吉らは離散 KdV 方程式のある種の変形である方程式が，co-primeness 条件を満たし，またその簡約が Hietarinta-Viallet 方程式を含んでおり，1+1 次元の準可積分方程式であることが発見された．本学位論文の主たる成果は，離散戸田方程式の変形方程式系を考え，2+1 次元の準可積分方程式系を構成することに成功したことである．

本学位論文の前半では，２次元離散戸田方程式の双線形形式に対応する多項式形式を取り扱い，時間発展の各項が初期変数の Laurent 多項式であり，かつ，互いに素な既約多項式となることを証明した．したがって，自然に co-primeness 条件は満たされている．さらに，その簡約によって得られる１次元離散戸田格子方程式系も，また SOMOS 数列の変形に対しても全く同様に co-primeness 条件と既約性を満たすことを証明し

ている．一般に簡約によって co-primeness 条件は保存するとは限らないので，この結果は非自明な結果である．学位論文の後半では，2 次元離散戸田格子方程式の非線形形式を変形した系を考察している．この系は，前半で取り扱った多項式形式の結果を使うことができない．そのため，論文提出者は，多項式形式の非自律化を求め，その拡張された Laurent 性と既約性をまず証明した．ここで，拡張された Laurent 性とは，Laurent 性を考える環が初期値を 1 点だけではなく 2 点以上について局所化した Laurent 多項式になることである．その結果，非線形形式でも co-primeness 条件を考える環として，初期値の 2 点での局所化を行った環を考え，この環において確かに co-primeness 条件が成立することを証明した．また，その簡約した系についても同様に co-primeness 条件が成立することを示した．

以上のように，本学位論文は，初めて 2+1 次元の準可積分系を提案したものであり，また，新たに拡張された Laurent 性，co-primeness 条件を定義して，この系の特性を明らかにし，また，その低次元への簡約について詳細に調べたものである．よって、論文提出者 神谷 亮 は、博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める．